УДК 512.515

А. О. Пришляк (Киев. ун-т)

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ С ЗАДАННЫМ НАБОРОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Theorems on existence of vector fields with given sets of indexes of isolated singular points are proved for the cases of closed manifolds, pairs of manifolds, manifolds with boundary, and gradient fields. It is proved that, on a two-dimensional manifold, an index of isolated singular point of the gradient field is not greater than one.

Доведені теореми про існування векторних полів, які мають даний набір індексів ізольованих особливих точок для замкнених многовидів, пар многовидів, многовидів з краєм і градієнтних полів. Доведено, що індекс ізольованої особливої точки поля градієнта на двовимірному многовиді не більший за 1.

В данной работе рассматриваются векторные поля на многообразиях с изолированными особыми точками. В 1885 г. Пуанкаре [1] доказал, что сумма индексов особых точек такого векторного поля на двумерном многообразии равна эйлеровой характеристике этого многообразия. Для n-мерного случая эта теорема (теорема Пуанкаре – Хопфа) была доказана Хопфом [2] в 1926 г., вслед за частичными результатами Брауэра и Адамара. Теорема верна и для многообразий с краем, если векторное поле в каждой точке края направлено наружу. Было также установлено существование векторного поля без особых точек, если эйлерова характеристика многообразия равна 0. Доказательство этих утверждений можно найти в [3, 4].

Целью данной работы — установить существование векторного поля с заданным набором индексов, удовлетворяющих условиям теоремы Пуанкаре – Хопфа. В п. 1 доказано существование таких полей для замкнутых многообразий. При этом введены две операции с векторными полями: введение пары особых точек и сложения особых точек, которые в дальнейшем используются при доказательстве других теорем. В п. 2 доказано существование векторного поля с двумя наборами индексов на паре многообразий. При этом отдельно разобран случай, когда векторное поле, заданное на всем многообразии, касается подмногообразия. Векторные поля на многообразии с краем исследуются в п. 3. Пп. 4 и 5 посвящены изучению полей градиента функций на многообразии. Теорема 16 является „известным фактом", доказательство которого нигде не опубликовано.

Все многообразия, функции и векторные поля предполагаются гладкими класса C^∞.

1. Особые точки дифференциальных уравнений. Пусть M^n — гладкое многообразие. Векторное поле $\bar{v}$, задающее дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \bar{v}(x), \tag{1}$$

будем рассматривать как сечение касательного расслоения TM^n. В дальнейшем, если задано векторное поле $\bar{v}$, будем подразумевать, что задано и дифференциальное уравнение (1).

Теорема 1. *Пусть M^n, $n \geq 2$, — гладкое связное многообразие, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $k \geq 1$, — набор целых чисел такой, что*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \chi(M^n),$$

где $\chi(M^n)$ — эйлерова характеристика многообразия M^n. Тогда на многооб-

разии M^n существует векторное поле $\bar{v}$, особые точки которого изолированы и имеют индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Доказательство. Опишем две операции с векторными полями, позволяющие получать векторное поле с нужным набором особых точек из произвольного векторного поля.

1. *Введение двух особых точек индексов* $+1$ *и* -1. Пусть x_0 — регулярная точка векторного поля $\bar{v}_0$. Тогда согласно теореме о выпрямлении векторного поля [5] существует карта U в точке x_0, в которой векторное поле постоянно, и, таким образом, существует функция $f\colon U \to \mathbb{R}^1$ без критических точек в окрестности U точки x такая, что поле градиента этой функции в соответствующей метрике совпадает с полем $\bar{v}_0$. В окрестности V точки x такой, что $\overline{V} \subset U$, изменим функцию f, введя пару взаимно сокращающихся критических точек соседних индексов. Тогда, заменив в окрестности U поле $\bar{v}_0$ на поле градиента новой функции, получим поле, у которого на две особые точки индексов $+1$ и -1 больше, чем у поля $\bar{v}_0$.

2. *Замена двух особых точек индексов* λ_1 *и* λ_2 *одной особой точкой индекса* $\lambda_1+\lambda_2$. Пусть x_0 — особая точка индекса λ_1, x_1 — особая точка индекса λ_2 векторного поля $\bar{v}_0$. Выберем непересекающийся путь

$$\gamma\colon [0, 1] \to M^n,$$

соединяющий точки x_0 и x_1, т. е. такой, что $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Пусть U — окрестность пути $\gamma([0, 1])$, замыкание которой не содержит других особых точек, кроме x_0 и x_1. Тогда согласно лемме Урысона существует гладкая функция $f\colon M^n \to \mathbb{R}^1$ такая, что

