УДК 517.9

Б. В. Базалий (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ЗАДАЧА СТЕФАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С УЧЕТОМ КРИВИЗНЫ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ *

We consider the nonstationary free boundary problem for an elliptic equation. In this problem, the value of required function on an unknown boundary is proportional to the curvature of this boundary. We prove the existence of a solution in the small with respect to time in the spaces of smooth functions.

Розглядається нестаціонарна задача з вільною межею для еліптичного рівняння, в якій значення шуканої функції на невідомій межі пропорційне кривині цієї межі. Доведено існування розв'язку в малому за часом у просторах гладких функцій.

Классическая задача Стефана — это нелинейная задача со свободной границей для параболических уравнений, описывающая процесс кристаллизации среды, которая может находиться в различных фазовых состояниях. При этом на свободной границе функция распределения температуры принимает постоянное значение (равное температуре кристаллизации). Вопросам разрешимости и свойствам регулярности решения этой задачи посвящена обширная литература (см., например, обзор [1]). В настоящей работе рассматривается задача типа задачи Стефана (см. [2, 3]), в которой, во-первых, распределение температуры описывается эллиптическим уравнением, и, во-вторых, температура кристаллизации пропорциональна кривизне искомой границы раздела фаз. В связи с этим отметим работу [4], в которой исследуемая задача отличается от нашего случая только лишь типом граничных условий на фиксированных границах, однако результат о регулярности свободной границы существенно слабее, и работу [5], в которой рассматривается задача фильтрации со свободной границей для эллиптического уравнения, но без учета ее кривизны.

1. Постановка задачи и основной результат. Обозначим через $\Omega \subset R^n$, $n = 2, 3$, заданную область с границей $\partial\Omega$, состоящей из двух непересекающихся компонент Γ^+ и Γ^-, причем Γ^+ лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ^-. Будем считать, что поверхность $\Gamma \subset \Omega$ делит Ω на две связные подобласти $\Omega^\pm$, так что $\partial\Omega^\pm = \Gamma \bigcup \Gamma^\pm$. Пусть $\omega = (\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_{n-1})$ — некоторые координаты на Γ, $y(\omega) \in \Gamma$ — соответствующая точка в R^n, $\bar{\nu}(\omega)$ — единичная нормаль к Γ, направленная внутрь Ω^+. Далее, пусть $\gamma_0 > 0$ такое, что поверхности $\{y = y(\omega) \pm 2\bar{\nu}(\omega)\gamma,\ 0 < \gamma < \gamma_0\}$ не имеют самопересечений и не пересекаются с $\Gamma^\pm$; $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$, $\Gamma_T^\pm = \Gamma^\pm \times [0, T]$; $\Omega_{\rho,T}^\pm$ — область, ограниченная плоскостями $\tau = 0$, $\tau = T$, поверхностью $\Gamma_T^\pm$ и поверхностью $\Gamma_{\rho,T} = \{(y, \tau) \colon y = y(\omega) + \bar{\nu}(\omega)\rho(\omega, \tau),\ \tau \in [0, T]\}$, где $|\rho(\omega, \tau)| < \gamma_0$. Искомая (свободная) граница $\Gamma_{\rho,T}$ задается таким образом в терминах ее отклонения по нормали от фиксированной поверхности Γ_T [6].

Рассматриваемая задача со свободной границей состоит в нахождении функций $u^\pm(y, \tau)$ и $\rho(\omega, \tau)$, определенных в областях $\Omega_{\rho,T}^\pm$ и на Γ_T соответственно, по условиям

* Частично поддержана проектом „Нелинейные и сингулярные дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения" INTAS-94-2187.

$$-\Delta_y u^{\pm} = 0, \quad (y,\tau)\in \Omega^{\pm}_{\rho,T}; \qquad u^{\pm} = b^{\pm}(y,\tau), \quad (y,\tau)\in \Gamma^{\pm}_T;$$

$$\kappa v = (a^- \nabla_y u^- - a^+ \nabla_y u^+, \ \bar n(y,\tau)), \tag{1}$$

$$u^+ = u^- = \gamma k(y,\tau), \quad (y,\tau)\in \Gamma_{\rho,T}; \qquad u^{\pm}(y,0) = u_0^{\pm}(y), \quad \rho(\omega,0) = 0,$$

где $a^{\pm}$, γ, κ — заданные положительные постоянные; $k(y,\tau)$ — средняя кривизна поверхности $\Gamma_{\rho,T}$ при $\tau = \text{const}$; v — скорость перемещения свободной границы в направлении нормали $\bar n(y,\tau)$ к $\Gamma_{\rho,T}$, направленной внутрь $\Omega^+_{\rho,T}$; $b^{\pm}(y,\tau)$ — заданные функции, $\nabla_y = \{\partial/\partial y_i\}$, $\Delta_y = \nabla_y^2$. В работе используются пространства $H^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$, l — целое число, $\alpha\in(0,1)$, и пространства $H^{l+\alpha,(l+\alpha)/3}_{x,t}(\overline{\Omega}_T)$, которые строятся по аналогии с пространствами $H^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}_{x,t}(\overline{\Omega}_T)$ [7, с. 349]. Следуя работе [8], введем полунорму

$$[u]^{(\alpha,\beta)}_{\Omega_T} = \sup_{\substack{x,\,y\\ t,\,\tau}} \frac{|u(x,t)-u(y,t)-u(x,\tau)+u(y,\tau)|}{|x-y|^{\alpha}|t-\tau|^{\beta}}, \qquad \alpha,\ \beta\in(0,1),$$

и определим банаховы пространства $E^{l+\alpha,\alpha/3}(\overline{\Omega}_T)$, получающиеся замыканием бесконечно дифференцируемых функций в норме

$$\|u\|^{(l,\alpha/3)}_{\Omega_T} = \sum_{k=0}^{l} \|D_x^k u\|^{(\alpha,\alpha/3)}_{\Omega_T}, \qquad \|u\|^{(\alpha,\alpha/3)}_{\Omega_T} = |u|^{(\alpha)}_{\Omega_T} + [u]^{(\alpha,\alpha/3)}_{\Omega_T},$$

$$|u|^{(\alpha)}_{\Omega_T} = |u|^{(0)}_{\Omega_T} + \langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} + \langle u\rangle^{(\alpha/3)}_{t,\Omega_T}, \qquad |u|^{(0)}_{\Omega_T} = \sup_{\Omega_T}|u(x,t)|,$$

$$\langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} = \sup_{x,\,y,\,t}\frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{|x-y|^{\alpha}}, \qquad \langle u\rangle^{(\alpha/3)}_{t,\Omega_T} = \sup_{t,\,\tau,\,x}\frac{|u(x,t)-u(x,\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha/3}}.$$

Введем полунорму

$$|||u|||^{(4+\alpha)}_{\Omega_T} = |u_x|^{(3+\alpha)}_{\Omega_T} + \|u_t\|^{(1+\alpha,\alpha/3)}_{\Omega_T} + [D_x^3]^{(\alpha,\alpha/3)}_{\Omega_T},$$

где $|\cdot|^{(3+\alpha)}_{\Omega_T}$ — норма в пространстве $H^{3+\alpha,(3+\alpha)/3}_{\Omega_T}$. Отметим, что для функций, равных нулю при $t=0$, это есть норма. Путем замыкания бесконечно дифференцируемых функций получим пространство, которое обозначим через $P^{4+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$. Пространства $\overset{\circ}{E}{}^{l+\alpha,\alpha/3}(\overline{\Omega}_T)$, $\overset{\circ}{P}{}^{4+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$ обозначают подпространства функций соответствующих пространств, которые при $t=0$ обращаются в нуль вместе со своими допустимыми производными по t. Пусть функция $u(x,t)\in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ и, кроме того, существует обобщенная производная этой функции по t, причем

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = u_1(x,t) + \nabla_x \vec u_2(x,t),$$

где u_1, $\vec u_2 \in E^{\alpha,\alpha/3}$. Подпространство таких функций из $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ обозначим $\hat H^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ и введем в нем норму

$$|u|_{\hat H^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\overline{\Omega}_T)} = |u|^{(2+\alpha)}_{\Omega_T} + \inf_{u_1,\,\vec u_2}\left(\|u_1\|^{(\alpha,\alpha/3)}_{\Omega_T} + \|\vec u_2\|^{(\alpha,\alpha/3)}_{\Omega_T}\right).$$

Будем предполагать, что для задачи (1) выполняются следующие условия: $\Gamma\in H^{6+\alpha}$, $\Gamma^{\pm}\in H^{6+\alpha}$, $b^{\pm}(y,\tau)\in E^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma^{\pm}_T)$, $u_0^{\pm}(y)\in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega}^{\pm})$, $\Delta_y u_0^{\pm}(y) = 0$ и условия согласования до первого порядка включительно.

