УДК 517.5

А. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОЦЕНКАХ АППРОКСИМАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАССОВ БЕСОВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Order estimates are obtained for some approximate characteristics of the Besov classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic multivariable functions.

Одержано порядкові оцінки деяких апроксимативних характеристик класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних.

В настоящей работе продолжается исследование [1–4] приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. Работа состоит из двух частей.

В первой части изучаются приближения классов $B^r_{p,\theta}$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье и наилучшие приближения этих классов тригонометрическими полиномами с „номерами" гармоник из гиперболических крестов в пространстве L_∞.

Вторая часть работы посвящена исследованию наилучших тригонометрических приближений классов $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_q, $1 < q < p < \infty$, $p \ge 2$.

Полученные в данной работе результаты дополняют некоторые результаты из [1, 3], где приведена библиография предшествующих работ, посвященных исследованиям по данному направлению на классах $W^r_{p,\alpha}$, H^r_p, $B^r_{p,\theta}$. (Определение классов $W^r_{p,\alpha}$ и H^r_p см., например, в [5], а определение классов $B^r_{p,\theta}$ воспроизведем ниже.)

Приведем некоторые обозначения, определения и известные результаты, которые нам потребуются.

Пусть

$$x = (x_1, \dots, x_d), \qquad \pi_d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi, \pi]$$

— d-мерный куб; $L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, обозначает множество функций, 2π-периодических по каждой переменной, таких, что

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \qquad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(x)| < \infty, \qquad p = \infty.$$

Всюду далее предполагаем, что для функций $f(x) \in L_p(\pi_d)$ выполнено условие

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx_j = 0, \qquad j = \overline{1, d}.$$

Пусть $k = (k_1, \dots, k_d)$, k_j — целые числа, $s = (s_1, \dots, s_d)$, s_j — натуральные числа, $j = \overline{1, d}$. Обозначим

$$\rho(s) = \{ k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \ j = \overline{1, d} \}$$

и положим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k, x)},$$

где

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k, t)} dt$$

— коэффициенты Фурье $f(x)$, а

$$(l, m) = \sum_{j=1}^{d} l_j m_j.$$

Через $T(n)$, $n = (n_1, \dots, n_d)$, n_j — целые неотрицательные числа, $j = \overline{1, d}$, обозначим множество полиномов $t(x)$ вида

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le n_j,\ j = \overline{1, d}} c_k e^{i(k, x)}.$$

Для полиномов $t(x) \in T(n)$ справедливо неравенство [6, с. 150] :

$$\| t(x) \|_p \le 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{(1/q - 1/p)} \| t(x) \|_q, \quad 1 \le q \le p \le \infty,$$

которое называют неравенством разных метрик С. М. Никольского. Далее будем использовать следующее утверждение (см., например, [6, с. 65]).

Теорема А. *Пусть задано* $p \in (1, \infty)$. *Существуют положительные числа* C_1 *и* C_2 *такие, что для каждой функции* $f \in L_p(\pi_d)$ *справедлива оценка*

$$C_1 \|f\|_p \le \left\| \left\{ \sum_s |\delta_s(f, x)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \le C_2 \|f\|_p.$$

Эта теорема является обобщением на многомерный случай известной теоремы Литтлвуда – Пэли ([7], т. 2, гл. 15).

Пусть $V_l(t)$, $l \in N$, обозначает ядро Валле – Пуссена порядка $2l - 1$:

$$V_l(t) = \sum_{k=1}^{l} \cos kt + \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l}\right) \cos kt.$$

Через $A_s(x)$ и $A_s(f, x)$, $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, d}$, обозначим полиномы вида

$$A_s(x) = 2^d \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right),$$

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x),$$

где „$*$" обозначает операцию свертки.

Тогда (см., например, [6, с. 69]) для $1 \le p \le \infty$ и $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, классы $B^r_{p, \theta}$ определяются следующим образом:

$$B^r_{p, \theta} = \left\{ f(x) \,\middle|\, \| f \|_{B^r_{p, \theta}} = \left(\sum_s 2^{(s, r)\theta} \| A_s(f, x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(x) \middle| \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \|A_s(f,x)\|_p \le 1 \right\}.$$

Напомним, что при $\theta = \infty$ классы $B^r_{p,\theta}$ совпадают с классами С. М. Никольского H^r_p.