$$f(0) = 0, \quad \text{если } x \in \gamma([0, 1]),$$

$$f(x) = 1, \quad \text{если } x \in M^n \setminus U,$$

$$0 < f(x) < 1, \quad \text{если } x \in U \setminus \gamma([0, 1]).$$

Рассмотрим векторное поле $\bar{v}_1 = f\bar{v}_0$. Пусть $g\colon M^n \to M^n/\gamma([0, 1])$ — отображение, переводящее путь $\gamma([0, 1])$ в точку y_0 и взаимно однозначное на $M^n/\gamma([0, 1])$. Так как $\bar{v}_1 = 0$ при $x \in \gamma([0, 1])$, то поле $\bar{v}_1$ индуцирует векторное поле $\bar{v}_2$ на многообразии $M^n/\gamma([0, 1])$. При этом траекториям векторного поля $\bar{v}_1$, входящим в (выходящим из) $\gamma([0, 1])$ будут соответствовать траектории, входящие в (выходящие из) точку y_0. Так как многообразие $M^n/\gamma([0, 1])$ диффеоморфно многообразию M^n, то поле $\bar{v}_2$ задает поле $\bar{v}$ на многообразии M^n, у которого в силу теоремы Пуанкаре – Хопфа сумма индексов, как и у поля $\bar{v}_0$, равна эйлеровой характеристике $\chi(M^n)$. Таким образом, y_0 — особая точка векторного поля $\bar{v}$ индекса $\lambda_1 + \lambda_2$.

Пусть $f\colon M^n \to \mathbb{R}^1$ — функция Морса на многообразии M^n. Изменим эту функцию, введя пары взаимно сокращающихся критических точек, так чтобы общее число критических точек не было меньше $\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|$. Тогда поле градиента функции f будет состоять из особых точек индексов $+1$ и -1, которые соответствуют критическим точкам функции f. Разбив набор этих особых точек на группы, так чтобы сумма индексов в i-й группе была равна α_i, и применив операцию 2 к точкам из каждой группы, получим требуемое поле $\bar{v}$.

2. Дифференциальные уравнения на парах многообразий. Определение 1. *Пусть M^n — гладкое многообразие, N^k — его подмногообразие, ρ — риманова метрика, а $\bar{v}$ — векторное поле на многообразии M^n. Будем говорить, что векторное поле $\bar{u}$ на подмногообразии N^k индуцировано векторным полем $\bar{v}$ в римановой метрике ρ, если для любой точки $x \in N^k$ вектор $\bar{u}(x) \in T_xN^k$ есть ортогональная в метрике ρ проекция вектора $\bar{v}(x) \in \in T_xM^n$ на подпространство T_xN^k.*

Если $\bar{v}$ — поле градиента функции f на многообразии M^n, то индуцированное векторное поле $\bar{u}$ на подмногообразии N^k совпадает с полем градиента функции g, где g — ограничение функции f на подмногообразие N^k.

Теорема 2. *Пусть N^k — подмногообразие гладкого многообразия M^n, ρ — метрика на многообразии M^n и $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ $(p \geq 1)$, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ $(s \geq 1)$ — наборы целых чисел такие, что*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \chi(M^n), \qquad \sum_{i=1}^{s} \beta_i = \chi(N^k),$$

где $\chi(M^n)$ и $\chi(N^k)$ — эйлеровы характеристики многообразий M^n и N^k соответственно. Тогда если $n - k \geq 2$, то на многообразии M^n существует векторное поле $\bar{v}$ с особыми точками, имеющими индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, такое, что векторное поле $\bar{u}$ на подмногообразии N^k, индуцированное векторным полем $\bar{v}$ в метрике ρ, имеет особые точки с индексами $\beta_1, \ldots, \beta_s$.

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 1, построим на M^n векторное поле $\bar{v}_0$ с особыми точками индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$. Рассматривая это векторное поле как сечение касательного расслоения, приведем его в общее положение с подмногообразием N^k, лежащим в нулевом сечении касательного расслоения TM^n. Полученное векторное поле $\bar{v}_1$ будет иметь особые точки с теми же индексами $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, и эти особые точки не будут лежать на подмногообразии N^k. Пусть A — трубчатая окрестность подмногообразия N^k, не содержащая особых точек векторного поля $\bar{v}_1$. Рассмотрим сужение касательного расслоения TM^n на многообразие N^k. Полученное расслоение ξ, как многообразие, имеет размерность $n + k$, касательное расслоение TN^k является подрасслоением этого расслоения и, как многообразие, имеет размерность $2k$. Сужение векторного поля $\bar{v}$ на подмногообразие N^k, рассматриваемое как сечение расслоения ξ, имеет размерность k и в общем положении пересекает касательное расслоение TN^k по подмногообразию L размерности $2k - n$.

Пусть $\bar{u}_1$ — векторное поле на многообразии N^k, индуцированное векторным полем $\bar{v}_1$. Очевидно, что $\bar{u}_1(x) = \bar{v}_1(x)$ тогда и только тогда, когда точка x принадлежит подмногообразию L, а $\bar{u}_1(x) = 0$ тогда и только тогда, когда вектор $\bar{v}_1(x)$ перпендикулярен подмногообразию N^k в метрике ρ. Таким образом, особые точки векторного поля $\bar{u}_1$ не лежат на подмногообразии L. По векторному полю $\bar{u}_1$ можно построить векторное поле $\bar{u}$ на многообразии N^k такое, что $\bar{u}(x) = \bar{u}_1(x)$ для всех точек x из некоторой окрестности подмногообразия L. Действительно, две особые точки индексов $+1$ и -1 можно ввести в окрестности V любой неособой точки x_0 такой, что V не содержит особых точек и замыкание окрестности V не пересекает подмногообразия L.

