УДК 517.946.9

Ю. О. Митропольський, А. А. Березовський (Ін-т математики НАН України, Київ),
М. А. Березовський (Київ. ун-т)

ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

We establish necessary conditions for the existence of effects of space localization and stabilization in time such that these effects are qualitatively new for evolutionary equations. We suggest constructive methods for solving the corresponding one-dimensional free boundary problems which appear in ecology and medicine.

Встановлено необхідні умови існування якісно нових для еволюційних рівнянь ефектів просторової локалізації та стабілізації у часі і запропоновано конструктивні методи розв'язання відповідних одновимірних задач з вільними межами, що виникають в проблемах екології та медицини.

1. Проблеми екології. Постановка задачі. При математичному моделюванні процесів забруднення та поновлення навколишнього середовища виникає необхідність дослідження наступних задач з вільними межами [1–4] для нелінійного параболічного рівняння:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} K(u) \operatorname{grad} u = w - f(u) \ \text{ в } \ \Omega(t) \equiv \{u > 0\}, \quad t>0, \\ u(P,0) = \psi(P) \ \text{ в } \ \Omega(0), \\ (K \operatorname{grad} u, \bar{n}) + \alpha u = 0 \ \text{ на } \ S(t) \equiv \partial\Omega(t) \cap \partial D, \quad t>0, \\ u = 0, \quad (K \operatorname{grad} u, \bar{n}) + \alpha u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma(t) \equiv \{u=0\} \equiv \partial\Omega(t) \cap D, \quad t>0.\end{gathered} \tag{1}$$

Тут $u(P,t)$ — шукана функція точки P і часу t; $K(u)$, $f(u)$, $w = w(P,t)$, $\psi(P)$ и α — задані додатні функції вказаних аргументів і додатний параметр; $\Omega(t)$ — область, обмежена відомою достатньо гладкою поверхнею $S(t) \in \partial D$ і невідомою $\Gamma(t)$; D — деяка область в R^3, що містить $\Omega(t)$ при довільному значенні часу t (наприклад, напівпростір, обмежений площиною ∂D); $\bar{n}$ — орт зовнішньої нормалі до $\partial\Omega(t) \equiv S(t) \cup \Gamma(t)$.

Найбільш поширеними є точкові джерела забруднення інтенсивності $q_i(t)$ в точках P_i, $i = \overline{0,k}$, $k \in \mathbb{N}$. В диференціальному рівнянні задачі (1) при цьому

$$w(P,t) = \sum_{i=0}^{k} q_i(t)\delta(P - P_i),$$

де $\delta(P - P_i)$ — дельта-функція Дірака з носієм в точці P_i, наявність якої призводить до появи особливостей в розв'язку $u(P, t)$ в точках P_i. Дійсно, інтегруючи диференціальне рівняння задачі (1) по малій кулі з центром в точці P_i і радіусом $r = |P - P_i|$ з урахуванням інтегровності u_t та $f(u)$ і властивості дельта-функції Дірака, маємо

$$\lim_{P \to P_i} \left(r^{N-1} K(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{q_i(t)}{\omega_N},$$

де ω_N — площа поверхні одиничної сфери, $N = 1, 2, 3$. Звідси випливає, що при $N = 2, 3$ $(\omega_2 = 2\pi,\ \omega_3 = 4\pi)$ в точці P_i маємо особливості $q_i(t)/4\pi r$, $q_i(t)\ln(1/r)/2\pi$ відповідно, при $n = 1$ $(\omega_1 = 2)$ розв'язок неперервний, а його перша похідна зазнає розриву першого роду при переході через точку P_i. Якщо джерела зосереджені на поверхні, то необхідно розглядати відповідну неоднорідну крайову умову з (1) на $S(t)$. У випадку тільки одного джерела інтенсивності $q(t)$, що діє в точці P_0, коли $w = q(t)\delta(P-P_0)$, після інтегрування диференціального рівняння задачі (1) по області $\overline{\Omega}(t)$ з урахуванням властивості дельта-функції Дірака та другої з умов на вільній поверхні $\Gamma(t)$ отримуємо додаткову нелокальну умову

$$\iiint\limits_{\overline{\Omega}(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + f(u)\right) dv + \alpha \iint\limits_{S(t)} u\, ds = q(t). \tag{2}$$

Перетворимо умову (2) до вигляду, що не містить похідної за часом. Для цього проінтегруємо (2) по t, використовуючи формулу диференціювання по параметру [5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} \iiint\limits_{\overline{\Omega}(t)} u\, dv = \iiint\limits_{\overline{\Omega}(t)} \frac{\partial u}{\partial t}\, dv + \iint\limits_{\partial\Omega(t)} u v_n\, ds,$$

де v_n — гадана швидкість поверхні $\Gamma(t) \equiv \{\Phi(P,t) = u(P,t) = 0\}$ в напрямку зовнішньої нормалі $\bar{n}$:

$$v_n = -\frac{\Phi_t(P,t)}{|\operatorname{grad}\Phi(P,t)|}.$$

Враховуючи початкову умову і першу умову на $\Gamma(t)$ задачі (1), рівність нулеві швидкості v_n поверхні $S(t)$, а також те, що

$$\iint\limits_{\partial\Omega(t)} u v_n\, ds = \iint\limits_{S(t)} u v_n\, ds + \iint\limits_{\Gamma(t)} u v_n\, ds = 0,$$