Теорема 1. *Пусть для задачи* (1) *выполнены указанные условия на данные задачи. Тогда при* $n = 2$ *найдется такое* $T_0 > 0$, *зависящее от этих данных, что при* $0 < T < T_0$ *существует решение* $u^{\pm}(y, \tau) \in E^{2+\alpha,\alpha/3}(\overline{\Omega}^{\pm}_{\rho,T})$, $\rho(\omega, \tau) \in P^{4+\alpha}(\Gamma_T)$. *При* $n = 3$ *это утверждение сохраняется при достаточной близости собственных чисел матрицы* $\{k_{ij}(\omega, 0, 0)\}$, *где* $k_{ij}(\omega, 0, 0)$ *определены в* (2).

2. Редукция исходной задачи к задаче в фиксированной области. Обозначим через $N = \{y \in \Omega\colon \operatorname{dist}(y, \Gamma) < \gamma_0\}$ окрестность поверхности Γ и введем координаты (ω, λ) в соответствии с равенством $y(\omega, \lambda) = y(\omega) + \lambda\bar{\nu}(\omega)$, $y(\omega) \in \Gamma$, $|\lambda| < \gamma_0$. Тогда в этих координатах $N = \{y(\omega, \lambda)\colon (\omega, \lambda) \in \Gamma \times \times(-\gamma_0, \gamma_0)\}$. Пусть $\chi(\lambda) \in C_0^{\infty}$ и равна единице при $\lambda = 0$. Определим взаимно однозначное отображение $e_\rho(x, t)$ области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ на себя следующим образом [6]:

$$e_\rho(x, t)\colon (x, t) \to (y, \tau) = \big(y(\omega(x), \lambda(x) + \chi(\lambda(x))\,\rho(\omega(x), t)), t\big),$$

где $(\omega(x), \lambda(x))$ — координаты точки $x \in N$. Отображение $e_\rho(x, t)$ переводит поверхность Γ_T в поверхность $\Gamma_{\rho,T}$ и оставляет на месте точки поверхностей $\Gamma_T^{\pm}$. Уравнение поверхности $\Gamma_{\rho,T}$ имеет вид $\Phi(y, \tau) = \lambda(y) - \rho(\omega, \tau) = 0$, и первое условие на свободной границе в (1) принимает вид

$$\kappa\frac{\partial\rho}{\partial t} = a^-(\nabla_\rho u^-, \nabla_\rho\Phi) - a^+(\nabla_\rho u^+, \nabla_\rho\Phi),$$

где функцию $u^{\pm}(y, \tau) \circ e_\rho(x, t)$ мы обозначили прежним символом $u^{\pm}$, $\nabla_\rho = (E_\rho^*)^{-1}\nabla_x$, $\nabla_x = \{\partial/\partial x_i\}$, $E_\rho^*(x, t)$ — матрица, сопряженная к матрице Якоби отображения $e_\rho(x, t)|_{t=\mathrm{const}}\colon x \to y$. Пользуясь тем, что $\Phi = 0$ на Γ_T, получаем

$$\kappa\frac{\partial\rho}{\partial t} = S(\omega, \rho, \rho_\omega)\left[a^-\frac{\partial u^-}{\partial\lambda} - a^+\frac{\partial u^+}{\partial\lambda}\right] + \sum_{k=1}^{n-1} S^{(k)}(\omega, \rho, \rho_\omega)\left[a^-\frac{\partial u^-}{\partial\omega_k} - a^+\frac{\partial u^+}{\partial\omega_k}\right],$$

где $S(\omega, \rho, \rho_\omega)$, $S^{(k)}(\omega, \rho, \rho_\omega)$ — некоторые гладкие функции [6] и такие, что $S(\omega, 0, 0) = 1$, $S_{\rho_\omega}(\omega, 0, 0) = 0$, $S^{(k)}(\omega, 0, 0) = 0$.

Поверхность $\Gamma_{\rho,T}$ зададим в виде $\bar{r}(\omega, t) = \bar{R}(\omega) + \bar{\nu}(\omega)\rho(\omega, t)$, где $\bar{R} = \bar{R}(\omega)$ — уравнение поверхности Γ. Средняя кривизна $\Gamma_{\rho,T}$ в сечении $t = \mathrm{const}$ вычисляется с помощью коэффициентов первой и второй квадратичной формы поверхности $\Gamma_{\rho,T}$ и для нее можно получить представление

$$k(y, t) = k(\omega, \rho, \rho_\omega, \rho_{\omega\omega}) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(\omega, \rho, \rho_\omega)\,\rho_{\omega_i\omega_j} + k_0(\omega, \rho, \rho_\omega), \tag{2}$$

где k_{ij}, k_0 — гладкие функции своих аргументов, причем можно полагать, что $\det\{k_{ij}(\omega, 0, 0)\} \geq \varepsilon_0 > 0$. Аналогичное представление для кривизны $\Gamma_{\rho,T}$ справедливо и в случае $n = 2$.

После указанной замены переменных задача (1) формулируется следующим образом. Требуется определить функции $u^{\pm}(x, t)$ и $\rho(\omega, t)$, определенные в $\Omega_T^{\pm}$ и на Γ_T соответственно, по условиям

$$-\nabla_\rho^2 u^{\pm} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T^{\pm};$$

$$\kappa \frac{\partial\rho}{\partial t} = S(\omega,\rho,\rho_\omega)\left[a^- \frac{\partial u^-}{\partial\lambda} - a^+ \frac{\partial u^+}{\partial\lambda}\right] + \sum_{k=1}^{n-1} S^{(k)}(\omega,\rho,\rho_\omega)\left[a^- \frac{\partial u^-}{\partial\omega_k} - a^+ \frac{\partial u^+}{\partial\omega_k}\right], \tag{3}$$

$$u^+ = u^- = \gamma \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}(\omega,\rho,\rho_\omega)\,\rho_{\omega_i\omega_j} + \gamma k_0(\omega,\rho,\rho_\omega), \quad (x,t) \in \Gamma_T;$$

$$u^{\pm} = b^{\pm}(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T^{\pm}; \quad u^{\pm}(x,0) = u_0^{\pm}(x), \quad \rho(\omega,0) = 0.$$

3. Сведение задачи со свободной границей к функциональному уравнению. Определим функции $s(\omega,t) \in H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\Gamma_T)$, $w^{\pm} \in H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\overline{\Omega_T^{\pm}})$ такие, что $w^+ = w^-$ на Γ_T, $w^{\pm}(x,0) = u_0^{\pm}(x)$, $s(\omega,0) = 0$, $s_t(\omega,0) = \rho_t(\omega,0)$, где $\rho_t(\omega,0)$ определяется из условий на $\Gamma_{\rho,T}$, т. е. фактически из условия согласования. Способ построения таких функций указан в [7] (гл. 4) и из него следует

$$|w^+|_{H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T^+)} + |w^-|_{H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T^-)} + |s|_{H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\Gamma_T)} \le$$
$$\le C(T)\left(|u_0^+|_{H^{4+\alpha}(\overline{\Omega}^+)} + |u_0^-|_{H^{4+\alpha}(\overline{\Omega}^-)}\right), \quad c(T) \le \text{const} \ \text{ при } T \to 0.$$

Вместо искомых функций в задаче (2) введем новые неизвестные $v^{\pm}(x,t) = u^{\pm}(x,t) - w^{\pm}(x,t)$, $\sigma(\omega,t) = \rho(\omega,t) - s(\omega,t)$, для которых задача (2) сведется к задаче с нулевыми начальными условиями. Наконец, сделаем еще одну замену неизвестных функций $\theta^{\pm}(x,t) = v^{\pm}(x,t) - (\nabla w^{\pm}, \delta e_\sigma)$, где $\delta e_\sigma(x,t) = \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial\lambda}(\omega,\lambda)\,\chi(\lambda)\,\sigma(\omega,t)$.