Так как подмногообразие L имеет в многообразии N^k коразмерность не меньше двух, то любые две особые точки можно соединить путем, не пересекающим L, и выбирать окрестность W этого пути, замыкание которой не пересекает подмногообразия L и не содержит других особых точек. Заменим, как в теореме 1, эти две особые точки с индексами λ_1 и λ_2 одной особой точкой с индексом $\lambda_1 + \lambda_2$. При этом векторное поле будет изменяться только на множестве W.

Рассмотрим векторное поле $\bar{u} - \bar{u}_1$ на многообразии N. Продолжим это векторное поле до векторного поля $\bar{w}$ в трубчатой окрестности A подмногообразия N^k следующим образом: координаты вектора $\bar{w}(x)$ равны координатам вектора $\bar{u}(x_0) - \bar{u}_1(x_0)$ в некоторой карте, если точка x находится в слое трубчатой окрестности над точкой x_0. Выберем трубчатую окрестность A настолько малой, чтобы векторы $\bar{w}(x)$ не были параллельны векторам $\bar{v}(x)$, если $\bar{w}(x) \neq 0$.

По лемме Урысона существует гладкая функция $f\colon M^n \to \mathbb{R}^1$ такая, что

$$f(x) = 1, \quad \text{если } x \in N^k,$$

$$f(x) = 0, \quad \text{если } x \in M^n \setminus A,$$

$$0 < f(x) < 1, \quad \text{если } x \in A \setminus N^k.$$

Рассмотрим векторное поле $\bar{v} = \bar{v}_1 + f\bar{w}$. По построению это поле имеет на многообразии M^n тот же набор особых точек, что и поле $\bar{v}_1$, а поле, индуцированное ним на подмногообразии N^k, совпадает с полем $\bar{u} = \bar{u}_1 + 1 \cdot (\bar{u} - \bar{u}_1) = \bar{v}_1 + f\bar{w}$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай векторных полей на паре многообразий (M^n, N^k), где многообразие N^k вложено в многообразие M^n, таких, что ограничение векторного поля $\bar{v}$, заданного на многообразии M^n, на многообразие N^k есть касательное векторное поле к N^k, т. е. векторы, индуцированные полем $\bar{v}$, совпадают с соответствующими векторами поля $\bar{v}$. Очевидно, что в этом случае индуцированное векторное поле не зависит от метрики ρ на многообразии M^n и каждая особая точка векторного поля $\bar{v}$, лежащая на подмногообразии N^k, есть особая точка векторного поля $\bar{v}$, заданного на многообразии M^n.

Теорема 3. *Пусть* N^k — *подмногообразие гладкого многообразия* M^n, $n - k \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ *и* $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — *наборы целых чисел такие, что*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \chi(M^n), \qquad \sum_{i=1}^{s} \beta_i = \chi(N^k), \qquad 1 \leq s \leq p.$$

Тогда на многообразии M^n *существует векторное поле* $\bar{v}$ *с особыми точками, имеющими индексы* $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, *касающееся подмногообразия* N^k *и такое, что векторное поле, индуцированное векторным полем* $\bar{v}$ *на подмногообразии* N^k, *имеет особые точки с индексами* $\beta_1, \ldots, \beta_s$.

Доказательство. Построим, как в теореме 1, векторное поле $\bar{u}_1$ на подмногообразии N^k, которое имеет особые точки с индексами $\beta_1, \ldots, \beta_s$. Выберем на подмногообразии N^k нормальное в подмногообразии M^n к нему векторное поле $\bar{u}_2$, не нулевое в особых точках векторного поля $\bar{u}_1$. Пусть U —

трубчатая окрестность подмногообразия N^k. Согласно теореме Уитни существует гладкая функция f, заданная на многообразии M^n, такая, что

$$f(x) = 0, \quad \text{если } x \in N^k,$$

$$f(x) = 1, \quad \text{если } x \in M^n \setminus U,$$

$$0 < f(x) < 1, \quad \text{если } x \in U \setminus N^k.$$

Пусть $\bar{u} = (1-f)\bar{u}_1 + f\bar{u}_2$ — векторное поле на U, где $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ — векторные поля на U, векторы которых в каждом слое трубчатой окрестности имеют в некоторой карте те же координаты, что и соответствующие векторы на N^k. Продлим поле $\bar{u}$ на все многообразие M^n произвольным образом и, рассматривая его как сечение касательного расслоения, приведем в общее положение с нулевым сечением, оставив его неизменным на множестве U. Введем пары дополнительных особых точек индексов $+1$ и -1 и будем складывать особые точки вдоль путей, внутренности которых не пересекают подмногообразие N^k. При этом не допускается сложение двух точек, лежащих на подмногообразии N^k. Полученное таким образом поле будет касательным к подмногообразию N^k и удовлетворять всем условиям теоремы.