маємо

$$\int\limits_0^t \iiint\limits_{\overline{\Omega}(t)} \frac{\partial u}{\partial t}\, dv\, dt = \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{\overline{\Omega}(t)} u\, dv\, dt = \iiint\limits_{\overline{\Omega}(t)} u\, dv - \iiint\limits_{\overline{\Omega}(0)} \psi\, dv,$$

і нелокальна умова (2) набуває вигляду

$$\iiint\limits_{\overline{\Omega}(t)} u\, dv + \int\limits_0^t \iiint\limits_{\overline{\Omega}(t)} f(u)\, dv\, dt + \alpha \int\limits_0^t \iint\limits_{S(t)} u\, ds\, dt =$$

$$= \iiint\limits_{\overline{\Omega}(0)} \psi\, dv + \int\limits_0^t q(t)\, dt. \tag{3}$$

Крім нелокальності задачі типу (1), (3) містять ще й вільну межу. В таких задачах треба знаходити як функцію $u(P,t)$, так і область її визначення $\Omega(t)$, тобто вільну межу $\Gamma(t)$: $\Phi(P,t) = 0$, на якій відомі дві крайові умови: $u = 0$ та $(K \operatorname{grad} u, \bar{n}) = 0$. Розв'язок $u(P,t)$ за фізичним змістом повинен мати характер хвилі, що розповсюджується. З математичної точки зору виконання цих вимог потребує певних обмежень на характер поведінки функцій $f(u)$ і $K(u)$ в околі нуля.

1.1. Стаціонарна задача з вільною межею Γ *та нелокальною умовою.* Якщо функція $q(t)$ при $t \to \infty$ прямує до сталої величини q, то $u(P,t)$ і $\Gamma(t)$ прямують відповідно до $u(P)$ та Γ: $\Phi(P) = 0$. Для визначення $u(P)$ і Γ отримуємо відповідну стаціонарну задачу.

$$\operatorname{div}(K(u) \operatorname{grad} u) = f(u) \quad \text{в} \quad \Omega \setminus P_0 \equiv \{0 < u < \infty\},$$

$$
\begin{gathered}
(K \operatorname{grad} u, \vec{n}) + \alpha u = 0 \quad \text{на} \quad S \equiv \partial\Omega \cap \partial D, \\
u = 0, \quad (K \operatorname{grad} u, \vec{n}) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \equiv \{u = 0\} \equiv \partial\Omega \cap D, \\
\iiint\limits_{\overline{\Omega}} f(u)\,dv + \alpha \iint\limits_{S} u\,ds = q.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Додаткові нелокальні умови виражають закон збереження. Так, в останньому випадку, якщо q є інтенсивність точкового джерела забруднення, за фізичним змістом забруднююча речовина поглинається в Ω розподіленими об'ємними стоками інтенсивності $f(u) \geq 0$, $u \geq 0$, та поверхнею S з поверхневими стоками інтенсивності $\alpha u > 0$.

Стаціонарні задачі з вільною межею типу (4) допускають варіаційне формулювання, яке не містить у постановці вільної межі. Дослідженню такого роду відповідних варіаційних задач присвячено багато робіт (див., наприклад, [6]).

1.2. Необхідні умови просторової локалізації. Нехай існує скінченна область $\Omega \in D$, обмежена відомою поверхнею S та невідомою $-\Gamma$. В довільній точці $P \in \Gamma$ виберемо початок локальної декартової системи координат, вісь ζ якої направлена по зовнішній нормалі $\vec{n}$, а дві інші ξ та η лежать в дотичній площині до Γ в точці P. В такій системі координат маємо

$$
\operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad}_\tau \varphi + \vec{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}, \qquad \operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div}_\tau \vec{A}_\tau + \frac{\partial A_n}{\partial \zeta},
$$

де φ — скалярна функція; $\vec{A}$ — вектор-функція з компонентами A_{τ_1}, A_{τ_2}, A_n; $\bar{\tau}_1$ і $\bar{\tau}_2$ — не фіксовані взаємно ортогональні орти вибраної системи координат, що лежать в дотичній площині. Це дозволяє в малому напівоколі $\omega \in \Omega$ $(\zeta \leq 0)$ точки $P \in \Gamma$ перейти до розгляду диференціального рівняння і крайових умов на Γ в напівкоординатній, так званій нормально-тангенціальній формі запису

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(K(u) \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + \operatorname{div}_t \left(K(u) \operatorname{grad}_\tau u \right) = f(u) \quad \text{в} \quad \omega \quad (\zeta < 0), \\
u = 0, \quad K(u) \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \quad \zeta = 0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Наближено можна вважати, що в малому околі точки $P \in \Gamma$ розв'язок задачі (5) залежить тільки від координати ζ, тобто $u(\xi, \eta, \zeta) \simeq u(\zeta)$. Після нехтування в (5) частинними похідними по координатах ξ, η дотичної площини $\zeta = 0$, для визначення $u(\zeta)$, $\zeta \leq 0$, отримуємо задачу Коші

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(K(u) \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = f(u), \qquad \zeta < 0, \\
u = 0, \quad K(u) \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \quad \zeta = 0.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Диференціальне рівняння (6) легко перетворюється до вигляду

$$
\frac{\partial}{\partial u}\left(K(u) \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 = 2K(u) f(u), \qquad \zeta < 0,
$$

що дозволяє виконати інтегрування по u. З урахуванням початкових умов (6) при цьому маємо

$$K(u)\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \pm\sqrt{2\int_0^u K(v)\, f(v)\, dv}\,.$$