Определим операторы $L_0 = -\nabla^2$, $L_\rho = -\nabla_\rho^2$, которые связаны между собой соотношением $(L_0 u)\circ e_\rho = L_\rho(u \circ e_\rho)$. Можно проверить, что соотношения (3) можно записать в следующем виде (после выделения „старших" по норме линейных слагаемых):

$$L_0\theta^{\pm} = \mathcal{F}_0^{\pm}(v^{\pm},\sigma), \quad (x,t) \in \Omega_T^{\pm};$$

$$\kappa \frac{\partial\sigma}{\partial t} + a^+ \frac{\partial\theta^+}{\partial n} - a^- \frac{\partial\theta^-}{\partial n} = \mathcal{F}_1(v^+, v^-, \sigma), \tag{4}$$

$$\theta^{\pm} - \gamma \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{D(\omega)} \frac{\partial}{\partial\omega_i}\left(\mu_{ij}(\omega)\sigma_{\omega_j}\right) + \gamma \frac{\sigma(\omega)}{D(\omega)} =$$

$$= \gamma\,\mathcal{F}_3(\sigma) + \mathcal{F}_4^{\pm}(\sigma), \quad (x,t) \in \Gamma_T; \quad \theta^{\pm} = \mathcal{F}_2^{\pm}(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T^{\pm},$$

где

$$\mathcal{F}_0^{\pm}(v^{\pm},\sigma) = -\left[(L_0 w^{\pm})\circ e_\rho - (L_0 w^{\pm})\circ e_s\right] - L_s w^{\pm} -$$
$$- (L_\rho - L_0)(w^{\pm} - w^{\pm}\circ e_\rho) + (L_s - L_0)(w^{\pm} - w^{\pm}\circ e_s) -$$
$$- L_0\left[w^{\pm} + (\nabla w^{\pm}, \delta e_\rho) - w^{\pm}\circ e_\rho\right] +$$
$$+ L_0\left[w^{\pm} + (\nabla w^{\pm}, \delta e_s) - w^{\pm}\circ e_s\right] - (L_\rho - L_0)v^{\pm},$$

$$\mathcal{F}_1(v^+, v^-, \sigma) = -\kappa \frac{\partial s}{\partial t} + \left(a^- \frac{\partial w^-}{\partial n} - a^+ \frac{\partial w^+}{\partial n}\right) S(\omega, s, s_\omega) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} S^{(k)}(\omega, s, s_\omega)\left[a^- \frac{\partial w^-}{\partial \omega_k} - a^+ \frac{\partial w^+}{\partial \omega_k}\right] +$$

$$+\ (1 - S(\omega, \rho, \rho_\omega))\left(a^+ \frac{\partial v^+}{\partial n} - a^- \frac{\partial v^-}{\partial n}\right) -$$

$$-\left(a^+ \frac{\partial w^+}{\partial n} - a^- \frac{\partial w^-}{\partial n}\right)\left[S(\omega, \rho, \rho_\omega) - S(\omega, s, s_\omega) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial S}{\partial s_{\omega_i}}(\omega, s, s_\omega)\sigma_{\omega_i}\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\left(a^+ \frac{\partial w^+}{\partial \omega_k} - a^- \frac{\partial w^-}{\partial \omega_k}\right)\left[S^{(k)}(\omega, \rho, \rho_\omega) -\right.$$

$$\left.- S^{(k)}(\omega, s, s_\omega) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial S^{(k)}}{\partial s_{\omega_i}}(\omega, s, s_\omega)\sigma_{\omega_i}\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\left(a^+ \frac{\partial v^+}{\partial \omega_k} - a^- \frac{\partial v^-}{\partial \omega_k}\right) S^{(k)}(\omega, \rho, \rho_\omega) - \left(a^- \frac{\partial w^-}{\partial n} - a^+ \frac{\partial w^+}{\partial n}\right) -$$

$$-\left(a^+ \frac{\partial^2 w^+}{\partial n^2} - a^- \frac{\partial^2 w^-}{\partial n^2}\right)\sigma - \sum_{i=1}^{n-1} b_i(\omega, t)\,\sigma_{\omega_i},$$

$$b_i(\omega, t) = \left(a^+ \frac{\partial w^+}{\partial n} - a^- \frac{\partial w^-}{\partial n}\right)\frac{\partial S}{\partial s_{\omega_i}}(\omega, s, s_\omega) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left(a^+ \frac{\partial w^+}{\partial \omega_k} - a^- \frac{\partial w^-}{\partial \omega_k}\right)\frac{\partial S^{(k)}}{\partial s_{\omega_i}}(\omega, s, s_\omega),$$

$$\mathcal{F}_3(\sigma) = \sum_{i,j}\left[k_{ij}(\omega, \rho, \rho_\omega) - k_{ij}(\omega, s, s_\omega)\right]\sigma_{\omega_i\omega_j} + \sum_{i,j} k_{ij}(\omega, \rho, \rho_\omega)s_{\omega_i\omega_j} +$$

$$+\sum_{i,j}\left[k_{ij}(\omega, s, s_\omega) - k_{ij}(\omega, 0, 0)\right]\sigma_{\omega_i\omega_j}, \qquad \mu_{ij}(\omega) = D(\omega)k_{ij}(\omega, 0, 0),$$

$$\mathcal{F}_4^{\pm}(\sigma) = -w^{\pm} + \frac{\sigma(\omega)}{D(\omega)} - \frac{\partial w^{\pm}}{\partial n}\sigma(\omega) + \gamma k_0(\omega, \rho, \rho_\omega) + \gamma k_1(\omega, \rho, \rho_\omega),$$

$$k_1(\omega, \rho, \rho_\omega) = -\frac{1}{D(\omega)}\sum_{i,j} \rho_{\omega_j}\frac{\partial}{\partial \omega_i}k_{ij}(\omega, 0, 0), \qquad \mathcal{F}_2^{\pm} = b^{\pm}(x, t) - w^{\pm}(x, t),$$

$$D^2(\omega) = |R_{\omega_1}|^2\,|R_{\omega_2}|^2 - (R_{\omega_1}, R_{\omega_2})^2.$$

Введем пространства H_ψ и $H_{\mathcal{F}}$:

$$H_\psi = \underset{\circ}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\overline{\Omega}_T^+) \times \underset{\circ}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\overline{\Omega}_T^-) \times \underset{\circ}{P}^{4+\alpha}(\Gamma_T),$$

$$H_{\mathcal{F}} = \underset{\circ}{E}^{\alpha,\alpha/3}(\overline{\Omega}_T^+) \times \underset{\circ}{E}^{\alpha,\alpha/3}(\overline{\Omega}_T^-) \times \underset{\circ}{E}^{1+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T) \times \underset{\circ}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T^+) \times$$

$$\times \underset{\circ}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T^-) \times \underset{\circ}{\hat{H}}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\Gamma_T) \times \underset{\circ}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T) \times \underset{\circ}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T),$$

элементами которых есть $\psi = (\theta^+, \theta^-, \sigma)$, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0^+, \mathcal{F}_0^-, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2^+, \mathcal{F}_2^-, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4^+, \mathcal{F}_4^-)$ соответственно. Тогда соотношения (4) можно записать кратко в виде

$$A\psi = \mathcal{F}(\varphi), \qquad \varphi = (v^+, v^-, \sigma), \tag{5}$$

причем линейный оператор A определен левыми частями этих соотношений, а нелинейный оператор $\mathcal{F}(\varphi)$ — их правыми частями.

Пространства H_ψ и $H_{\mathcal{F}}$ выбраны таким образом, что оператор A ограничен из H_ψ в $H_{\mathcal{F}}$. В объяснении при этом нуждается лишь тот факт, что $f(\omega, t) \equiv \equiv (\mu_{ij}(\omega)\sigma_{\omega_j})_{\omega_i} \in \hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\Gamma_T)$. Ясно, что при $\sigma \in P^{4+\alpha}(\Gamma_T)$, $f(\omega, t) \in \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\Gamma_T)$, кроме того, $f_t = (\mu_{ij}(\omega)\sigma_{t\omega_j})_{\omega_i} = \operatorname{div}_\omega \bar{u}_2(\omega, t)$ и $\bar{u}_2(\omega, t) \in E^{\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T)$.

Наша цель состоит теперь в том, чтобы показать, что оператор A имеет ограниченный обратный.