В последующих рассуждениях предполагается, что координаты вектора $r = (r_1, \ldots, r_d)$ упорядочены следующим образом: $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$ и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_d)$ — векторы с координатами $\gamma_j = r_j / r_1$, $j = \overline{1,d}$, $\gamma'_j = \gamma_j$ при $j = \overline{1,\nu}$ и $\gamma_{j-1} < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1,d}$. Через $S^\gamma_n(f;x)$ обозначается частная сумма Фурье функции $f(x)$ вида

$$S^\gamma_n(f,x) = \sum_{(s,\gamma)<n} \delta_s(f,x),$$

которую называют ступенчатой гиперболической суммой Фурье.

1. Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ в равномерной метрике. В этой части работы получены точные по порядку оценки приближения классов $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p < \infty$, ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S^\gamma_n(f,x)$, $f \in B^r_{p,\theta}$, а также порядковые оценки сверху наилучших приближений классов $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p \le 2$, тригонометрическими полиномами с „номерами" гармоник из гиперболических крестов в равномерной метрике.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $r_1 > 1/p$ *и* $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\sup_{f \in B^r_{p,\theta}} \left\| f(x) - S^\gamma_n(f,x) \right\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1 - 1/p)} n^{(\nu-1)(1-1/\theta)}. \tag{1}$$

Доказательство. Сначала установим оценку сверху в (1). Пусть $f \in B^r_{p,\theta}$ и q_0 — некоторое число, удовлетворяющее условию $1 \le p < q_0 < \infty$. Тогда, применив к $\left\| f(x) - S^\gamma_n(f,x) \right\|_\infty$ вначале неравенство треугольника в L_∞, а затем неравенство разных метрик С. М. Никольского, будем иметь

$$\left\| f(x) - S^\gamma_n(f,x) \right\|_\infty = \left\| f(x) - \sum_{(s,\gamma)<n} \delta_s(f,x) \right\|_\infty \le \sum_{(s,\gamma)\ge n} \|\delta_s(f,x)\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{\|s\|_1/q_0} \|\delta_s(f,x)\|_{q_0} \asymp \sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{\|s\|_1/q_0} \|A_s(f,x)\|_{q_0} \ll$$

$$\ll \sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{\|s\|_1/q_0} 2^{\|s\|_1(1/p - 1/q_0)} \|A_s(f,x)\|_p = \sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{\|s\|_1/p} \|A_s(f,x)\|_p. \tag{2}$$

Далее, воспользовавшись неравенством Гельдера с показателем θ (с естественной модификацией при $\theta = \infty$), продолжим оценку (2):

$$\le \left(\sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,x)\|^\theta_p \right)^{1/\theta} \left(\sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{-(s,r-1/p)\theta/(\theta-1)} \right)^{1-1/\theta} \le$$

$$\le \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \left(\sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{-(s,r-1/p)\theta/(\theta-1)} \right)^{1-1/\theta} \le \left(\sum_{(s,\gamma)\ge n} 2^{-(s,\overline{\gamma})(r_1-1/p)\theta/(\theta-1)} \right)^{1-1/\theta}, \tag{3}$$

где через $\overline{\gamma}$ обозначен вектор $\overline{\gamma} = (\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_d)$ с координатами $\overline{\gamma}_j = (r_j - 1/p)$, $j = \overline{1, d}$. Замечая, что $\overline{\gamma}_j = \gamma_j = 1$ при $j = \overline{1, \nu}$ и $\gamma_j < \overline{\gamma}_j$ при $j = \overline{\nu+1, d}$ и воспользовавшись соотношением [5, с.11]

$$\sum_{(s, \gamma') \geq n} 2^{-\alpha(s,\gamma)} \asymp 2^{-\alpha n} n^{\nu-1}, \quad \alpha > 0, \tag{4}$$

для последней суммы в (3) получаем оценку

$$\left(\sum_{(s, \gamma) \geq n} 2^{-(s,\overline{\gamma})(r_1 - 1/p)\theta/(\theta-1)} \right)^{1-1/\theta} \asymp 2^{-n(r_1 - 1/p)} n^{(\nu-1)(1-1/\theta)}. \tag{5}$$

Сопоставив (3) и (5), приходим к требуемому соотношению

$$\left\| f(x) - S_n^{\gamma}(f, x) \right\|_\infty << 2^{-n(r_1 - 1/p)} n^{(\nu-1)(1-1/\theta)}.$$

Отметим [1], что для получения оценки снизу в (1) достаточно рассмотреть случай $\nu = d$.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 2^{-n(r_1+1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} \sum_{(s, 1) = n+1} A_s(x).$$