Вибираючи знак мінус, що відповідає монотонно спадному розв'язку $(du/d\zeta < < 0)$, отримуємо

$$\frac{K(u)\, du}{\sqrt{2\int_0^u K(v)\, f(v)\, dv}} = -d\zeta, \qquad \zeta \le 0.$$

Далі, інтегруючи другий раз з урахуванням умов $u = 0$, $\zeta(0) = 0$, одержуємо

$$|\zeta| = \int\limits_0^u \frac{K(w)\, dw}{\sqrt{2\int_0^w K(v)\, f(v)\, dv}}. \tag{7}$$

Інтеграл правої частини (7) є невласним, оскільки $\int_0^w K(v)\, f(v)\, dv \to 0$ при $w \to 0$. Для його існування, а отже, і існування розв'язку $|\zeta| = |\zeta|(u)$ задачі (7) необхідно, щоб підінтегральний вираз мав інтегровну особливість в точці $u = 0$. Нехай $K(u) = O(u^\sigma)$, $f(u) = O(u^\beta)$, при $u \to 0$. Тоді для існування інтеграла (7) необхідно, щоб виконувалась нерівність $\beta - \sigma < 1$.

Фактично рівність (7) встановлює асимптотику розв'язку u при $\zeta \to 0$. Оскільки $u = 0$, $K(u)\dfrac{du}{d\zeta} = 0$ і $f(u) = 0$ при $\zeta = 0$, то згідно з диференціальним рівнянням (6) друга та всі наступні похідні також дорівнюють нулеві — $d^k/d\zeta^k = 0$, $k \ge 1$. Отже, розвинення $u(\zeta)$ в ряд Тейлора в точці $\zeta = 0$ можливе тільки як $u(\zeta) \equiv 0$, коли $\zeta \ge 0$, що і доводить наступну теорему.

Теорема 1. *Необхідною умовою існування просторової локалізації розв'язку нелінійної крайової задачі* (4) *є існування інтеграла*

$$\int\limits_0^u \frac{K(w)\, dw}{\sqrt{2\int_0^w K(v)\, f(v)\, dv}} < \infty, \tag{8}$$

що можливо, коли функції $K(u)$ *та* $f(u)$ *при* $u \to 0$ *мають асимптотики* u^σ *та* u^β, $\beta - \sigma < 1$.

Слід зазначити, що для відповідної одновимірної задачі (4)

$$\frac{d}{dx}\left(K(u)\frac{du}{dx}\right) = f(u), \qquad 0 < x < s,$$

$$K(u)\frac{du}{dx} - \alpha u = -\frac{q}{2}, \qquad x = 0, \tag{9}$$

$$u = 0, \quad K(u)\frac{du}{dx} = 0, \quad x = s,$$

де шуканими є функція $u(x)$ і стала s, умова (8) є необхідною та достатньою. Дійсно, як і при розв'язанні задачі Коші (6) у цьому випадку отримуємо

$$x = \int\limits_u^{\overline{u}} \frac{K(w)\, dw}{\sqrt{2\int_0^w K(v)\, f(v)\, dv}}, \tag{10}$$

де $\overline{u} = u(0)$ є додатним коренем рівняння

$$F(\overline{u}) = \sqrt{2\int\limits_0^{\overline{u}} K(v)\, f(v)\,dv + \alpha\overline{u}} = \frac{q}{2}. \tag{11}$$

Останнє випливає з крайової умови (9) при $x=0$ після виключення з неї згідно з отриманим розв'язком (10) похідної

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{K(\overline{u})}\sqrt{2\int\limits_0^{\overline{u}} K(v)\, f(v)\,dv}\,.$$

Оскільки $\alpha>0$, $K(u)\geq 0$, $f(0)\geq 0$, $u>0$, то

$$F'(\overline{u}) = \alpha + \frac{K(\overline{u})\, f(\overline{u})}{2\sqrt{2\int_0^{\overline{u}} K(v)\, f(v)\,dv}} > 0$$

і, отже, рівняння (11) має єдиний додатний корінь. Сталу s знаходимо після підстановки значення $u=0$ в (10):

$$s = \int\limits_0^{\overline{u}} \frac{K(w)\,dw}{\sqrt{2\int_0^{w} K(v)\, f(v)\,dv}}\,. \tag{12}$$

Очевидно, що для існування просторової локалізації необхідно і достатньо виконання нерівності $s<\infty$, тобто існування невласного інтеграла (12).

Теорема 2. *Якщо додатні та неперервні для всіх* $u>0$ *функції* $K(u)$ *і* $f(u)$ *при* $u\to 0$ *мають асимптотики* u^{σ} *і* u^{β}, $\beta-\sigma<1$, *то при будь-якому* $q>0$ *існує єдиний обмежений, монотонно спадний, неперервний, додатний розв'язок крайової задачі* (9), *що визначається у неявному вигляді згідно з* (10) *і має скінченний носій* $0<x<s$.

Із цієї теореми випливає просторова локалізація дифузійного збурення від плоского постійно діючого джерела забруднення. Природно, що останнє досягається за рахунок вказаних вище асимптотик для коефіцієнта дифузії $K(u)$ та стоків забруднення $f(u)$. Для того щоб можна було описати ефекти просторової локалізації, які реально спостерігаються при негативних екологічних наслідках, викликаних природними та антропогенними факторами, про що потурбувалась природа, необхідно вибирати саме такі функціональні залежності.