4. Исследование модельной задачи сопряжения. Рассмотрим задачу, в которой требуется найти функции $u^\pm(z, t)$ и $\rho(z', t)$ по условиям

$$\begin{gathered} -\Delta u^\pm = f^\pm(z, t), \quad (z, t) \in R_T^\pm; \\ \kappa \frac{\partial \rho}{\partial t} + a^+ \frac{\partial u^+}{\partial z_n} - a^- \frac{\partial u^-}{\partial z_n} = f_1(z', t), \\ u^\pm - \gamma a_{ij} \rho_{z_i z_j} = \gamma f_3(z', t) + f_4^\pm(z', t), \qquad (z', t) \in R_T'; \\ u^\pm(z, 0) = 0, \quad \rho(z', 0) = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где $R_T^\pm = \{(z, t)\colon z = (z', z_n),\ z' \in R^{n-1},\ \pm z_n > 0,\ t \in (0, T)\}$, $R_T' = \partial R_T^\pm$, κ, γ, $a^\pm$ — положительные постоянные, матрица $\{a_{ij}\}$ положительно определена и удовлетворяет условию $\nu|\xi|^2 \le a_{ij}\xi_i\xi_j \le \nu^{-1}|\xi|^2$. В силу положительной определенности квадратичной формы, связанной с уравнением Лапласа, координаты z' можно выбрать таким образом, чтобы форма $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ свелась к диагональному виду, поэтому будем считать, что $a_{ij} = 0$ при $i \ne j$. Будем предполагать, что функции

$$f^\pm \in \underset{\circ}{E}^{\alpha,\alpha/3}(R_T^\pm), \qquad f_1 \in \underset{\circ}{E}^{1+\alpha,\alpha/3}(R_T'),$$
$$f_3 \in \underset{\circ}{\hat{H}}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(R_T'), \qquad f_4^\pm \in \underset{\circ}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(R_T')$$

и являются финитными, а также искать решение задачи сопряжения (5) в классах

$$u^\pm(z, t) \in \underset{\circ}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(R_T^\pm), \qquad \rho(z', t) \in \underset{\circ}{P}^{4+\alpha}(R_T').$$

Заметим также, что не ограничивая общности, в системе (6) можно положить $f^\pm = 0$, $f_4^\pm = 0$. Действительно, для этого достаточно убедиться в том, что решение задачи

$$\Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in R_T^+, \qquad f \in \underset{\circ}{E}^{\alpha,\alpha/3}(R_T^+),$$
$$u = \varphi(x, t), \qquad (x, t) \in R_T', \qquad \varphi \in \underset{\circ}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(R_T')$$

принадлежит пространству $E^{2+\alpha,\alpha/3}(R_T^+)$. Для этого дополнительно к известному факту $u \in C^{2+\alpha}(R_T^+)$ нужно оценить полунормы $\langle u\rangle_t^{(\alpha/3)}$, $[u]^{(\alpha,\alpha/3)}$ функции $u(x, t)$ и ее производных. Оценки указанных полунорм легко получить для объемного потенциала и потенциала двойного слоя через соответствующие полунормы плотностей этих потенциалов (см. ниже доказательство неравенства (25)), и, следовательно, эти оценки верны для решения указанной задачи.

Обозначим через $\tilde{f}(\lambda, z_n, p)$ преобразование Фурье по переменным z' и преобразование Лапласа по переменной t функции $f(z', z_n, t)$, т. е.

$$\tilde{f}(\lambda, z_n, p) = \int\limits_{R^{n-1}} dz' \int\limits_0^\infty f(z', z_n, t)\, e^{-i(z', \lambda) - pt}\, dt, \qquad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}).$$

После применения этого преобразования к соотношениям (6) получим

$$\lambda^2 \tilde{u}^\pm - \frac{\partial^2 \tilde{u}^\pm}{\partial z_n^2} = 0; \qquad \kappa p \tilde{\rho} + a^+ \frac{\partial \tilde{u}^+}{\partial z_n} - a^- \frac{\partial \tilde{u}^-}{\partial z_n} = \tilde{f}_1(\lambda, p),$$
$$\tilde{u}^\pm + \gamma \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} \lambda_i^2 \tilde{\rho} = \gamma \tilde{f}_3(\lambda, p). \tag{7}$$

Из первого соотношения в (7) имеем

$$\tilde{u}^\pm(\lambda, z_n, p) = M^\pm \exp(\mp |\lambda| z_n), \qquad |\lambda| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 \right)^{1/2},$$
$$\frac{\partial \tilde{u}^\pm}{\partial z_n}\Big|_{z_n = 0} = \mp M^\pm |\lambda|,$$

а из двух оставшихся —

$$M^\pm = \frac{\kappa p \tilde{\rho} - \tilde{f}_1}{|\lambda|(a^+ + a^-)},$$
$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{f}_1 + \gamma \tilde{f}_3 (a^+ + a^-)|\lambda|}{\kappa p + \gamma(a^+ + a^-)|\lambda|(a\lambda, \lambda)} = \frac{\tilde{F}(\lambda, p)}{\kappa p + b|\lambda|(a\lambda, \lambda)}, \tag{8}$$
$$b = \gamma(a^+ + a^-), \qquad (a\lambda, \lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} \lambda_i^2.$$

Теперь отдельно рассмотрим случаи $n = 2$ и $n = 3$.

В случае $n = 2$ из представления (8) следует, что функцию $\rho(z, t)$ можно представить в виде свертки

$$\rho(z, t) = \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(z - \zeta, t - \tau) F(\zeta, \tau)\, d\zeta, \tag{9}$$

где $F(x, t)$ — прообраз функции $\tilde{F}(\lambda, p)$, $K(x, t)$ — прообраз функции $\tilde{K}(\lambda, p) = (\kappa p + b a_{11} |\lambda|^3)^{-1}$. Ясно, что при изучении свойств гладкости функции $\rho(z, t)$ можно положить $\kappa = 1$, $b a_{11} = 1$. Тогда

$$K(x, t) = \int\limits_0^\infty e^{-t\lambda^3} \cos \lambda x\, d\lambda. \tag{10}$$

Получить удобное для дальнейших оценок выражение для интеграла в (10) не удается, хотя его и можно представить через цилиндрические функции $Z_{1/3}(x/t^{1/3})$. Однако, как оказалось, можно вполне обойтись знанием асимптотических свойств этого интеграла. Сделаем замену переменной $\lambda t^{1/3} = z$, тогда

$$K(x, t) = t^{-1/3} \int\limits_0^\infty e^{-z^3} \cos yz\, dz, \qquad y = x t^{-1/3}. \tag{11}$$

Производя несколько раз интегрирование по частям, получаем

$$K(x,t) = -\frac{1}{y^4 t^{1/3}}\left\{\frac{d^3}{dz^3}(e^{-z^3})\cos yz\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d^4}{dz^4}(e^{-z^3})\cos yz\,dz\right\},$$

откуда следует, что

$$K(x,t) = \frac{1}{t^{1/3}}\left[-\frac{6}{y^4} - o\left(\frac{1}{y^4}\right)\right] \quad \text{при} \quad |y|\to\infty. \tag{12}$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\begin{aligned} D_x^l K(x,t) &= c_1 t^{-(l+1)/3}\left(y^{-4-l} + o(y^{-4-l})\right), \quad l=0,1,\ldots, \quad y = xt^{-1/3},\\ D_x^l D_t K(x,t) &= c_2 t^{-(4+l)/3}\left(y^{-4-l} + o(y^{-4-l})\right), \quad l=0,1,\ldots,\\ D_t^{2m} K(x,t) &= c_3 t^{-(6m+1)/3}\left(y^{-4-6m} + o(y^{-4-6m})\right), \quad m=0,1,\ldots,\\ D_t^{2m+1} K(x,t) &= c_4 t^{-(6m+4)/3}\left(y^{-4-6m} + o(y^{-4-6m})\right), \quad m=0,1,\ldots, \end{aligned} \tag{13}$$

при $|y|\to\infty$, где постоянные зависят от l и m.

Пусть функция $f(x,t)\in \overset{\circ}{E}{}^{\alpha,\alpha/3}$ и является финитной. Изучим свойства потенциала

$$g(x,t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{14}$$

Пусть

$$g_h(x,t) = \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi,$$

тогда

$$\frac{\partial g_h}{\partial t}(x,t) = \int_{-\infty}^{t-h} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, h) f(\xi, t-h)\,d\xi.$$

Можно показать, используя (12), что

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, h) f(\xi,t)\,d\xi = f(x,t), \tag{15}$$

поэтому

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \lim_{h\to 0}\frac{\partial g_h}{\partial t} =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-\xi, t-\tau)[f(\xi,\tau) - f(x,\tau)]\,d\xi + f(x,t). \tag{16}$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(x,t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} D_x^3 K(x-\xi, t-\tau)[f(\xi,\tau) - f(x,\tau)]\,d\xi. \tag{17}$$

Из (17) следует представление

$$D_x^3 g(x,t) - D_{x'}^3 g(x',t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{|x-\xi|\le 2|x-x'|} D_x^3 K(x-\xi, t-\tau)[f(\xi,\tau) - f(x,\tau)]\, d\xi \; -$$

$$- \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{|x-\xi|\le 2|x-x'|} D_{x'}^3 K(x'-\xi, t-\tau)[f(\xi,\tau) - f(x',\tau)]\, d\xi \; +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{|x-\xi|> 2|x-x'|} [D_x^3 K(x-\xi, t-\tau) \; -$$

$$- D_{x'}^3 K(x'-\xi, t-\tau)][f(\xi,\tau) - f(x,\tau)]\, d\xi \; +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{|x-\xi|> 2|x-x'|} D_x^3 K(x-\xi, t-\tau)[f(x',\tau) - f(x,\tau)]\, d\xi \equiv \sum_{i=1}^{4} I_i . \quad (18)$$