Поскольку (см., например, [5, с. 66])

$$\| A_s(x) \|_p \asymp 2^{(s, 1)(1-1/p)}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

то согласно определению нормы $\| f \|_{B^r_{p,\theta}}$ имеем

$$\| f \|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \| A_s(f, x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} =$$

$$= 2^{-n(r_1+1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{(s, 1) = n+1} 2^{(s,r)\theta} \| A_s(x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} <<$$

$$<< 2^{-n(r_1+1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{(s, 1) = n+1} 2^{(s,1)(r_1+1-1/p)\theta} \right)^{1/\theta} <<$$

$$<< n^{-(d-1)/\theta} \left(\sum_{(s, 1) = n+1} 1 \right)^{1/\theta} << 1.$$

Таким образом, из полученного соотношения заключаем, что функция $Cf(x)$ с соответствующей постоянной C принадлежит классу $B^r_{p,\theta}$. Кроме того, в силу определения ступенчатой гиперболической суммы Фурье $S_n^1(f, x)$ (здесь „1" обозначает d-мерный вектор $(1, \ldots, 1)$) справедливо равенство $S_n^1(f, x) = 0$. Следовательно, принимая во внимание, что

$$\left\| \sum_{(s, 1) = n+1} A_s(x) \right\|_\infty \asymp 2^n n^{d-1},$$

имеем оценку

$$\left\| f(x) - S_n^1(f, x) \right\|_\infty = \|f\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1 - 1/p)} n^{(d-1)(1-1/\theta)}.$$

Оценка снизу в (1), а вместе с ней и теорема 1 доказаны. Отметим, что порядки величин

$$\sup_{f \in F_p^r} \left\| f(x) - S_n^\gamma(f, x) \right\|_\infty,$$

где F_p^r — класс H_p^r, $1 \le p < \infty$, либо класс $W_{p,\alpha}^r$, $1 < p < \infty$, установлены В. Н. Темляковым [8], а величин

$$\sup_{f \in W_{\infty,\alpha}^r} \left\| f(x) - S_n^\gamma(f, x) \right\|_\infty$$

— И. Р. Лифляндом [9] (см. также имеющуюся там библиографию). Сопоставив результат теоремы 1 с соответствующим результатом для классов $W_{p,\alpha}^r$ [8], видим, что при $1 \le \theta < p$ и $\nu \ge 2$

$$\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \left\| f(x) - S_n^\gamma(f, x) \right\|_\infty << \sup_{f \in W_{p,\alpha}^r} \left\| f(x) - S_n^\gamma(f, x) \right\|_\infty. \tag{6}$$

В связи с соотношением (6) отметим, что, как следует из работ [8, 10], при $1 < q < \infty$, $1 < p < \infty$ и $1 \le \theta < p$ имеет место порядковое соотношение

$$\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \left\| f(x) - S_n^\gamma(f, x) \right\|_q \asymp \sup_{f \in W_{p,\alpha}^r} \left\| f(x) - S_n^\gamma(f, x) \right\|_q.$$

Для формулировки и доказательства следующего результата нам понадобятся еще некоторые обозначения.

Через $\Gamma(N, \gamma)$ обозначим множество

$$\Gamma(N, \gamma) = \left\{ k = (k_1, \ldots, k_d);\ k_j \text{ — натуральные, } \prod_{j=1}^d k_j^{\gamma_j} \le N \right\}.$$

Напомним, что множество $\Gamma(N, \gamma)$ называют гиперболическим крестом.

Пусть $T(N, \gamma)$ обозначает множество полиномов $t(x)$ вида

$$t(x) = \sum_{|k| \in \Gamma(N, \gamma)} c_k e^{i(k, x)}, \qquad |k| = (|k_1|, \ldots, |k_d|).$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, через $E_{N,\gamma}(f)_p$ обозначим следующую аппроксимативную характеристику:

$$E_{N,\gamma}(f)_p = \inf_{t \in T(N, \gamma)} \|f - t\|_p.$$

Если F — некоторый функциональный класс, то полагаем

$$E_{N,\gamma}(F)_p = \sup_{f \in F} E_{N,\gamma}(f)_p.$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p \le 2$, $1 \le \theta \le \infty$, $r_1 > 1/p$. *Тогда имеет место порядковая оценка*

$$E_{N,\gamma}\left(B_{p,\theta}^r\right)_\infty << N^{-(r_1 - 1/p)} (\log^{\nu-1} N)^{(1/2 - 1/\theta)_+},$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $p = 2$. Пусть $f \in B^r_{2,\theta}$. Положим

$$f_n(x) = \sum_{|k| \in \tilde{Q}^\gamma_n \setminus \tilde{Q}^\gamma_{n-1}} \hat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где

$$\tilde{Q}^\gamma_l = \bigcup_{(s,\gamma) \le l} \rho^+(s),$$

$$\rho^+(s) = \{ k = (k_1, \ldots, k_d),\ k_j \in N,\ 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d} \}.$$