1.3. Необхідні умови стабілізації до стаціонарного, просторово локалізованого розв'язку. Розглянемо наступні найпростіші одновимірні задачі, коли джерела забруднення є плоскими $(N=1)$, лінійними $(N=2)$ або точковими $(N=3)$, поверхня $S(t)$ відсутня, а вільна поверхня $\Gamma(t)$ це площина, циліндр або сфера відповідно $\left(r=r_{\Phi}(t),\ r\geq 0,\ N=2,3;\ r=|x|,\ N=1\right)$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r^{N-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{N-1}K(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right] = -f(u), \quad 0<r<r_{\Phi}(t), \quad t>0, \\
u(r,0) = 0, \quad 0<r<r_{\Phi}(0), \\
\lim_{r\to 0}\left[r^{N-1}K(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right] = -\frac{q}{\omega_N}, \quad r=0, \\
u=0, \quad K(u)\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad r=r_{\Phi}(t), \quad t>0.
\end{gathered} \tag{13}$$

Як вже зазначалось, замість крайової умови при $r=0$ можна розглядати нелокальну умову (2)

$$\int_0^{r_\Phi(t)} [u_t + f(u)]\, r^{N-1} dr = \frac{1}{\omega_N} q(t), \quad t > 0,$$

яка враховує зосереджене джерело і наявність вільної межі, або нелокальну умову (3)

$$\int_0^{r_\Phi(t)} u r^{N-1} dr + \int_0^t \int_0^{r_\Phi(t)} f(u) r^{N-1} dr\, d\tau = \frac{1}{\omega_N} \int_0^t q(\tau)\, d\tau, \quad t > 0,$$

що враховує ще й початкову умову.

У випадку $N = 1$ маємо задачу для визначення $u(x, t)$ і $s(t)$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = -f(u), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < s(0), \\ K(u)\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{q}{2}, \quad x = 0, \\ u = 0, \quad K(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = s(t), \quad t > 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Оскільки в цьому випадку розв'язок не має особливості при $x = 0$, то замість нелокальної умови

$$\int_0^{s(t)} [u_t + f(u)]\, dx = \frac{1}{2} q(t), \quad t > 0,$$

ми скористались крайовою умовою.

Припустимо, що в довільний момент часу t існує просторова локалізація дифузійного збурення, тобто для кожного $x \geq s(t)$ концентрація забруднення дорівнює нулю. Розглянемо площину змінних t, x і криву $x = s(t)$, що обмежує область дифузійного збурення. В довільній точці $(t, x(t))$ на кривій $x = s(t)$ побудуємо нормаль $\bar{n}$ і дотичну $\bar{\tau}$:

$$\bar{n} = \frac{-\bar{i}\,\dot{s}(t) + \bar{j}\cdot 1}{\sqrt{1 + \dot{s}^2(t)}}, \qquad \bar{\tau} = \frac{\bar{i}\cdot 1 + \bar{j}\,\dot{s}(t)}{\sqrt{1 + \dot{s}^2(t)}} \tag{15}$$

та перейдемо від декартової системи координат t, x до нормально-тангенціальної системи координат ξ, η з центром в довільній точці (t_0, x_0) кривої $x = s(t)$ $(x_0 = s(t_0))$. Згідно з (15) ξ і η виражаються через t і x за формулами

$$\xi = \frac{t - t_0 + (x - x_0)v}{\sqrt{1 + v^2}}, \qquad \eta = \frac{-(t - t_0)v + x - x_0}{\sqrt{1 + v^2}},$$

де $v = \dot{s}(t_0)$ — швидкість фронту в момент часу $t = t_0$. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}\left(v\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - v\frac{\partial}{\partial \eta}\right),$$

то в достатньо малому околі точки (t_0, x_0) диференціальне рівняння (14) і крайові умови при $x = s(t)$ набудуть вигляду

$$\left(v\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left[K(u)\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right]-$$

$$-\sqrt{1+v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-v\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=(1+v^2)f(u),\qquad \eta<0,$$

$$u(\xi,0)=0,\qquad K(u)\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0,\quad \eta=0.$$

Наближено можна вважати, що в будь-якому малому околі точки (t_0, x_0) розв'язок залежить тільки від координати η і, значить, задовольняє рівняння

$$\frac{d}{d\eta}\left(K(u)\frac{du}{d\eta}\right)+v\sqrt{1+v^2}\frac{du}{d\eta}=(1+v^2)f(u),\qquad \eta<0,$$
$$u(0)=0,\qquad K(u)\frac{du}{d\eta}=0,\qquad \eta=0. \tag{16}$$

Очевидно, що при $t\to\infty$ і $v\to 0$, якщо спостерігається стабілізація до стаціонарного розв'язку, коли $s(t)\to s$ = const, і, значить, задача (16) трансформується в задачу (6) після заміни ζ на η з розв'язком

$$|\eta|=\int_0^u\left[2\int_0^w K(v)\,f(v)\,dv\right]^{-1/2}K(w)\,dw. \tag{17}$$

Поведінка інтеграла (17) при $u\to 0$ суттєво залежить від порядку обернення в нуль $f(u)$ при $u=0$. Нехай $K(u)=K$ = const і $f(u)=f_0u^{\beta}$. Тоді інтеграл (17) існує при малих $\eta<0$ як невласний, якщо $0\le\beta<1$, і для забруднення u отримуємо асимптотику

$$u=\left(\sqrt{\frac{f_0(1-\beta)^2}{2K(1+\beta)}}|\eta|\right)^{2/(1-\beta)},\qquad |\eta|\to 0.$$

Із рівнянь (6) випливає, що на самому фронті $x=s(t)$ або $\eta=0$ розв'язок, його перша, друга і всі вищі похідні дорівнюють нулю. Значить, розвинення $u(\eta)$ в ряд Тейлора в точці $\eta=0$ для всіх $\eta>0$ можливе тільки як $u\equiv 0$ $\forall\,\eta\ge 0$.