Из (10) имеем

$$D_x^3 K(x-\xi, t-\tau) = \int_0^\infty \exp[-(t-\tau)\lambda^3]\lambda^3 \sin\lambda(x-\xi)\, d\lambda =$$

$$= (t-\tau)^{-4/3} \int_0^\infty \exp(-z^3) z^3 \sin yz\, dz, \qquad y = \frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/3}},$$

поэтому при $|(x-\xi)/(t-\tau)^{1/3}| \le 1$ справедлива оценка

$$|D_x^3 K(x-\xi, t-\tau)| \le \frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{5/3}} \int_0^\infty \exp(-z^3) z^4\, dz \le c\,\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{5/3}}, \quad (19)$$

а при $|(x-\xi)/(t-\tau)^{1/3}| > 1$ в соответствии с (13) получаем

$$|D_x^3 K(x-\xi, t-\tau)| \le \frac{c}{(t-\tau)^{4/3}|y|^7} = c\,\frac{t-\tau}{|x-\xi|^7}. \quad (20)$$

При оценке первого слагаемого в (18) мы разбиваем промежуток интегрирования по τ на интервал $(-\infty, t-|x-\xi|^3)$, где справедлива оценка (19), и интервал $(t-|x-\xi|^3, t)$, где мы использовали оценку (20). Таким образом, имеем

$$|I_1| \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} \int_{|x-\xi|\le 2|x-x'|} d\xi \left\{ \int_{-\infty}^{t-|x-\xi|^3} \frac{|x-\xi|^{1+\alpha}}{(t-\tau)^{5/3}}\, d\tau \; + \right.$$

$$\left. + \int_{t-|x-\xi|^3}^{t} \frac{(t-\tau)|x-\xi|^\alpha}{|x-\xi|^7}\, d\tau \right\} \le c\langle f\rangle_x^\alpha \int_{|x-\xi|\le 2|x-x'|} |x-\xi|^{\alpha-1}\, d\xi \le$$

$$\le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} |x-x'|^\alpha.$$

Второе слагаемое в (18) оценивается аналогично. При оценке третьего слагаемого воспользуемся теоремой о среднем и неравенствами

$$|D_x^4 K(x-\xi, t-\tau)| \le \begin{cases} c(t-\tau)^{-5/3} & \text{при } \tau \le t-|x-\xi|^3; \\ c\,\dfrac{t-\tau}{|x-\xi|^8} & \text{при } \tau > t-|x-\xi|^3, \end{cases}$$

откуда

$$|I_3| \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} |x-x'|^\alpha.$$

В силу четности функции $D_x^2 K(x,t)$ имеем $I_4 = 0$, откуда следует

$$\langle D_x^3 g(x,t)\rangle_x^{(\alpha)} \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)}. \tag{21}$$

Оценим теперь константу Гельдера функции $D_x^3 g(x,t)$ по переменной t. Из (16) при $t' < t$ имеем

$$D_x^3 g(x,t) - D_x^3 g(x,t') =$$

$$= \int_{2t'-t}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} D_x^3 K(x-\xi, t-\tau)[f(\xi,\tau) - f(x,\tau)]\, d\xi -$$

$$- \int_{2t'-t}^{t'} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} D_x^3 K(x-\xi, t'-\tau)[f(\xi,\tau) - f(x,\tau)]\, d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^{2t'-t} d\tau \int_{-\infty}^{t} [D_x^3 K(x-\xi, t-\tau) - D_x^3 K(x-\xi, t'-\tau)][f(\xi,\tau) - f(x,\tau)]\, d\xi \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{3} I_i. \tag{22}$$

Первые два слагаемых оцениваются подобным образом. Например,

$$|I_1| \le \langle f\rangle_x^{(\alpha)} \int_{2t'-t}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x-\xi|^\alpha}{(t-\tau)^{4/3}} \left| \int_0^\infty \exp(-z^3) z^3 \sin\frac{(x-\xi)z}{(t-\tau)^{1/3}}\, dt \right| d\xi =$$

$$= \langle f\rangle_x^{(\alpha)} \int_{2t'-t}^{t} d\tau\, (t-\tau)^{-1+\alpha/3} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |y|^\alpha \left| \int_0^\infty \exp(-z^3) z^3 \sin yz\, dz \right| dy \right] \le$$

$$\le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} (t-t')^{\alpha/3},$$

поскольку выражение в квадратных скобках ограничено в силу асимптотических свойств внутреннего интеграла при $y \to \infty$. При оценке третьего слагаемого в (22) воспользуемся теоремой о среднем и асимптотикой функции $D_t D_x^3 K(x,t)$. Получим

$$|I_3| \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} (t-t')^{\alpha/3}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\langle D_x^3 g(x,t)\rangle_t^{(\alpha/3)} \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)}. \tag{23}$$

Оценим полунорму $[D_x^3 g(x,t)]^{(\alpha,\alpha/3)}$. Поскольку мы можем считать, что функции $f(x,t)$, $K(x,t)$ продолжены нулем в область $t < 0$, то имеем такое представление:

$$D_x^3 g(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} D_x^3 K(x-\xi,\tau)[f(\xi, t-\tau) - f(x, t-\tau)]\, d\xi.$$

Пусть $\Delta t > 0$ и

$$F(x,t) = \frac{D_x^3 g(x,t) - D_x^3 g(x, t-\Delta t)}{(\Delta t)^{\alpha/3}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} D_x^3 K(x-\xi, t-\tau)[\varphi(\xi,\tau) - \varphi(x,\tau)]\, d\xi,$$

где $\varphi(x,t) = |f(x,t) - f(x,t-\Delta t)| / (\Delta t)^{\alpha/3}$. Из (21) следует оценка

$$\langle F(x,t)\rangle_t^{(\alpha)} \le c\langle \varphi(x,t)\rangle_x^{(\alpha)}.$$

С другой стороны,

$$\langle \varphi\rangle_x^{(\alpha)} = \sup_{x,y} \frac{|\varphi(x,t) - \varphi(y,t)|}{|x-y|^{\alpha}} =$$

$$= \sup_{x,y} \frac{|f(x,t) - f(y,t) - f(x,t-\Delta t) + f(y,t-\Delta t)|}{|x-y|^{\alpha}(\Delta t)^{\alpha/3}} \le [f]^{(\alpha,\alpha/3)}.$$

Следовательно,

$$[D_x^3 g(x,t)]^{(\alpha,\alpha/3)} \le c[f]^{(\alpha,\alpha/3)}. \tag{24}$$

При оценке константы Гельдера $\langle D_t g(x,t)\rangle_x^{(\alpha)}$ снова используется представление вида (18) и рассуждения, подобные приведенным выше, с использованием равенства

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\infty} \exp(-\lambda^3 t)\lambda^2 \sin\lambda x\, d\lambda$$

при оценке слагаемого вида I_4 и асимптотического разложения

$$\int_0^{\infty} \exp(-z^3) z^2 \sin yz\, dz = c\,(y^{-3} + o(y^{-3})) \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

Отсюда имеем

$$\langle D_t g(x,t)\rangle_x^{(\alpha)} \le c\langle f\rangle_x^{(\alpha)}. \tag{25}$$

Использование представления вида (22) легко приводит к оценке

$$\langle D_t g(x,t)\rangle_t^{(\alpha/3)} \le c\,[\langle f\rangle_x^{(\alpha)} + \langle f\rangle_t^{(\alpha/3)}]. \tag{26}$$

Переходя к случаю $n = 3$, рассмотрим вначале частный случай $a_{11} = a_{22}$ в (8). Тогда ядро $K(x_1, x_2, t)$ в (9) будет иметь представление (снова без ограничения общности полагаем $\kappa = b a_{11} = 1$)

$$K(x_1,x_2,t) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^{3/2} t} \cos x_1\lambda_1 \cos x_2\lambda_2\, d\lambda_1\, d\lambda_2 =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t|\lambda|^3} |\lambda|\, d|\lambda| \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x_1|\lambda|\cos\varphi)\cos(x_2|\lambda|\sin\varphi)\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-t|\lambda|^3}|\lambda|\, d|\lambda| \int_0^{\pi} \cos(|\lambda| r\cos\varphi)\, d\varphi = 2\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\infty} e^{-t\lambda^3}\lambda J_0(\lambda r)\, d\lambda, \tag{27}$$

где мы положили $x_1 = r\cos\psi$, $x_2 = r\sin\psi$, $\lambda_1 = |\lambda|\cos\varphi$, $\lambda_2 = |\lambda|\sin\varphi$ и воспользовались интегральным представлением функции $J_0(x)$. Для функции

$$K_1(r,t) = \int_0^{\infty} e^{-t\lambda^3}\lambda J_0(\lambda r)\, d\lambda = t^{-2/3}\int_0^{\infty} e^{-z^3} z J_0(zy)\, dz, \qquad y = \frac{r}{t^{1/3}}, \tag{28}$$

и ее производных асимптотические свойства следуют из асимптотического разложения [9, с. 248]

$$\int_0^\infty e^{-z^3} z^{\gamma+1} J_\nu(zy)\,dz \sim y^{-\gamma-2} \sum_{n=0}^\infty c_n y^{-n}, \quad y \to \infty, \quad \nu > -1. \tag{29}$$

Например, с использованием равенства

$$\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial x} = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$$

на основании (29) имеем асимптотическое разложение

$$\frac{\partial^3 K(x,t)}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k} \sim \sum_{l=3}^{5} c_l r^{5-l} t^{-l/3} [y^{-l} + o(y^{-l})] \quad \text{при} \quad y \to \infty,$$

так что, почти дословно повторяя выкладки, приведенные для случая $n = 2$, получаем неравенства (21), (23)–(26) и в случае $n = 3$ с ядром $K(x_1, x_2, t)$ из (27).