Тогда $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} f_l(x),$$

и при $2^n \le N < 2^{n+1}$ выполнено неравенство

$$E_{N,\gamma}(f)_\infty \le \sum_{l=n}^{\infty} E_{N,\gamma}(f_l)_\infty. \tag{7}$$

Оценим величины $E_{N,\gamma}(f_l)_\infty$. Выберем число ρ_1 так, чтобы $1/2 < \rho_1 < r_1$, и рассмотрим вектор $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_d)$ с координатами $\rho_j = \rho_1$ и $j = \overline{1, \nu}$, и $\rho_1 \gamma_j - (\gamma_j - 1)/2 < \rho_j < \rho_1 \gamma_j$, $j = \overline{\nu + 1, d}$. Заметим, что из неравенства $\rho_j < \rho_1 \gamma_j$ следует неравенство $\gamma_j < (r_j - \rho_j)/(r_1 - \rho_1)$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_l(x) = f_l(x) * \sum_{k \in \tilde{Q}^\gamma_l \setminus \tilde{Q}^\gamma_{l-1}} \prod_{j=1}^{d} k_j^{\rho_j} \cos k_j x_j.$$

Тогда, принимая во внимание, что в этом случае

$$f_l(x) = \varphi_l(x) * \sum_{k \in \tilde{Q}^\gamma_l \setminus \tilde{Q}^\gamma_{l-1}} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-\rho_j} \cos k_j x_j,$$

имеем

$$f_l(x) = \|\varphi_l\|_2 \left(\frac{\varphi_l(x)}{\|\varphi_l\|_2} * \sum_{k \in \tilde{Q}^\gamma_l \setminus \tilde{Q}^\gamma_{l-1}} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-\rho_j} \cos k_j x_j \right) = \|\varphi_l\|_2 g_l(x),$$

где $g_l(x)$ — функция из класса W^ρ_2. (Здесь через W^ρ_2 обозначен класс $W^\rho_{2,\alpha}$ при $\alpha = 0$.)

Далее, используя оценку из [11, с. 395]

$$E_{N,\gamma}(W^\rho_2)_\infty \asymp N^{1/2 - \rho_1},$$

находим

$$E_{N,\gamma}(f_l)_\infty \le E_{N,\gamma}(g_l)_\infty \|\varphi_l\|_2 \le E_{N,\gamma}(W^\rho_2)_\infty \|\varphi_l\|_2 << N^{1/2 - \rho_1} \|\varphi_l\|_2. \tag{8}$$

Для того чтобы продолжить (8), оценим $\|\varphi_l\|_2$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $2 < \theta \le \infty$. Тогда из определения функций $\varphi_l(x)$ с учетом того, что $f \in B^r_{2,\theta}$, будем иметь

$$\|\varphi_l\|_2^2 = \sum_{l-1<(s,\gamma)\le l} \|\delta_s(\varphi_l,x)\|_2^2 \ll \sum_{l-1<(s,\gamma)\le l} 2^{2(\rho,s)}\|\delta_s(f_l,x)\|_2^2 \ll$$

$$\ll \sum_{l-1<(s,\gamma)\le l} 2^{2(\rho,s)}\|\delta_s(f,x)\|_2^2 \le$$

$$\le \left(\sum_{l-1<(s,\gamma)\le l} 2^{2\theta/(\theta-2)(\rho-r,s)}\right)^{(\theta-2)/\theta} \left(\sum_{l-1<(s,\gamma)\le l} 2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,x)\|_2^\theta\right)^{2/\theta} \le$$

$$\le \left(\sum_{l-1<(s,\gamma)\le l} 2^{2\theta/(\theta-2)(\rho-r,s)}\right)^{(\theta-2)/\theta} \|f\|_{B_{2,\theta}^r}^2 \le$$

$$\le \left(\sum_{l-1<(s,\gamma)\le l} 2^{-2\theta(r-\rho,s)/(\theta-2)}\right)^{(\theta-2)/\theta} =$$

$$= \left(\sum_{l-1<(s,\gamma)\le l} 2^{-2\theta(r_1-\rho_1)(\tilde\gamma,s)/(\theta-2)}\right)^{(\theta-2)/\theta}, \tag{9}$$

где $\tilde\gamma = (\tilde\gamma_1,\dots,\tilde\gamma_d)$, $\tilde\gamma_j = (r_j-\rho_j)/(r_1-\rho_1)$, $j=\overline{1,d}$.