Із викладеного вище випливає наступна теорема.

Теорема 3. *Необхідною умовою стабілізації початково-крайової задачі* (14) *до просторово локалізованого розв'язку відповідної стаціонарної задачі є існування інтеграла* (17).

Зазначимо, що умова існування інтеграла (17) є необхідною як для просторової локалізації загальних стаціонарних задач з вільною межею (4), так і для стабілізації у часі одновимірної нестаціонарної задачі (14).

2. Проблеми кріомедицини. Постановка задач. Вирішення теплофізичних аспектів гіпотермічного та кріохірургічного методів лікування приводить до необхідності дослідження задач типу Стефана з двома вільними межами: зовнішньою $\Gamma(t)$: $\{\Phi(P,t)=0\}$ та внутрішньою Φ^*: $\{\Phi^*(P,t)=0\}$. Вихідним тут є квазілінійне рівняння теплопровідності

$$\operatorname{div}(\lambda(u)\operatorname{grad}u)-e_t(u)=w(u),$$

в якому функції $\lambda(u)$ і $e(u)$ при деяких значеннях u мають розрив першого роду, а $w(u)$ — неперервна, монотонна спадна функція з необмеженою похідною в нулі. Перші дві з цих функцій є типовими для класичних задач Стефана і обумовлюють появу вільної межі Φ^*, з останньою ж пов'язана вільна межа $\Gamma(t)$, яка разом з відомою поверхнею $S(t)$ обмежує деяку область $\Omega(t) \subset D \subset \subset R^3$. Крім початкової умови шукана функція повинна задовольняти третю крайову умову на $S(t)$, дві умови на $\Gamma(t)$ та набувати постійного значення на Φ^* [7]. За допомогою перетворення Кірхгофа $\lambda(u)\operatorname{grad} u = \operatorname{grad}\psi$, переходу до безрозмірних залежної та незалежної змінних з використанням властивостей δ-функції Дірака

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \quad \delta(a(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|a'(x_i)|}, \quad a(x_i) = 0,$$

одержуємо наступну канонічну форму рівнянь кріо- та гіпотермії біотканини:

$$\Delta u - [k(u) + p\delta(u-u^*)]\,u_t = f(u)\eta(u^*-u) \ \text{ в } \ \Omega(t) \equiv \{u>0\}, \ \ t>0,$$

$$u(P,0) = 0 \ \text{ в } \ \Omega(0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \varphi(u) = q \ \text{ на } \ S(t) \equiv \partial\Omega(t) \cap \partial D, \ \ t>0, \tag{18}$$

$$u = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma(t) \equiv \{u=0\} \equiv \partial\Omega(t)\cap D, \ \ t>0,$$

$$u = u^* \ \text{ на } \ \Phi^*(t) \equiv \Omega_1(t)\cap\Omega_2(t), \ \ t>0.$$

Тут $k(u)$ і $\varphi(u)$ — додатні для будь-якого $u \geq 0$ кусково-неперервна і кусково-неперервно диференційовна функції $(\varphi'(u) > 0, \ \varphi(0) = 0)$; $f(u)$ — додатна, обмежена неперервна функція; $\delta(u-u^*)$ і $\eta(u^*-u)$ — функції Дірака і Хевісайда; $q(P,t)$ — задана на $S(t)$ функція; p, u^* — додатні параметри.

Із задачі (18) належить визначити функцію $u(P,t)$, вільну поверхню $\Phi^*(t)$, що розділяє заморожену $\Omega_1(t)$ $(u>u^*)$ та охолоджену $\Omega_2(t)$ $(u<u^*)$ області біотканини, а також вільну поверхню $\Gamma(t)$, яка разом з відомою поверхнею $S(t)$ обмежує область кріовпливу $\Omega(t) \equiv \Omega_1(t)\cup\Omega_2(t)$. Для цього залучаються додаткові умови на $\Phi^*(t)$ та $\Gamma(t)$. Дослідження такої задачі ускладнюється наявністю дельта-функції Дірака $\delta(u-u^*)$ в диференціальному рівнянні. Оскільки $\Phi^*(t)$ можна вважати поверхнею рівня $u(P,t) = u^* \to \to \Phi^*(P,t) = u(P,t) - u^* = 0$, $u_t = \Phi_t^*(t)$, то $\delta(u-u^*)u_t = \Phi_t^*(t)\delta(\Phi^*)$, де $\delta(\Phi^*)$ — дельта-функція Дірака з носієм на поверхні $\Phi^*(t)$. Це дозволяє використати іншу форму запису диференціального рівняння задачі

$$\Delta u - k(u)u_t = f(u)\eta(u^*-u) + p\Phi_t^*(t)\delta(\Phi^*), \tag{19}$$

яке в явному вигляді містить вільну поверхню $\Phi^*(t)$. Інтегруючи останнє по шару $\omega_\varepsilon \equiv \{|\Phi^*(P,t)| < \varepsilon\}$, що містить довільну частину φ^* поверхні Φ^* — $-\varphi^* \in \Phi^*$, та переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$, одержуємо умови спряження [8]

$$[u]_{\Phi^*} = 0, \quad [(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad}\Phi^*)]_{\Phi^*} = p\Phi_t^*(t), \tag{20}$$