Как следствие неравенств (21), (23)–(26) в случае $n = 2$ и в случае $n = 3$ при $a_{11} = a_{22}$ получаем, что при $f_1 \in \underset{\circ}{E}^{1+\alpha,\alpha/3}$, $f_3 \in \underset{\circ}{\hat{H}}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ функция $\rho(z',t) \in \underset{\circ}{P}^{4+\alpha}(R'_T)$, $u^\pm(z,t) \in \underset{\circ}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(R_T^\pm)$.

Лемма 1. *При* $n = 2$ *задача* (6) *имеет единственное решение и выполняется неравенство*

$$\|u^+\|_{R_T^+}^{(2+\alpha,\alpha/3)} + \|u^-\|_{R_T^-}^{(2+\alpha,\alpha/3)} + |||\rho|||_{R'_T}^{(4+\alpha)} \le$$

$$\le c\,(\|f^+\|_{R_T^+}^{(\alpha,\alpha/3)} + \|f^-\|_{R_T^-}^{(\alpha,\alpha/3)} + \|f_1\|_{R'_T}^{(1+\alpha,\alpha/3)} + |f_3|_{\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}} +$$

$$+ \|f_4^+\|_{R'_T}^{(2+\alpha,\alpha/3)} + \|f_4^-\|_{R'_T}^{(2+\alpha,\alpha/3)}). \tag{30}$$

При $n = 3$ и $a_{11} \ne a_{22}$ соотношение, определяющее $\tilde{\rho}$ в (8), перепишем в виде

$$\left[1 + \frac{b a_{11}(a_{22}/a_{11} - 1)\lambda_2^2|\lambda|}{\kappa p + b a_{11}|\lambda|^3}\right]\tilde{\rho} = \frac{\tilde{F}(\lambda, p)}{\kappa p + b a_{11}|\lambda|^3}. \tag{31}$$

Применяя обратные преобразования Фурье и Лапласа к равенству (31), для нахождения $\rho(z',t) \in \underset{\circ}{P}^{4+\alpha}(R'_T)$ получаем функциональное уравнение

$$\begin{gathered}(I + \alpha B)\rho = \Phi(x,t), \qquad \Phi(x,t) \in \underset{\circ}{P}^{4+\alpha}(R'_T), \\ B: \underset{\circ}{P}^{4+\alpha}(R'_T) \to \underset{\circ}{P}^{4+\alpha}(R'_T),\end{gathered} \tag{32}$$

причем α достаточно мало при a_{22}/a_{11} близком к единице. Тогда, как известно, уравнение (33) имеет единственное решение в указанном классе.

Лемма 2. *При* $n = 3$ *и достаточно малом* $a_{22} - a_{11}$ *задача* (6) *имеет единственное решение и выполняется неравенство* (30).

5. Исследование линейной задачи. Для доказательства обратимости оператора A, определенного в (5), рассмотрим систему (4) с фиксированными правыми частями

$$-\Delta u^\pm = F_0^\pm(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T^\pm;$$

$$\kappa \frac{\partial \sigma}{\partial t} + a^+ \frac{\partial u^+}{\partial n} - a^- \frac{\partial u^-}{\partial n} = F_1(x,t),$$

$$u^{\pm} - \gamma \sum_{i,j} \frac{1}{D(\omega)} \frac{\partial}{\partial \omega_i} (\mu_{ij}(\omega) \sigma_{\omega_j}) + \gamma \frac{\sigma(\omega)}{D(\omega)} =$$

$$= \gamma F_3(x,t) + F_4^{\pm}(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T;$$

$$u^{\pm} = F_2^{\pm}(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T^{\pm}; \quad u^{\pm}(x,0) = 0, \quad \sigma(\omega,0) = 0; \tag{33}$$

$$F_0^{\pm} \in \underset{\circ}{E}^{\alpha,\alpha/3}(\overline{\Omega}_T^{\pm}), \quad F_1 \in \underset{\circ}{E}^{1+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T), \quad F_2^{\pm} \in \underset{\circ}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T^{\pm}),$$

$$F_3 \in \underset{\circ}{\hat{H}}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}(\Gamma_T), \quad F_4^{\pm} \in \underset{\circ}{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_T).$$

Как и при исследовании модельной задачи, без ограничения общности можно считать, что $F_0^{\pm} = 0$, $F_4^{\pm} = 0$, $F_2^{\pm} = 0$. Для существования оператора A^{-1} и его ограниченности нужно выяснить вопрос о безусловной разрешимости системы (33) и получить оценку ее решения. Чтобы доказать разрешимость системы (33), заметим, что коэффициенты системы не зависят от t. После преобразования Лапласа по t получим

$$\Delta \hat{u}^{\pm} = 0, \quad x \in \Omega^{\pm}; \quad \hat{u}^{\pm} = 0, \quad x \in \Gamma^{\pm};$$

$$\kappa p + a^{+} \frac{\partial \hat{u}^{+}}{\partial n} - a^{-} \frac{\partial \hat{u}^{-}}{\partial n} = \hat{F}_1(x,p), \tag{34}$$

$$\hat{u}^{\pm} - \gamma \sum_{i,j} \frac{1}{D(\omega)} \frac{\partial}{\partial \omega_i} (\mu_{ij}(\omega) \hat{\sigma}_{\omega_j}) + \gamma \frac{\hat{\sigma}}{D(\omega)} = \gamma \hat{F}_3(x,p), \quad x \in \Gamma.$$

Вначале покажем, что при $\operatorname{Re} p \geq 0$ однородная задача (34) имеет только тривиальное решение. Из формулы Грина с учетом граничных условий на $\Gamma^{\pm}$ имеем

$$\int_{\Omega^{\pm}} |\nabla \hat{u}^{\pm}|^2 dx = \mp \int_{\Gamma} \hat{u}^{\pm} \frac{\partial \hat{u}^{\pm}}{\partial n} ds,$$

откуда с учетом равенства $\hat{u}^{+} = \hat{u}^{-}$ на Γ

$$a^{+} \int_{\Omega^{+}} |\nabla \hat{u}^{+}|^2 dx + a^{-} \int_{\Omega^{-}} |\nabla \hat{u}^{-}|^2 dx =$$

$$= \gamma\kappa p \int_{\Gamma} \hat{\sigma} \left[\frac{1}{D(\omega)} \frac{\partial}{\partial \omega_i} (\mu_{ij} \hat{\sigma}_{\omega_j}) - \frac{\hat{\sigma}}{D(\omega)} \right] ds = -\gamma\kappa p \int_{\omega} (\mu_{ij} \hat{\sigma}_{\omega_i} \hat{\sigma}_{\omega_j} + \hat{\sigma}^2) \, d\omega.$$

Напомним, что $\mu_{ij}(\omega)$ — положительно определенная матрица, поэтому снова с учетом граничных условий на $\Gamma^{\pm}$ заключаем, что при $\operatorname{Re} p \geq 0$ последнее равенство возможно только лишь при $\hat{u}^{\pm} = 0$, $\hat{\sigma} = 0$.