Замечания. 1. В каждой особой точке на подмногообразии N^k индексами векторного поля $\bar{v}$ и индуцированного векторного поля $\bar{u}$ могут быть два произвольных целых числа.

2. Если $n-k \geq 2$ или $n-k=1$ и подмногообразие N^k не разделяет многообразия M^n, то теорема справедлива и при $s=0$. Т. е. если $\chi(N^k)=0$, то на многообразии M^n существует векторное поле $\bar{v}$, касательное к подмногообразию N^k, без особых точек на N^k и с заданным набором особых точек $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_p$ на многообразии M^n $\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \chi(M^n)\right)$.

Если подмногообразие N разбивает многообразие M^n на два многообразия M_1 и M_2 с краем $\partial M_1 = \partial M_2 = N$, то вопрос существования векторного поля $\bar{v}$ на многообразии M^n с заданным набором индексов, касательного к подмногообразию N и без особых точек на N, равносилен вопросу существования векторного поля на многообразии с краем, которое касается края, с особыми точками, которые не лежат на краю и имеют заданный набор индексов.

3. Дифференциальные уравнения на многообразиях с краем. Предложение. *Пусть M — гладкое многообразие с краем N, $\chi(N)=0$. На многообразии M существует векторное поле, касательное к многообразию N, все особые точки которого внутренние и имеют индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = \chi(M),$$

где $\chi(M)$ — эйлерова характеристика многообразия M с краем N.

Доказательство. Так как эйлерова характеристика многообразия N равна 0, то на многообразии N существует векторное поле $\bar{u}$ без особых точек. Пусть $\bar{w}$ — векторное поле на N, нормальное к N, без особых точек и направленное вовне многообразия M. Продлим это векторное поле на воротник $N \times$ $\times [0, 1]$ по формуле

$$\bar{v}(x,t) = t\bar{u}(x) + (1-t)\bar{w}(x),$$

где точка $x \in N$, $t \in [0, 1]$. Продлим поле $\bar{v}$ на многообразие M, так чтобы все особые точки были изолированными. Тогда сумма индексов этих особых точек будет равна эйлеровой характеристике $\chi(M)$. Используя процессы введения пар особых точек индексов $+1$ и -1 и сложения особых точек, получаем искомое векторное поле.

Рассмотрим произвольное векторное поле $\bar{v}$ на многообразии M^n с краем $\partial M^n = N$. Будем предполагать, что векторное поле $\bar{v}$ не имеет особых точек на крае N. Пусть $\bar{u}$ — векторное поле, индуцированное полем $\bar{v}$ на крае N. Построим поле $\bar{w}$ на многообразии M', полученном из многообразия M^n с помощью приклейки воротника $N \times [0, 1]$ путем отождествления точек $x \in N = \partial M^n$ с точками $(x, 0) \in N \times [0, 1]$, которое есть продолжением поля $\bar{v}$. Пусть $\bar{a}$ — векторное поле, заданное на $N \times \{1\}$, ортогональное к M', направленное вовне многообразия M' и такое, что

$$|\bar{a}| > |\bar{v}(x, 0)|$$

для любого $x \in N$. Продолжим поле $\bar{v}$ на воротник $N \times [0, 1]$ по формуле

$$\bar{v}(x,t) = t\bar{a} + (1-t)\bar{v}(x, 0).$$

Сгладив это поле, получим поле $\bar{w}$. Очевидно, что для точки $x \in N$ существует $t \in (0, 1)$ такое, что $\bar{w}(x, t) = 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{u}(x) = 0$, и вектор $\bar{v}(x, 0)$ направлен внутрь многообразия M^n. При этом индексы соответствующих особых точек равны по модулю и противоположны по знаку. Обозначим через $\delta_+(v)$ сумму индексов особых точек векторного поля $\bar{u}$, в которых векторное поле $\bar{v}$ направлено внутрь, а через $\delta_-(v)$ — вовне многообразия M^n. Тогда выполняются равенства

$$\chi(M^n) = \sum \operatorname{ind}\bar{v} - \delta_+(v),$$

$$\chi(M^n) = \sum \operatorname{ind}\bar{v} + \delta_-(\bar{v}) \text{ при четном } n,$$

$$\chi(M^n) = -\sum \operatorname{ind}\bar{v} - \delta_-(\bar{v}) \text{ при нечетном } n.$$

Здесь $\chi(M^n) = \chi(M') = \sum \operatorname{ind}\bar{w}$ — эйлерова характеристика многообразия M^n с краем N.