Далее, замечая, что $\gamma_j = \tilde\gamma_j$, $j=\overline{1,\nu}$, и $1<\gamma_j<\tilde\gamma_j$, $j=\overline{\nu+1,d}$, и учитывая (4), из (9) находим

$$\|\varphi_l\|_2^2 \ll 2^{-2l(r_1-\rho_1)} l^{(\nu-1)(\theta-2)/\theta}$$

или

$$\|\varphi_l\|_2 \ll 2^{-l(r_1-\rho_1)} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}. \tag{10}$$

2. Пусть $\theta\in[1,2]$. Тогда

$$\|\varphi_l\|_2 \ll \left(\sum_{l-1<(s,\gamma)\le l} 2^{2(\rho,s)}\|\delta_s(f,x)\|_2^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{l-1<(s,\gamma)\le l} 2^{-2(r_1-\rho_1)(\tilde\gamma,s)} 2^{2(r,s)}\|\delta_s(f,x)\|_2^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \sup_{s:\, l-1<(s,\gamma)\le l} 2^{-(r_1-\rho_1)(\tilde\gamma,s)} \left(\sum_{l-1<(s,\gamma)\le l} 2^{2(s,r)}\|\delta_s(f,x)\|_2^2\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Далее, применив к последней сумме (11) неравенство

$$\left(\sum_k a_k^{\nu_2}\right)^{1/\nu_2} \le \left(\sum_k a_k^{\nu_1}\right)^{1/\nu_1}, \quad 1\le\nu_1\le\nu_2<\infty, \quad a_k\ge 0$$

[6, с. 149], получаем

$$\|\varphi_l\|_2 \ll 2^{-l(r_1-\rho_1)}\left(\sum_{l-1<(s,\gamma)\le l} 2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,x)\|_2^\theta\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le 2^{-l(r_1-\rho_1)}\|f\|_{B_{2,\theta}^r} \le 2^{-l(r_1-\rho_1)}. \tag{12}$$

Подставляя (12) и (10) в (8), имеем

$$E_{N,\gamma}(f_l)_\infty \ll N^{1/2-\rho_1} 2^{-l(r_1-\rho_1)} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+}. \tag{13}$$

Наконец, воспользовавшись соотношением (7) и оценкой (13) для $E_{N,\gamma}(f)_\infty$, получим оценку

$$E_{N,\gamma}(f)_\infty \le \sum_{l=n}^{\infty} E_{N,\gamma}(f_l)_\infty \ll N^{1/2-\rho_1} \sum_{l=n}^{\infty} 2^{-l(r_1-\rho_1)} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} \ll$$

$$\ll N^{1/2-\rho_1} 2^{-n(r_1-\rho_1)} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+} \asymp N^{1/2-r_1} (\log^{\nu-1} N)^{(1/2-1/\theta)_+}. \tag{14}$$

Искомая оценка в случае $p=2$ получена.

Для того чтобы распространить полученный результат на случай $p \in [1, 2)$, достаточно воспользоваться вложением $B^r_{p,\theta} \subset B^{r-1/p+1/2}_{2,\theta}$ [12, с. 675] и оценкой (14). Теорема доказана.

Отметим, что вопрос об окончательности оценки для $E_{N,\gamma}(B^r_{p,\theta})_\infty$ остается открытым.

Замечание. Для удобства сравнения оценки (1) с оценкой, полученной в теореме 2, последнюю с учетом неравенства $2^n < N \le 2^{n+1}$ можно записать в виде

$$E^\gamma_n(B^r_{p,\theta})_\infty \ll 2^{-n(r_1-1/\rho)} n^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)_+},$$

где

$$E^\gamma_n(B^r_{p,\theta})_\infty = \sup_{f \in B^r_{p,\theta}} \inf_{t \in T_{Q^\gamma_n}} \|f-t\|_\infty,$$

$T_{Q^\gamma_n}$ — множество тригонометрических полиномов с „номерами" гармоник из $Q^\gamma_n = \bigcup_{(s,\gamma)<n} \rho(s)$. Напомним, что множество Q^γ_n называют ступенчатым гиперболическим крестом.