Задача сопряжения при заданной функции $\hat{\sigma}(\omega, p)$

$$\Delta u^{\pm} = 0, \quad x \in \Omega^{\pm};$$

$$a^{+} \frac{\partial \hat{u}^{+}}{\partial n} - a^{-} \frac{\partial \hat{u}^{-}}{\partial n} = -\kappa p \hat{\sigma} + \hat{F}_1(x,p) \equiv \hat{f}_1(x,p), \tag{35}$$

$$\hat{u}^{+} = \hat{u}^{-}, \quad x \in \Gamma; \quad \hat{u}^{\pm}|_{\Gamma^{\pm}} = 0$$

имеет единственное решение. В частном случае $a^{+} = a^{-} = 1$ решением задачи (35) является функция

$$\hat{u}(x, p) = \int_{\Gamma} \hat{f}_1(y, p) G(x, y) ds_y,$$

где $G(x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле в области $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$. В общем случае существует оператор $G^{\pm}$ такой, что $\hat{u}^{\pm} \in G^{\pm} \hat{f}_1$, $G^{\pm}: H^{l+\alpha}(\Gamma) \to \to H^{l+\alpha+1}(\Omega^+)$, l — любое целое число. Обозначим

$$K\hat{\sigma} = \frac{1}{D(\omega)} \frac{\partial}{\partial \omega_i}\left(\mu_{ij} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \omega_i}\right) - \frac{\hat{\sigma}}{D(\omega)}.$$

Тогда из предыдущего получим, например,

$$\gamma K \hat{\sigma} = \hat{u}^+ - \gamma \hat{F}_3(x, p) = -\kappa p G^+ \hat{\sigma} + G^+ \hat{F}_1 - \gamma \hat{F}_3(x, p).$$

Пусть K^{-1} — оператор, обратный к оператору K. Тогда последнее равенство запишем в виде

$$\gamma \hat{\sigma} = -\kappa p K^{-1} G^+ \hat{\sigma} + K^{-1} G^+ \hat{F}_1 - \gamma K^{-1} \hat{F}_3 \tag{36}$$

и будем рассматривать как уравнение для нахождения функции $\hat{\sigma}(\omega, p)$. Оператор $K^{-1} G^+$ является вполне непрерывным в пространствах Гельдера, и по доказанному выше при $\operatorname{Re} p \geq 0$ уравнение (36) имеет только тривиальное решение. Отсюда следует разрешимость этого уравнения.

Лемма 3. *Задача* (33) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$\|(u^+, u^-, \sigma)\|_{\mathcal{H}_\psi} \leq c \|(F_0^+, F_0^-, F_1, F_2^+, F_2^-, F_3, F_4^+, F_4^-)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{F}}}. \tag{37}$$

Доказательство оценки (37), по сути, повторяет доказательство априорной оценки Шаудера для эллиптических уравнений [10]. Пусть $\eta(x) \in C^\infty(R^n)$ с носителем в шаре $B_r(x_0)$ и $u^{\pm}(x, t)$, $\sigma(\omega, t)$ — решение задачи (33), для которого имеют смысл нормы в левой части неравенства (37). Умножая соотношения в (33) на $\eta(x)$, получаем соотношения на функции $v^{\pm}(x, t) = u^{\pm}(x, t)\eta(x)$, $s(\omega, t) = \sigma(\omega, t)\eta(x)$. Относительно функций $v^{\pm}(x, t)$, $s(\omega, t)$ получим систему вида (33), коэффициенты которой получаются из коэффициентов системы (33) „замораживанием" их значений в точке x_0; при этом младшие в дифференциальном отношении члены переносятся в правую часть. Далее нужно рассмотреть два случая: $x_0 \in \Omega^+ \cup \Omega^-$ и $x_0 \in \Gamma \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$. В случае $x_0 \in \Omega^+ \cup \cup \Omega^-$ достаточно знать оценки объемных потенциалов в $E^{2+\alpha, \alpha/3}$ с плотностью из пространства $E^{\alpha, \alpha/3}$, которые получаются достаточно просто, если следовать оценкам таких потенциалов в пространствах $C^{l+\alpha}$ [10]. При $x_0 \in \in \Gamma \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ нужно вначале в полученных соотношениях перейти к местной системе координат, а затем к системе координат, в которой распрямляется граница. При этом при $x_0 \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ для получения нужных оценок потребуется знание оценок в пространстве $E^{2+\alpha, \alpha/3}$ потенциалов двойного слоя с плотностью из $E^{2+\alpha, \alpha/3}$, которые также нетрудно получить. Наконец, при $x_0 \in \Gamma$ для функций $u^{\pm}(z, t) = u^{\pm}(y(z), t) = u^{\pm}(y, t) = v^{\pm}(x(y), t) = v^{\pm}(x, t)$, $\rho(z', t) = s(\omega, t)$, где z — координаты, в которых распрямляется граница, y — местные координаты (при этом можно считать, что $(z', z_n) = (\omega, z_n)$), получим задачу (6) с правыми частями $f_i = F_i \eta + \bar{f}_i$, где, например,

$$f_3(z',t) = F_3\eta + \sum_{i,j} \sigma_{\omega_i}\eta \frac{\partial \mu_{ij}(\omega)}{\partial \omega_j} - 2\sum_{i,j} k_{ij}(\omega)\sigma_{\omega_i}\eta_{\omega_j} + \\ + \sum_{i,j}(k_{ij}(\omega) - k_{ij}(\omega_0))s_{\omega_i\omega_j} \equiv F_3\eta + \bar{f}_3(z',t); \tag{38}$$

при этом некоторые „младшие" члены мы отнесли к $\bar{f}_4^{\pm}(z',t)$. Для получения априорной оценки в этом случае воспользуемся леммой 1 или 2 и оценим дополнительные слагаемые в правых частях вида $\bar{f}_i(z,t)$. Будем при этом пользоваться следующими неравенствами. Для функций с носителями в шаре $B_r(x_0)$ выполняются неравенства

$$\langle u\rangle_t^{(\alpha/3)} \le 3^{\alpha} r^{\alpha} [u]^{(\alpha,\alpha/3)}, \tag{39}$$

$$[u]^{(\alpha,\alpha/3)} \le r^{1-\alpha}\langle u_x\rangle_t^{(\alpha/3)}. \tag{40}$$

Далее, для функций, обращающихся в нуль при $t=0$, имеем

$$\langle u\rangle_x^{(\alpha)} \le T^{\alpha/3}[u]^{(\alpha,\alpha/3)}. \tag{41}$$

Легко проверяется, что

$$[uv]^{(\alpha,\beta)} \le [u]^{(\alpha,\beta)}|v|^{(0)} + \langle \dot{u}\rangle_x^{(\alpha)}\langle v\rangle_t^{(\beta)} + \langle u\rangle_t^{(\beta)}\langle v\rangle_x^{(\alpha)} + |u|^{(0)}[v]^{(\alpha,\beta)}, \tag{42}$$

и для каждого $\varepsilon > 0$

$$[u]^{(\alpha,\beta)} \le \varepsilon\langle u_x\rangle_t^{(\beta)} + c_\varepsilon\langle u\rangle_t^{(\beta)}. \tag{43}$$

При $u \in \underset{\circ}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/3}$ выполняется неравенство

$$[u]^{(\alpha,\alpha/3)} \le T^{(1-\alpha)/3}|u|^{(1+\alpha)}. \tag{44}$$

Для $u \in H^{l',l'/3}$ имеем

$$|u|^{(l)} \le c\,T^{(l'-l)/3}|u|^{(l')}, \quad l' > l. \tag{45}$$

Приведем, например, оценку одного из слагаемых в (38):

$$\bar{f}_{31} \equiv \sum_{i,j}(k_{ij}(\omega) - k_{ij}(\omega_0))s_{\omega_i\omega_j} \tag{46}$$

в норме $\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$. Обозначим одно из слагаемых в сумме (46) через $\varphi(\omega)$, которое несколько условно запишем так: $\varphi(\omega) = (k(\omega) - k(\omega_0))s_{\omega\omega}$. Имеем $\varphi_t(\omega) = (k(\omega) - k(\omega_0))s_{t\omega\omega} = \dfrac{\partial}{\partial\omega}u_2 + u_1$, где $u_1 = s_t k_{\omega\omega}$, $u_2 = (k(\omega) - k(\omega_0))s_{\omega t} - s_t k_\omega$. По определению пространства $\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}$ имеем

$$|\varphi|_{\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}} \le |\varphi|^{(2+\alpha)} + \|u_1\|^{(\alpha,\alpha/3)} + \|u_2\|^{(\alpha,\alpha/3)}.$$

Используя неравенства вида $\langle uv\rangle_x^{(\alpha)} \le |u|^{(0)}\langle v\rangle_x^{(\alpha)} + |v|^{(0)}\langle u\rangle_x^{(\alpha)}$, получаем

$$\langle (k(\omega) - k(\omega_0)D_\omega^4 s\rangle_\omega^{(\alpha)} \le |k(\omega) - k(\omega_0)|^{(0)}\langle D_\omega^4 s\rangle_\omega^{(\alpha)} + \\ + |D_\omega^4 s|^{(0)}\langle k(\omega)\rangle_\omega^{(\alpha)} \le \frac{1}{2}|||s|||^{(4+\alpha)} + cT^{\alpha/3}|||s|||^{(4+\alpha)},$$