Теорема 4. *Пусть M^n — гладкое многообразие с краем N, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, $\beta_1, \ldots, \beta_k$, $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_p$ — наборы целых чисел. Тогда и только тогда существует векторное поле $\bar{v}$ с внутренними особыми точками с индексами $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_s$ и с индуцированным векторным полем $\bar{u}$ на многообразии N такое, что в особых точках поля $\bar{u}$ с индексами $\beta_1, \ldots, \beta_k$ поле $\bar{v}$ направлено внутрь многообразия M^n, а в особых точках поля $\bar{u}$ с индексами $\beta_{k+1}, \ldots$ $\ldots, \beta_p$ — вовне многообразия M^n, когда*

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i = \chi(N),$$

$$\chi(M^n) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \text{ при четном } n,$$

$$\chi(M^n) = -\sum_{i=1}^{s} \alpha_i + \sum_{i=k+1}^{p} \beta_i \ \textit{при нечетном } n.$$

Доказательство. Предыдущее обсуждение показывает, что для любого векторного поля $\bar{v}$ условия теоремы выполняются. Покажем обратное, что если наборы индексов удовлетворяют условиям теоремы, то существует векторное поле с заданными наборами индексов. Действительно, пусть $\bar{u}_0$ — произвольное векторное поле, касательное к многообразию $N = \partial M^n$, особые точки которого имеют индексы $\beta_1, \ldots, \beta_k$, $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_p$. Существование таких векторных полей доказано в теореме 1. Пусть $\bar{u}_1$ — векторное поле, заданное на краю N, ортогональное к N, направленное внутрь многообразия M^n в критических точках с индексами $\beta_1, \ldots, \beta_k$ и вовне в критических точках с индексами $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_p$. Рассмотрим поле

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_0 + \bar{u}_1.$$

Продолжим это поле до поля $\bar{v}_0$ на всем многообразии M^n произвольным образом. Тогда поле $\bar{v}_0$ индуцирует на многообразии N поле $\bar{u}_2$ с искомым набором индексов и для него выполняются условия теоремы. Применяя процессы введения пар особых точек индексов $+1$ и -1 и сложения особых точек, описанные в теореме 1, к полю $\bar{v}_0$, получаем требуемое поле $\bar{v}$.

4. Поле градиента гладкой функции. Определение 2. *Пусть $\bar{v}$ — векторное поле на многообразии M^n, имеющее только изолированные особые точки. Графом $G(\bar{v})$ векторного поля $\bar{v}$ назовем ориентированный граф, вершины которого α_i находятся во взаимно однозначном соответствии с особыми точками x_i векторного поля $\bar{v}$, и две вершины соединены дугой, если существует интегральная траектория, начинающаяся и заканчивающаяся в соответствующих особых точках векторного поля.*

Определение 3. *Контуром в графе G называется последовательность $S = (\alpha_0, \gamma_1, \alpha_1, \gamma_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \gamma_n, \alpha_n)$ его чередующихся вершин α_i и дуг γ_i такая, что α_{i-1} — начало, а α_i — конец дуги γ_i, $i = \overline{1, n}$, и $\alpha_0 = \alpha_n$.*

Теорема 5. *Пусть $\bar{v}$ — гладкое векторное поле на гладком многообразии M^n, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *все особые точки изолированные, и для каждой особой точки x_i существуют окрестность U_i и гладкая функция f_i, определенная на U_i, такая, что $\bar{v}$ есть поле градиента функции f_i в некоторой метрике ρ_i на U_i;*

2) *граф $g(\bar{v})$ векторного поля $\bar{v}$ не содержит контуров.*

Тогда существует риманова метрика ρ на многообразии M^n и функция $f\colon M^n \to \mathbb{R}^1$ такая, что $\operatorname{grad}(f) = \bar{v}$.

Доказательство. Пусть ρ_0 — некоторая фиксированная метрика на многообразии M^n. Так как граф векторного поля не содержит контуров, то особые точки x_i можно упорядочить так, что если $i < j$, то в графе $G(\bar{v})$ не существует пути, начинающегося в вершине α_i и заканчивающегося в вершине α_j. Без ограничения общности будем предполагать, что каждая окрестность U_i гомеоморфна открытому диску $\mathring{D}^n$ и $U_i \cap U_j = \varnothing$, $i \neq j$. Определим функцию f на U_i так, что $f(x_i) = i$, $f(y) = f_i(y) + i - f_i(x_i)$, $y \in U_i$. При этом U_i выберем настолько малым, что

$$|f(y)-f(x_i)| < \frac{1}{3}, \quad y \in U_i.$$

Определим f на $M^n \setminus \bigcup_i U_i$. Пусть $x \in M^n \setminus \bigcup_i U_i$, $\gamma(x)$ — траектория векторного поля $\bar{v}$, проходящая через точку x. Пусть x_i и x_j — точки, в которых начинается и заканчивается траектория γ_x, $y_i = \gamma_x \bigcap \partial U_i$, $y_j = \gamma_x \bigcap \partial U_j$ и $y_i = \gamma_x(t_i)$, $y_i = \gamma_x(t_i)$. Положим

$$f(x) = f(y_i) + \frac{S_\gamma(t_i, 0)}{S_\gamma(t_i, t_j)}(f(y_i) - f(y_i)),$$