2. Наилучшие тригонометрические приближения классов $B^r_{p,\theta}$. Здесь исследуется величина

$$e_M(F, L_q) = \sup_{f \in F} \inf_{k^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,\cdot)} \right\|_q, \tag{15}$$

которую называют наилучшим тригонометрическим приближением класса F в пространстве L_q.

Исследованию величин (15) на классах $B^r_{p,\theta}$ и, в меньшей мере, на классах $W^r_{p,\alpha}$ и H^r_p посвящен ряд работ автора [1, 3, 4, 12], в которых имеется соответствующая библиография, относящаяся к данному вопросу. Утверждение, сформулированное и доказанное ниже, относится к одному результату из [3]. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $1<q<p<\infty$, $p \ge 2$, $r_1 > 0$. *Тогда при* $1 \le \theta \le \infty$ *справедлива оценка*

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1+1/2-1/\theta)_+}. \tag{16}$$

Прежде чем перейти к доказательству соотношения (16), сделаем следующее замечание. Порядок величины $e_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ в условиях теоремы 3 был установлен в [3] (теорема 2), где при установлении оценки снизу использовалось одно утверждение из [8] (лемма 1.4).

К сожалению, на что обратил внимание автора В. Н. Темляков, в этом утверждении не учитывается специфика адаптированного приближения и поэтому оно не может быть применено для оценок снизу величин $e_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$.

Следовательно, вопрос о порядке величины $e_M(B^r_{\rho,\theta}, L_q)$ в случае $1 < q < < p < \infty$, $p \geq 2$, $r_1 > 0$, оставался открытым и, таким образом, сформулированная выше теорема 3 восполняет этот пробел.

Доказательство теоремы 3. Оценка сверху в (1б) следует из теоремы 1 из [2] в силу соотношения

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \leq e^{\perp}_M(B^r_{p,\theta}, L_q).$$

(Определение величин $e^{\perp}_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$, а также историю их исследования см. в [2].) Для доказательства оценки снизу нам понадобятся некоторые обозначения и вспомогательное утверждение.

Предварительно отметим, что оценку снизу в (1б) достаточно установить в случае $\nu = d$ и в предположении, что $q \in (1, 2]$.

Для вектора $s = (s_1, \ldots, s_d)$, s_j — четные числа, $s_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, обозначим

$$\rho^+(s) = \{k\colon k = (k_1, \ldots, k_d),\ 2^{s_j - 1} \leq k_j < 2^{s_j},\ k_j \in N\},$$

и для $n \in N$ положим

$$S_n = \left\{s\colon (s, 1) = 2\left[\left[\frac{n}{2}\right]\right]\right\}, \qquad \overline{Q}^1_n = \bigcup_{s \in S_n} \rho^+(s).$$

Пусть далее $\mathcal{T}(\overline{Q}^1_n)$ обозначает множество полиномов $t(x)$ вида

$$t(x) = \sum_{|k| \in \overline{Q}^1_n} c_k e^{i(k, x)},$$

где $|k| = (|k_1|, \ldots, |k_d|)$.

Наряду с нормой L_q будем рассматривать норму пространства $B^0_{q,\theta}$, аналогичную норме пространства Бесова, которую определим для тригонометрических полиномов $t(x) \in \mathcal{T}(\overline{Q}^1_n)$ формулой

$$\|t\|_{B^0_{q,\theta}} = \left(\sum_{s \in S_n} \|A_s(t, x)\|^\theta_q\right)^{1/q}, \qquad 1 \leq q \leq \infty, \qquad 1 \leq \theta \leq \infty,$$

с естественной модификацией определения при $\theta = \infty$. Аналогично определяется норма $\|f\|_{B^0_{q,\theta}}$ для функции $f(x)$ из $L_q(\pi_d)$ при условии сходимости ряда $\sum_s \|A_s(f, x)\|^\theta_q$. Отметим, что в случае $1 < q < \infty$

$$\|f\|_{B^0_{q,\theta}} \asymp \left(\sum_s \|\delta_s(f, x)\|^\theta_q\right)^{1/\theta}.$$

Пусть D — ограниченная область в R^d, $1 \leq q \leq \infty$, и $\Phi = \{\varphi_n(x)\}^\infty_{n=1}$ — система функций из пространства $L_q(D)$. Для $f \in L_q(D)$ положим

$$e_M(f, \Phi)_q = \inf_{\substack{\{n_i\} = \Lambda \subset Z_+,\ |\Lambda| = M \\ \{c_i\} \in R}} \left\| f(x) - \sum_{i=1}^{M} c_i \varphi_{n_i}(x) \right\|_{L_q(D)},$$

где $|\Lambda|$ — количество элементов множества Λ.