де $[\cdot]_{\Phi^*}$ — стрибок виразу, що стоїть в квадратних дужках, при переході через поверхню Φ^*. При цьому ми скористалися такими формулами і перетвореннями:

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad}\Phi^*}{|\operatorname{grad}\Phi^*|}, \quad dn = \frac{d\Phi^*}{|\operatorname{grad}\Phi^*|}, \quad |\Phi^*| < \varepsilon \to |n| < \varepsilon_1,$$

$$\iiint\limits_{\omega_\varepsilon} \Delta u\, dv = \iint\limits_{\partial\omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint\limits_{\partial\omega_\varepsilon} (\operatorname{grad} u, \vec{n})\, ds,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{\omega_\varepsilon} \Delta u\, dv = \iint\limits_{\Phi^*} [(\operatorname{grad} u, \vec{n})]_{\Phi^*} ds = \iint\limits_{\Phi^*} \frac{[(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad}\Phi^*)]_{\Phi^*}}{|\operatorname{grad}\Phi^*|} ds,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{\omega_\varepsilon} k(u) u_t\, dv = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{\omega_\varepsilon} f(u)\eta(u^* - u)\, dv = 0,$$

$$\iiint\limits_{\omega_\varepsilon} \Phi_t^* \delta(\Phi^*)\, dv = \iint\limits_{\Phi^*} \left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} \Phi_t^* \delta(\Phi^*)\, dn \right) ds =$$

$$= \iint\limits_{\Phi^*} \left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\Phi_t^*}{|\operatorname{grad}\Phi^*|} \delta(\Phi^*)\, d\Phi^* \right) ds = \iint\limits_{\Phi^*} \frac{\Phi_t^*}{|\operatorname{grad}\Phi^*|} ds$$

та основною лемою варіаційного числення для довільної частини поверхні Φ^*.

Зазначимо, що внаслідок цих перетворень, після інтегрування рівняння (19) по області $\Omega(t) \equiv \Omega_1(t) \bigcup \Omega_2(t)$ з урахуванням крайових умов (18), отримуємо нелокальну умову

$$\iiint\limits_{\Omega_2(t)} f(u)\, dv + \iiint\limits_{\Omega(t)} k(u) u_t\, dv + p \iint\limits_{\Phi^*} \frac{\Phi_t^*}{|\operatorname{grad}\Phi^*|} ds + \iint\limits_{S(t)} \varphi(u)\, ds =$$

$$= \iint\limits_{S(t)} q\, ds,$$

яка в явному вигляді містить поверхню Φ^* і виражає закон збереження теплової енергії. Умови спряження (20) відомі як умови Стефана. Вони дозволяють позбутися дельта-функції Дірака як в диференціальному рівнянні (18), так і в диференціальному рівнянні (19), та розглядати їх в областях $\Omega_1(t)$ і $\Omega_2(t)$:

$$\Delta u - k(u) u_t = 0 \ \text{ в } \ \Omega_1(t),$$

$$\Delta u - k(u) u_t = f(u) \ \text{ в } \ \Omega_2(t),$$

залучаючи умови спряження (20).

2.1. Умови просторової локалізації кріовпливу. Відповідна (19), (20) стаціонарна задача

$$\begin{gathered} \Delta u = f(u)\eta(u^* - u) \ \text{ в } \ \Omega(t) \equiv \{u > 0,\ u \neq u^*\}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \varphi(u) = q \ \text{ на } \ S \equiv \partial\Omega \cap \partial D, \\ u = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma \equiv \{u = 0\} \equiv \partial\Omega \cap D, \\ [u]_{\Phi^*} = \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\Phi^*} = 0, \ \ u = u^* \ \text{ на } \ \Phi^* \equiv \Omega_1 \cap \Omega_2, \end{gathered} \tag{21}$$

відносно функції $u(P)$ та вільних меж $\Phi^* \equiv \{u(P) - u^*\}$ і $\Phi^* \equiv \{u(P) = 0\}$

відображає наявність поверхні Φ^* тільки в крайовій умові на S: $[\varphi'(u)]_{u^*} \neq \neq 0$. Якщо проінтегрувати диференціальне рівняння задачі (21) по області Ω, то з урахуванням крайових умов одержимо

$$\iiint\limits_{\Omega_2} f(u)\,dv \; + \; \iint\limits_{S} \varphi(u)\,ds \; = \; \iint\limits_{S} q\,ds\,.$$

Отже, задача (21) певною мірою близька до задачі (4) і тому, як і в попередньому випадку, після переходу до локальної нормально-тангенціальної системи координат з початком в довільній точці P на вільній межі Γ, отримуємо наступну необхідну умову просторової локалізації розв'язку:

$$\int\limits_0^u \left(2\int\limits_0^w f(v)\,dv \right)^{-1/2} dw \; < \; \infty. \tag{22}$$

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 4. *Необхідною умовою існування просторової локалізації розв'язку нелінійної стаціонарної крайової задачі* (21) *є існування інтеграла* (22), *що можливо, коли функція* $f(u)$ *при* $u \to 0$ *має асимптотику* u^{β}, $\beta < 1$.