где $S_\gamma(t_i, t)$ — длина дуги траектории γ_x в метрике ρ_0 между t_i и t. Таким образом, функция f возрастает от $f(y_i)$ до $f(y_i)$ вдоль γ_x пропорционально длине дуги γ_x. Сгладим функцию f на границе ∂U_i, как в [4]. Метрика ρ может быть задана следующим образом: для любой точки x, $x \neq x_i$, выберем систему координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$, направив x^1 вдоль интегральной траектории, проходящей через точку x, а $x^2, \ldots, x^n$ выберем лежащими на поверхности уровня функции f, проходящей через точку x. Скалярное произведение в точке x зададим пропорционально стандартному, а именно:

$$\rho(x, y) = \frac{|\bar{v}(x)|}{|\partial f(x) / \partial x|} \sum_{i=1}^{n} x^i y^i.$$

Используя разбиение единицы, склеим эту метрику с метриками ρ_i, заданными на U_i. Полученная метрика и будет искомой.

Определение 4. *Гладкая функция $f\colon M^n \to \mathbb{R}^1$ называется минимальной, если любая другая гладкая функция $g\colon M^n \to \mathbb{R}^1$ имеет число всех критических точек не меньше чем функция f. Обозначим это число через $q(M^n)$.*

Определение 5. *Набор целых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ называется допустимым для многообразия M^n, если $\alpha_i = 1$, $\alpha_k = (-1)^n$ и $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \chi(M^n)$.*

Определение 6. *Набор целых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ называется реализуемым гладкой функцией f, если поле градиента функции f в некоторой метрике ρ имеет k изолированных особых точек и их индексы равны $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.*

Очевидно, что если $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — индексы особых точек $x_1, \ldots, x_k$ векторного поля градиента функции f и $f(x_i) \leq f(x_j)$, если $i \leq j$, то набор $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ является допустимым.

Теорема 6. *Пусть M^n — гладкое многообразие, $n \geq 4$. Тогда для допустимого набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ существует гладкая функция f, которая его реализует тогда и только тогда, когда $k \geq q(M^n)$.*

Доказательство. Пусть f — минимальная функция. Построим функцию f_1 с тем же числом критических точек, что и у функции f, и у поля градиента которой существует интегральная траектория, которая начинается в точке минимума, а заканчивается в точке максимума функции f_1. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_s$ — критические уровни функции f такие, что $y_i < y_j$, если $i < j$, x_0 и x_s — точки минимума и максимума функции f. Положим

$$y_{i+1/2} = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}.$$

Пусть $z_1 \in f^{-1}(y_1)$ — регулярная точка отображения f, γ_1 — траектория поля градиента, проходящая через z_1. Очевидно, что γ_1 начинается в точке минимума функции f. Если γ_1 заканчивается в точке максимума, то $f_1 = f$. Предположим, что траектория γ_1 заканчивается в критической точке x_i, $f(x_i) = y_i$, $i < s$. Пусть $z_i \in f^{-1}(y_i)$,

$$p_i = \gamma_1 \cap f^{-1}(y_{i-1/2}),$$

$$q_i = \gamma_i \cap f^{-1}(y_{i-1/2}).$$

Здесь γ_i — интегральная траектория, проходящая через точку z_i. При этом точку z_i выберем таким образом, чтобы точки p_i и q_i попали в одну компоненту связности подмногообразия $f^{-1}(y_{i-1/2})$. Тогда существует объемлемая изотопия многообразия $f^{-1}(y_{i-1/2})$, переводящая точку q_i в точку p_i. Эта изотопия задает векторное поле (набор интегральных траекторий) на подмногообразии $f^{-1}\left(\left[\, y_{i-1/2} - \varepsilon, y_{i-1/2} + \varepsilon \,\right]\right)$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Сгладив это векторное поле на границе $f^{-1}(y_{i-1/2} - \varepsilon)$ и $f^{-1}(y_{i-1/2} + \varepsilon)$, получим, что интегральная траектория γ_1 проходит через точку z_i. Применив эти рассуждения ко всем критическим точкам z_j, $f(z_j) < y_s$, построим векторное поле, у которого траектория γ_1 начинается в точке z_0 и заканчивается в точке z_s. Применив теорему 5 к этому векторному полю, построим функцию f_1, имеющую для своего поля градиента интегральные траектории, начинающиеся и заканчивающиеся в точках z_0 и z_s соответственно, с тем же набором критических точек, что и функции f.

Очевидно, что интегральные траектории, достаточно близкие к траектории γ_1, также начинаются и заканчиваются в точках z_0 и z_s. Вводя пары особых точек индексов $+1$ и -1 вдоль этих траекторий и складывая особые точки в соответствующих критических уровнях, как в [6], получим искомую функцию f.