Пусть F — некоторый класс функций из $L_q(D)$ и

$$e_M(F, \Phi)_q = \sup_{f \in F} e_M(f, \Phi)_q.$$

Для полиномов из $\mathcal{T}(\overline{Q}_n^1)_{B^0_{\infty,\infty}}$ в [13, с. 71] установлено следующее утверждение.

Теорема Б. *Существует постоянная $C(d) > 0$ такая, что для любого набора функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^l \subset B^0_{1,1}$, $l < C'\left|\overline{Q}_n^1\right|$, справедлива оценка*

$$e_M\left(\mathcal{T}(\overline{Q}_n^1)_{B^0_{\infty,\infty}}, \Phi\right)_{B^0_{1,1}} \geq C_1 n^{d-1}, \quad C_1 = C_1(d, C') > 0,$$

для всех $M \leq C(d)\left|\overline{Q}_n'\right|$.

Теперь перейдем непосредственно к установлению оценки снизу в (16). По заданному M подберем n из соотношения $M \asymp 2^n n^{d-1}$, и пусть $P_{\overline{Q}_n^1}$ обозначает оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{T}(\overline{Q}_n^1)$. Как следует из теоремы Литтлвуда–Пэли (теорема А), этот оператор ограничен как оператор, действующий из L_q в L_q при $q \in (1, \infty)$, и, таким образом, для тригонометрической системы $T = \left\{e^{i(k,x)}\right\}$ справедливо соотношение

$$e_M\left(\mathcal{T}(\overline{Q}_n^1)_{B^0_{\infty,\infty}}, T\right)_q \gg e_M\left(\mathcal{T}(\overline{Q}_n^1)_{B^0_{\infty,\infty}}, \left\{e^{i(k,x)}\right\}_{k \in \overline{Q}_n^1}\right)_q. \tag{17}$$

Далее, поскольку для любого полинома $t(x) \in \mathcal{T}(\overline{Q}_n^1)_{B^0_{\infty,\infty}}$ имеет место оценка

$$\|t\|_{B^r_{\infty,\theta}} = \left(\sum_{s \in S_n} 2^{(s,r)\theta} \|A_s(t,x)\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta} \leq$$

$$\leq 2^{nr_1} \max_{s \in S_n} \|A_s(t,x)\|_\infty \left(\sum_{s \in S_n} 1\right)^{1/\theta} \ll 2^{nr_1} \|t\|_{B^0_{\infty,\infty}} n^{(d-1)/\theta},$$

то отсюда заключаем, что существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$C 2^{-nr_1} n^{-(d-1)/\theta} \mathcal{T}(\overline{Q}_n^1)_{B^0_{\infty,\infty}} \subset B^r_{\infty,\theta} \cap \mathcal{T}(\overline{Q}_n^1). \tag{18}$$

Из (17) и (18) находим

$$e_M(B^r_{\infty,\theta}, L_q) \geq e_M\left(B^r_{\infty,\theta} \cap \mathcal{T}(\overline{Q}_n^1), L_q\right) \gg$$

$$\gg 2^{-nr_1} n^{-(d-1)/\theta} e_M\left(\mathcal{T}(\overline{Q}_n^1)_{B^0_{\infty,\infty}}, \left\{e^{i(k,x)}\right\}_{k \in \overline{Q}_n^1}\right). \tag{19}$$

Теперь запишем соотношение между L_q, $1 < q \leq 2$, и $B^0_{1,1}$ — нормами полиномов из $\mathcal{T}(\overline{Q}_n^1)$.