Для найпростішої одновимірної нелінійної задачі (21)

$$\begin{gathered} \frac{d^2u}{dx^2} \; = f(u)\,\eta\,(u^* - u), \quad 0 < x < s, \\ \frac{du}{dx} - \varphi(u) \; = \; -q, \quad x = 0, \\ [u]_{x^*} \; = \; \left[\frac{du}{dx}\right]_{x^*} \; = \; 0, \quad u(x^*) \; = \; u^*, \\ u \; = \; \frac{du}{dx} \; = \; 0, \quad x = s, \end{gathered} \tag{23}$$

як і у випадку задачі (9), при виконанні умови

$$q \; - \left(2\int\limits_0^{u^*} f(v)\,dv \right)^{1/2} \; > \; \varphi(u^*), \tag{24}$$

яка має чіткий теплофізичний зміст, отримуємо точний, єдиний, монотонно спадний розв'язок

$$x(u) \; = \; \begin{cases} \dfrac{\overline{u} - u}{\overline{u} - u^*}\, x^*, & u \geq u^*, \\ q \; - \displaystyle\int\limits_0^u \left(2\int\limits_0^w f(v)\,dv \right)^{-1/2} dw, & u \leq u^*. \end{cases} \tag{25}$$

Тут сталі x^* та s визначаються за формулами

$$x^* \; = \; (\overline{u} - u^*)\left(2\int\limits_0^{u^*} f(v)\,dv \right)^{-1/2}, \qquad s \; = \; x^* + \int\limits_0^{u^*} \left(2\int\limits_0^w f(v)\,dv \right)^{-1/2} dw\,, \tag{26}$$

а стала $\overline{u}$ — єдиний додатний корінь рівняння

$$\varphi(\overline{u}) = q - \left(2\int\limits_0^{u^*} f(v)\,dv\right)^{1/2}. \tag{27}$$

Отже, справджується наступна теорема.

Теорема 5. *Якщо неперервна для всіх* $u > 0$ *функція* $f(u)$ *при* $u \to 0$ *має асимптотику* u^β, $\beta < 1$, *функція* $\varphi(u)$ *монотонно зростаюча і* $\varphi(0) = 0$, *а стала* q *задовольняє умову* (24), *то існує єдиний, обмежений, монотонно спадний, неперервний, додатний розв'язок крайової задачі* (23), *який визначається у неявному вигляді згідно з* (25) – (27) *і має скінченний носій* $0 < x < s$.

2.2. Стабілізація до стаціонарного розв'язку. Розглянемо нестаціонарну задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f(u)\eta(u^* - u), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < s(0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \varphi(u) = -q(t), \quad x = 0, \quad t > 0, \tag{28}$$

$$[u]_{x^*} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x^*} = \rho\dot{x}^*(t), \quad u(x^*(t), t) = u^*, \quad t > 0,$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = s(t), \quad t > 0,$$

та поставимо за мету визначити необхідні умови стабілізації її розв'язку до розв'язку відповідної стаціонарної задачі (23).

Як і у випадку нестаціонарної задачі (14), перейдемо до нормально-тангенціальної системи координат ξ, η з центром в довільній точці (t_0, x_0) кривої $x = s(t)$ $(x_0 = s(t_0))$. Це приводить до наступної задачі Коші:

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} = f(u), \quad \eta < 0,$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{d\eta} = 0, \quad \eta = 0, \tag{29}$$

з точним монотонно спадним розв'язком

$$|\eta| = \int\limits_0^u \left(2\int\limits_0^w f(v)\,dv\right)^{-1/2} dw, \tag{30}$$

з якого випливає, що необхідною умовою стабілізації $u(x, t)$ до $u(x)$ при $t \to \infty$, коли $\dot{s}(t) \to 0$, $s(t) \to s$, є існування інтеграла (30), що можливо, коли функція $f(u)$ при $u \to 0$ має асимптотику $f(u) = u^\beta$, $0 \le \beta < 1$.

Зазначимо, що питання просторово-часової локалізації розв'язків одновимірних нестаціонарних задач з вільними межами для квазілінійного параболічного рівняння розглядались в роботах [9, 10].

3. Одновимірні задачі з вільними межами. Як вже відзначалось, такі задачі є найпростішими задачами відносно пари функцій $u(x, t)$ та $s(t)$. При відшуканні їх наближених розв'язків ефективними виявляються методи інтегральних рівнянь та еквівалентної лінеаризації.

3.1. Метод інтегральних рівнянь. Суть методу полягає в переході від диференціальної до інтегральної постановки задач з вільною межею $s(t)$ та наступному застосуванні до отриманих еквівалентних вихідній задачі інтегральних рівнянь одного з наближених методів.

Розглянемо нестаціонарну нелокальну задачу з вільною межею

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = x^{1-\beta} u^{\beta}, \quad 0<x<s(t), \quad t>0,\\ u(x,0) = 0, \quad 0<x<s(0), \quad (s(0)=0),\\ u(s(t),t) = u_x(s(t),t) = 0, \quad t>0,\\ \int_0^{s(t)} [u_t + x^{1-\beta}u^{\beta}]x\,dx = q(t), \quad t>0,\end{gathered} \tag{31}$$

($q(t)$ — задана функція), що постає при визначенні концентрації забруднення, зумовленого дією точкового джерела забруднення, і застосуємо до побудови її наближеного розв'язку метод інтегральних рівнянь.