5. Градиентные поля на двумерных многообразиях. Теорема 7. *Пусть y_0 — особая точка векторного поля $\bar{v}$ градиента функции f на двумерном многообразии M^2. Тогда ее индекс не меньше двух.*

Доказательство. Выберем окрестность U точки y_0 и координаты (u, v) в ней так, что y_0 — начало координат и в круге $B^2 = \{(u, v)\colon\ u^2 + v^2 \le 1\}$ нет других критических точек, кроме точки y_0. На границе круга B^2 введем параметризацию $\partial B^2 = S^1 = \{(u, v)\colon\ u^2 + v^2 \le 1\} = \{(u, v)\colon\ u = \cos t,\ v = \sin t,\ 0 \le \le t \le 2\pi\}$. Обозначим через x_t точку на окружности S^1 с координатами $(\cos t, \sin t)$, через $\bar{\tau}(t)$ касательный вектор к окружности S^1 в точке x_t:

$$\bar{\tau}(t) = \{-\sin t, \cos t\},$$

а через $\alpha(t)$ непрерывную функцию угла, откладываемого против часовой стрелки между вектором $\bar{\tau}(t)$ и вектором поля $\bar{v}$ в точке x_t. Тогда по определению индекса особой точки на двумерном многообразии $\alpha(2\pi) = \alpha(0) + 2(k - - 1)\pi$, где k — индекс особой точки y_0.

Определение 7. *Будем говорить, что функция $\alpha(t)$, возрастая (убывая), проходит в точке t_0 через уровень α_0, если $\alpha(t_0) = \alpha_0$ и существует ок-*

рестность $V = (t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_2)$ *точки* t_0 $(\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0)$ *такая, что функция* α *монотонно не убывает (не возрастает) на интервале* V *и*

$$\alpha(t_0 - \varepsilon_1) < \alpha_0 < \alpha(t_0 + \varepsilon_2) \quad (\alpha(t_0 - \varepsilon_1) > \alpha_0 > \alpha(t_0 + \varepsilon_2)).$$

Лемма. *Если траектория* $\gamma(s)$ *векторного поля* $\bar{v}$ *проходит через точку* x_{t_0} *на окружности* S^1 *такую, что в точке* t_0 *функция* $\alpha(t)$, *возрастая, проходит через уровень* πn $(n \in \mathbb{Z})$, *то локально в окрестности точки* x_{t_0} *эта траектория лежит в круге* B^2.

Доказательство. Предположим от противного, что траектория $\gamma(s)$ проходит через точку x_{t_0} $(\gamma(s_0) = x_{t_0})$ и выходит из круга $B^2_{1+\varepsilon} = \{(u, v): u^2 + v^2 \leq 1 + \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Для определенности предположим, что $n = 0$ и $\gamma(s)$ выходит из круга $B^2_{1+\varepsilon}$ при возрастании параметра s. Выберем ε настолько малым (это можно сделать в силу непрерывности векторного поля $\bar{v}$), чтобы

$$\alpha_\varepsilon(t_0 - \varepsilon_1) < 0 < \alpha_\varepsilon(t_0 + \varepsilon_2),$$

где α_ε — функция угла между касательным вектором к границе $\partial B^2_{1+\varepsilon} = S^1_{1+\varepsilon}$ и соответствующим вектором векторного поля $\bar{v}$, в круге $B^2_{1+\varepsilon}$ не было других особых точек, кроме y_0, и так, чтобы траектория, проходящая через точку $x_{t_0+\varepsilon_2}$, пересекала $S^1_{1+\varepsilon}$ в точке y с параметром $t < t_0 + \varepsilon_2$ (для этого ε_2 должно быть таким, чтобы $\alpha(t_0 + \varepsilon_2) < \pi / 2$). Тогда существует $t_1 \in (t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_2)$ такое, что $\alpha_\varepsilon(t_1) = 0$. Обозначим эту точку на окружности $S^1_{1+\varepsilon}$ через y_1. Аналогично для любого ε_i, $0 < \varepsilon_i < \varepsilon$, существует t_i такое, что $\alpha_{\varepsilon_i}(t_i) = 0$, причем t_i непрерывно зависит от ε_i. Рассмотрим путь β, состоящий из трех частей:

1) точки x_{t_i} на $S^1_{\varepsilon_i}$ $(\alpha_{\varepsilon_i}(t_i) = 0)$;
2) дуги окружности S^1_ε, идущей от точки y_1 к точке y;
3) дуги траектории векторного поля $\bar{v}$, идущей из точки y в точку $x_{t_0+\varepsilon_2}$.

Тогда траектория γ выходит из круга $B^2_{1+\varepsilon}$, должна проходить через точку пути β, но это невозможно, так как все векторы поля $\bar{v}$ в точках пути β направлены внутрь круга $B^2_{1+\varepsilon}$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Аналогично можно показать, что если функция $\alpha(t)$, убывая, проходит в точке t_0 через уровень πn, $n \in \mathbb{Z}$, то локально в окрестности точки x_{t_0} интегральная траектория, проходящая через эту точку, не пересекает внутренности круга B^2.