С одной стороны, для $t \in \mathcal{T}(\overline{Q}_n^1)$ [3, с. 1419]

$$\|t\|_q \gg \left(\sum_{s \in S_n} \|\delta_s(t,x)\|_q^q\right)^{1/q} \asymp \|t\|_{B^0_{q,2}}, \tag{20}$$

а с другой стороны

$$\|t\|_{B^0_{1,1}} \asymp \sum_{s\in S_n}\|A_s(t,x)\|_1 \le \left(\sum_{s\in S_n}\|A_s(t,x)\|_1^2\right)^{1/2}\left(\sum_{s\in S_n}1\right)^{1/2} \ll$$
$$\ll n^{(d-1)/2}\|t\|_{B^0_{1,2}} \le n^{(d-1)/2}\|t\|_{B^0_{q,2}}. \qquad (21)$$

Сопоставляя (21) и (20), находим, что для $t\in \mathcal{T}(\overline{Q}_n^1)$ справедливо соотношение

$$\|t\|_q \gg n^{-(d-1)/2}\|t\|_{B^0_{1,1}},$$

с учетом которого из (19) получаем оценку

$$e_M(B^r_{\infty,\theta}, L_q) \gg$$
$$\gg 2^{-nr_1} n^{-(d-1)(1/2+1/\theta)} e_M\left(\mathcal{T}(\overline{Q}_n^1)_{B^0_{\infty,\infty}}, \left\{e^{i(k,x)}\right\}_{k\in\overline{Q}_n^1}\right)_{B^0_{1,1}}. \qquad (22)$$

Применяя к правой части (22) теорему Б при $\Phi=\left\{e^{i(k,x)}\right\}_{k\in\overline{Q}_n^1}$ и $l=|Q_n|$, находим

$$e_M(B^r_{\infty,\theta}, L_q) \gg 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \asymp M^{-r_1}(\log^{d-1}M)^{r_1+1/2-1/\theta}. \qquad (23)$$

Наконец, принимая во внимание, что при $1\le p<\infty$ $B^r_{\infty,\theta}\subset B^r_{p,\theta}$ и используя соотношение (23), получаем оценку

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \gg M^{-r_1}(\log^{d-1}M)^{r_1+1/2-1/\theta}.$$

Заметим, что установленная оценка совпадает по порядку с оценкой сверху в (16) в случае $r_1\ge 1/\theta-1/2$. Если же $0<r_1<1/\theta-1/2$, то, принимая во внимание, что оценка сверху в (16) в этом случае не зависит от размерности d, необходимую оценку снизу получаем с помощью проведенных выше рассуждений, полагая $d=1$.

Теорема доказана.

Отметим, что, как следует из сопоставления доказанной теоремы с соответствующим результатом приближения классов $B^r_{p,\theta}$ гиперболическими суммами Фурье [10], порядки величин $e_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ и

$$\sup_{f\in B^r_{p,\theta}}\left\|f(x)-S_n^\gamma(f,x)\right\|_q, \qquad M\asymp 2^n n^{\nu-1}$$

при условии $0<r_1<1/\theta-1/2$, $\nu\ge 2$ не совпадают. Подобного рода факты отмечались автором при приближении классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в метрике L_q и для других соотношений между параметрами r_1, p, q и θ [1–4].

Напомним, что при приближении классов $W^r_{p,\alpha}$ периодических функций многих переменных в метрике L_q, $1<p<q\le 2$, факт несовпадения порядков величин $e_M(W^r_{p,\alpha}, L_q)$ и

$$\sup_{f\in W^r_{p,\alpha}}\left\|f(x)-S_n^\gamma(f,x)\right\|_q$$

впервые обнаружен В. Н. Темляковым [5]. Затем в [14] этот факт выявлен при приближении классов $B^r_{p,\theta}$ и в одномерном случае в метрике L_q при $1 < p < 2 < q < \infty$.

В заключение автор выражает благодарность В. Н. Темлякову за ряд полезных бесед и советов, касающихся исследования вопросов приближения классов $B^r_{p,\theta}$.

1. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. I // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1535–1547.
2. *Романюк А. С.* О приближении классов Бесова функций многих переменных частными суммами с заданным числом гармоник // Оптимизация методов приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 70–78.
3. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$. II // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 10. – С. 1411–1423.
4. *Романюк А. С.* О наилучшей тригонометрической и билинейной аппроксимации классов Бесова функций многих переменных // Там же. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1097–1111.
5. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.; Т. 2. – 537 с.
8. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **189**. – С. 138–168.
9. *Лифлянд И. Р.* Точный порядок констант Лебега гиперболических частных сумм кратных рядов Фурье // Мат. заметки. – 1986. – **39**, № 5. – С. 674–683.
10. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398–1408.
11. *Темляков В. Н.* Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1985. – **49**, № 5. – С. 986–1030.
12. *Романюк А. С.* О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 5. – С. 663–675.
13. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57–86.
14. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. – 1987. – **132**, № 1. – С. 20–27.

Получено 10.01.97