причем множитель $1/2$ появляется за счет выбора размера носителя функции $\eta(x)$ и непрерывности функции $k(\omega)$. Далее, аналогично имеем

$$\langle (k(\omega) - k(\omega_0) D^4_\omega s\rangle_t^{(\alpha/3)} \le |k(\omega) - k(\omega_0)|^{(0)} \langle D^4_\omega s\rangle_t^{(\alpha/3)} \le \frac{1}{2} |||s|||^{(4+\alpha)}.$$

По определению

$$\| s_t \|^{(\alpha, \alpha/3)} = | s_t |^{(0)} + \langle s_t \rangle_\omega^{(\alpha)} + \langle s_t \rangle_t^{(\alpha/3)} + [s_t]^{(\alpha, \alpha/3)}.$$

Последовательно применяя неравенства (41), (39) и (44), находим

$$\| s_t \|^{(\alpha, \alpha/3)} \le T^{\alpha/3} [s_t]^{(\alpha, \alpha/3)} + 3^\alpha r^\alpha [s_t]^{(\alpha, \alpha/3)} + \varepsilon \langle s_{\omega t} \rangle_t^{(\alpha/3)} + c_\varepsilon \langle s_t \rangle_t^{(\alpha/3)},$$

причем последнее слагаемое в этой сумме оцениваем снова по неравенству (39). В результате имеем

$$\| s_t \|^{(\alpha, \alpha/3)} \le g(r, T) ||| s |||^{(4+\alpha)},$$

где $g(r, T) \to 0$ при $r, T \to 0$. Аналогично с использованием неравенства (42) можно получить оценку

$$\| s_t k_{\omega\omega}(\omega) \|^{(\alpha, \alpha/3)} \le g(r, T) ||| s |||^{(4+\alpha)}.$$

Подобные рассуждения применяем для оценки $\| s_t k_\omega \|^{(\alpha, \alpha/3)}$ и $\| (k(\omega) - k(\omega_0)) s_{\omega t} \|^{(\alpha, \alpha/3)}$. Следовательно,

$$|\varphi|_{\hat{H}^{2+\alpha, (2+\alpha)/3}} \le g(r, T) ||| s |||^{(4+\alpha)}$$

и отсюда

$$|\bar{f}_{31}|_{\hat{H}^{2+\alpha, (2+\alpha)/3}} \le g(r, T) ||| s |||^{(4+\alpha)}.$$

Аналогичные рассуждения применимы для остальных членов в $\bar{f}_3(z', t)$, так что

$$|f_3|_{\hat{H}^{2+\alpha, (2+\alpha)/3}} \le c |F_3|_{\hat{H}^{2+\alpha, (2+\alpha)/3}} + g(r, T) ||| s |||^{(4+\alpha)}.$$

Неравенства (39)–(45) позволяют подобным образом оценить функции f_i в задаче (6) и тем самым доказать неравенство (37) для достаточно малых T. Эти рассуждения можно повторить и за конечное число шагов получить оценку (37) для любого T.

6. Доказательство теоремы существования решения. Пусть $B_r(\psi) = \{ \psi \in \mathcal{H}_\psi : \| \psi \|_{\mathcal{H}_\psi} \le r \}$, $r \le r_0 < \infty$, — шар в пространстве $\mathcal{H}_\psi$ с центром в нуле.

Лемма 4. *Для правых частей задачи* (4) *справедливы неравенства*

$$\| \mathcal{F}(\varphi_2) - \mathcal{F}(\varphi_1) \|_{\mathcal{H}_\psi} \le c(T) (\delta(r) + T^{\alpha/3}) \| \varphi_2 - \varphi_1 \|_{\mathcal{H}_\psi},$$
$$\| \mathcal{F}(0) \|_{\mathcal{H}_\psi} \le c(T) T^{\alpha/3}, \quad \varphi_2, \varphi_1 \in B_r, \tag{47}$$

$\delta(r) \to 0$ *при* $r \to 0$, $c(T)$ *ограничена при* $T \to 0$.

Полное доказательство леммы громоздко, поэтому ограничимся рассмотрением одного примера. Оценки (47), по существу, являются следствием того факта, что правые части в (4) содержат члены, младшие по отношению к норме $\mathcal{H}_\psi$, и члены, содержащие произведения компонент $\varphi = (v^+, v^-, \sigma)$. Рассмотрим одно из слагаемых в $\mathcal{F}_3(\sigma)$, например

$$f_k = [k_{ij}^{(k)}(\omega, \rho_k, \rho_{k\omega}) - k_{ij}(\omega, s, s_\omega)] \sigma_{k\omega_i\omega_j}, \quad k = 1, 2.$$

Имеем

$$f_2 - f_1 = (k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)})\,\sigma_{2\omega_i\omega_j} + (k_{ij}^{(1)} - k_{ij})(\sigma_{2\omega_i\omega_j} - \sigma_{1\omega_i\omega_j}) \equiv I_1 + I_2,$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = \left\{\sigma_{2\omega_i\omega_j}\frac{\partial}{\partial t}[k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}] - \sigma_{2\omega_j}\frac{\partial}{\partial\omega_i}[k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}]\right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\omega_i}\left\{[k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}]\,\sigma_{2\omega_j t}\right\} \equiv u_1(\omega, t) + \frac{\partial}{\partial\omega_i}u_{2i}(\omega, t).$$

Используя гладкость функций $k_{ij}(\omega, \rho, \rho_\omega)$ по своим аргументам, получаем оценки

$$\| u_1 \|^{(\alpha,\alpha/3)} \le c\,|||\sigma_2|||^{(4+\alpha)}\,\|k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}\|^{(\alpha,\alpha/3)} \le c r\,|||\sigma_2 - \sigma_1|||^{(4+\alpha)},$$

$$\| u_{2i} \|^{(\alpha,\alpha/3)} \le c\,|||\sigma_2|||^{(4+\alpha)}\,\|k_{ij}^{(2)} - k_{ij}^{(1)}\|^{(\alpha,\alpha/3)} \le c r\,|||\sigma_2 - \sigma_1|||^{(4+\alpha)},$$

$$| I_1 |^{(2+\alpha)} \le c\,T^{\alpha/3}\,|||\sigma_2 - \sigma_1|||^{(4+\alpha)}.$$

Из аналогичных оценок для $I_2(\omega, t)$ следует

$$|f_2 - f_1|_{\hat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/3}} \le c\,(r + T^{\alpha/3})\,|||\sigma_2 - \sigma_1|||^{(4+\alpha)}.$$

На этом мы заканчиваем обсуждение леммы 4.

Рассмотрим теперь оператор $g_2 : (\theta^+, \theta^-, \sigma) \to (v^+, v^-, \sigma)$ в пространстве $\mathcal{H}_\psi$, который является ограниченным в силу определения функций $\theta^\pm(x, t)$. Далее на шаре $B_r(\psi)$ рассмотрим оператор $g = g_2 \circ g_1$, где $g_1 : B_r \to \mathcal{H}_\psi$ каждому $\varphi = (v^+, v^-, \sigma)$ ставит в соответствие элемент $\psi = (\theta^+, \theta^-, \sigma)$ — решение задачи (4), существование и единственность которого доказаны в лемме 3. Нетрудно видеть, что неподвижная точка оператора g есть решение задачи (4) и тем самым исходной задачи. Из лемм 3 и 4 следует

$$\| g(\varphi_1) - g(\varphi_2) \|_{\mathcal{H}_\psi} \le \delta(r, T)\,\| \varphi_1 - \varphi_2 \|_{\mathcal{H}_\psi},$$
$$\| g(0) \|_{\mathcal{H}_\psi} \le c(T)\,T^{\alpha/3}, \qquad \delta(r, T) \to 0 \ \text{ при } \ r, T \to 0. \tag{48}$$

Неравенства (48) обеспечивают сжимаемость оператора g и отображение им шара B_r в себя. Теперь утверждение теоремы 1 следует из принципа сжимающих отображений.

1. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, № 5. – С. 133–185.
2. *Базалий Б. В., Дегтярев С. П.* О задаче Стефана с кинетическим и классическим условием на свободной границе // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 2. – С. 155–166.
3. *Базалий Б. В., Дегтярев С. П.* Разрешимость задачи с неизвестной границей между областями определения параболического и эллиптического уравнений // Там же. – 1989. – **41**, № 10. – С. 1343–1349.
4. *Chen X.* The Hele–Shaw problem and area-preserving curve — shortening motions // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1993. – **123**. – P. 117–151.
5. *Гусаков В. Н., Дегтярев С. П.* Существование гладкого решения в одной задаче фильтрации // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 9. – С. 1192–1198.
6. *Hanzawa E. I.* Classical solutions of the Stefan problem // Tohoku Math. J. – 1981. – **33**. – P. 297–335.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
8. *Солонников В. А.* Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **41**, № 6. – С. 1388–1424.
9. *Федорюк М. В.* Асимптотика, интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.
10. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964. – 538 с.

Получено 30.01.96