Докажем, что если y_0 — особая точка индекса 2 и существует только две точки x_1 и x_2 на окружности S^1, в которых функция α, возрастая, проходит через уровень πn, $n \in \mathbb{Z}$, то траектории векторного поля $\bar{v}$, проходящие через точки x_1 и x_2, начинаются и заканчиваются в особой точке y_0. Действительно, пусть $\gamma_1(s)$ — траектория, проходящая через точку x_1, а $\gamma_1(s)$ — через точку x_2, β_1 — дуга окружности S^1 между точками x_1 и x_2, в точках которой векторы векторного поля $\bar{v}$ направлены внутрь круга B^2 или касаются окружности S^1, а β_2 — дуга окружности S^1 между точками x_2 и x_1, в точках которой векторы векторного поля $\bar{v}$ направлены вне круга B^2 или касаются окружности S^1.

Если траектория γ_1 при возрастании параметра s (аналогично при убывании параметра s) выходит из круга B^2, то она пересекает дугу β_2 в некоторой точке x_3 и, таким образом, дугой, заключенной между x_1 и x_3, делит круг B^2 на две части: A_1 и A_2.

Если точки y_0 и x_2 лежат в одной части A_1, то, так как траектория γ_1 не может войти во внутренность области A_2 через дугу окружности S^1 между точками x_3 и x_1, она должна начинаться в некоторой особой точке внутри области A_2, что невозможно, так как в круге B^2 нет других особых точек, кроме точки y_0.

Пусть точки y_0 и x_2 лежат в разных частях A_1 и A_2 и траектория γ_1 начинается в точке y_0. Аналогично, рассмотрев траекторию γ_2, можно показать, что она начинается или заканчивается в особой точке y_0. Но если точки y_0 и x_2 лежат в разных областях A_1 и A_2, то траектории γ_1 и γ_2 должны пересекаться, что невозможно.

Таким образом, каждая из траекторий γ_1 и γ_2 полностью лежит в круге B^2 и начинается, и заканчивается в особой точке y_0. Но если γ_1 и γ_2 — траектории векторного поля градиента функции f, то эта функция строго возрастает вдоль этих траекторий, что невозможно, так как

$$f(y_0) = f(\gamma_1(-\infty)) = f(\gamma_1(+\infty)) = f(\gamma_2(-\infty)) = f(\gamma_2(+\infty)).$$

Рассмотрим теперь случай, когда для функции $\alpha(t)$ существует более двух точек, в которых она проходит через уровни πn, $n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что разность между числом таких точек, в которых функция $\alpha(t)$ возрастает, и числом точек, в которых она убывает, проходя уровни πn, $n \in \mathbb{Z}$, равна $2(k-1)$, где k — индекс особой точки y_0.

Пусть x_i — точка на окружности S^1, в которой функция $\alpha(t)$, возрастая, проходит через уровень πn, $n \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i(s)$ — интегральная траектория, проходящая через точку x_i. Так как интегральная траектория поля градиента не может начинаться и заканчиваться в одной особой точке y_0, то существует такая точка y_i, в которой траектория $\gamma_i(s)$ выходит из круга B^2. Тогда дуга траектории $\gamma_i(s)$, заключенная между точками x_i и y_i, разбивает круг B^2 на две части. Обозначим через A ту часть, которая содержит точку y_0. При этом граница области A в точке x_i должна быть гладкой. Если это не так, то выберем другое направление движения по траектории $\gamma_i(s)$ из точки x_i. Сгладим границу ∂A в точке y_i и обозначим полученную кривую через S_1^1, а соответствующую область, ограниченную ею, через B_1^2.

Очевидно, что пара (B_1^2, S_1^1) диффеоморфна паре (B^2, S^1) и на ней можно ввести свои координаты (u^2, v^1), так что S_1^1 будет единичной окружностью в этих координатах. Рассматривая параметризацию этой окружности и вводя функцию угла α^1 между касательным вектором к S_1^1 и векторным полем $\bar{v}$, видим, что эта функция имеет, по крайней мере, на две точки, в которых она проходит через уровни πn, меньше, чем функция α (в точке x_i функция α^1

не проходит через уровни πn, и отсутствуют все точки проходов через уровни πn на дуге окружности S_1^1 между точками x_i и y_i).

Пара (B_1^2, S_1^1), в свою очередь, диффеоморфна паре (B_2^2, S_2^1), функция α^2 для которой имеет, по крайней мере, на две точки проходов через уровни πn меньше, чем функция α^1. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не останется две точки, в которых функция α^i проходит через уровни πn. А так как интегральные траектории, проходящие через эти точки, начинаются и заканчиваются в особой точке y_0, то, таким образом, доказано, что не существует гладкой функции f на двумерном замкнутом многообразии M^n, поле градиента которой имеет особую точку индекса $k = 2$.

В случае $k > 2$ можно показать, что существует траектория векторного поля, начинающаяся и заканчивающаяся в особой точке y_0, что невозможно для поля градиента функции f. Таким образом, теорема полностью доказана.

1. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М., Л.: ОГИЗ, 1947. – 390 с.
2. *Hopf H.* Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten // Math. Ann. – 1926. – **96**. – P. 209–221.
3. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. – М.: Мир, 1972. – 260 с.
4. *Хирш М.* Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979. – 280 с.
5. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
6. *Smale S.* On gradient dynamical systems // Ann. math. – 1961. – **74**, № 1. – P. 199–206.

Получено 05.10.93