Здійснюючи згідно з методом Роте дискретизацію рівнянь (31) за часовою змінною t, отримуємо наступну систему диференціально-різницевих рівнянь на кожному часовому шарі:

$$\begin{gathered}u'' - \tau^{-1}u = x^{1-\beta}u^{\beta} - \tau^{-1}\check{u}, \quad 0<x<s,\\ u(s) = u_x(s) = 0,\\ \int_0^s [\tau^{-1}u + x^{1-\beta}u^{\beta}]x\,dx = q + \int_0^s \tau^{-1}\check{u}\,x\,dx,\end{gathered} \tag{32}$$

де τ — крок за часом, а значком „ $\vee$ ” помічені значення $u(x,t)$ на попередньому часовому шарі — $\check{u} = u(x, t-\tau)$, q — значення $q(t)$ на розглядуваному часовому шарі.

Неважко перевірити, що розв'язок диференціального рівняння (32), який задовольняє умови на вільній межі $x = s$, можна представити як розв'язок нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра і додаткового рівняння для визначення s на даному часовому шарі

$$\begin{gathered}u(x) = \sqrt{\tau}\int_x^s \operatorname{sh}\frac{\xi - x}{\sqrt{\tau}}\,\xi^{1-\beta}u^{\beta}(\xi)\,d\xi - \frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_x^s \operatorname{sh}\frac{\xi - x}{\sqrt{\tau}}\,\check{u}(\xi)\,d\xi, \quad 0<x\le s,\\ \int_0^s [\tau^{-1}u + x^{1-\beta}u^{\beta}]x\,dx = q + \int_0^s \tau^{-1}\check{u}\,x\,dx.\end{gathered} \tag{33}$$

Апроксимуючи $u(x)$ на відрізку $0 \le x < s$ поліномом n-го степеня та застосовуючи метод колокації, зводимо побудову наближеного розв'язку системи (33) до розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень $u_i = u(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, $x_0 = 0$, $x_n = s$, та числа s. Відповідну програму чисельних розрахунків реалізовано на ПЕОМ.

Відзначимо, що збіжність методу Роте доведено в різних класах гладких та узагальнених розв'язків для широкого кола нелінійностей початково-крайових задач для нелінійних еволюційних рівнянь. Це стосується і похибок, пов'язаних з апроксимацією $u(x)$.

3. 2. Метод еквівалентної лінеаризації. Цей метод грунтується на використанні певної конструкції наближеного розв'язку $u(x,t)$, що містить деякі функції тільки часової змінної t та задовольняє лише частину умов початково-крайової задачі. Його ідеї започатковано в роботах Крилова – Боголюбова – Митропольського [11, 12]. В теоретичній фізиці він відомий як метод нелінійних варіаційних параметрів [13]. Згідно з методом еквівалентної лінеаризації наближений розв'язок задачі (31), який задовольняє крайові умови при $x = s(t)$, будемо шукати у вигляді

$$u(x, t) \doteqdot \tilde{u}(x, t) = u(t)\left(1 - \frac{x}{s(t)}\right)^{2/(1-\beta)}, \tag{34}$$

де $u(t)$ виражається через $s(t)$ за допомогою нелокальної умови

$$\int_0^{s(t)} [\tilde{u}_t + x^{1-\beta}\tilde{u}^{\beta}]x\,dx = q(t), \quad t > 0.$$

Підставляючи (34) в диференціальне рівняння в (31) і вимагаючи, щоб інтегральна нев'язка дорівнювала нулю, отримуємо нелінійне диференціальне рівняння першого порядку для визначення $s(\tau)$ та початкову умову $s(0) = 0$. Розв'язок такої задачі Коші легко отримати за допомогою одного з наближених методів інтегрування, наприклад методом Рунге – Кутта.

1. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А.* Задачи Стефана с предельным стационарным состоянием в спецэлектрометаллургии, криохирургии и физике моря // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1987. – Вып. 7. – С. 50–60.
2. *Березовский А. А.* Двумерные математические модели криодеструкции биоткани // Математическое моделирование физических процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 14–38.
3. *Березовский Н. А., Догучаева С. М.* Задачи Стефана в проблеме загрязнения и самоочищения окружающей среды точечным источником // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 18–21.
4. *Березовський М. А.* Двовимірні задачі з вільними межами для слабко нелінійних параболічних рівнянь // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – С. 27–30.
5. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 443 с.
6. *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. – М.: Наука, 1990. – 536 с.
7. *Березовський М. А.* Одновимірні задачі з вільними межами в проблемах екології // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 7. – С. 993–997.
8. *Mitropolsky Yu. A., Berezovsky A. A., Berezovsky S. A.* Free boundary problems for nonlinear evolution equations in metalurgy, medicine and ecology. – Kiev, 1994. – 54 p. – (Preprint / Inst. Math. Ukrainian SSR Akad. Sci.; 94.20).
9. *Мартинсон Л. К.* Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглощением // Мат. моделирование. – М.: Наука, 1986. – С. 278–303.
10. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**, вып. 2 (254). – С. 135–164.
11. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 540 с.
12. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А., Коновалова Н. Р.* Эквивалентная линеаризация систем с распределенными параметрами // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 4. – С. 464–471.
13. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – Т. 2. – 886 с.

Одержано 20.03.97