УДК 512.546

И. В. Протасов (Киев. ун-т)

РАЗБИЕНИЯ ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

We propose a new method for the partition of direct products of groups into $\mathfrak{A}$-dense subsets. By using this method, we prove the following generalization of the Comfort–van Mill theorem: An arbitrary nondiscrete topological Abelian group with a finite number of second-order elements can be partitioned into countable number of dense subsets.

Запропоновано новий метод розбиття прямих добутків груп на $\mathfrak{A}$-щільні підмножини. Цим методом доведено узагальнення теореми Комфорта – ван Мілла, яке полягає в тому, що довільну недискретну топологічну абелеву группу зі скінченним числом елементів порядку 2 можна розбити на зліченне число щільних підмножин.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство непустых подмножеств группы G. Подмножество $D \subseteq G$ называется *$\mathfrak{A}$-плотным*, если $gU \bigcap D \neq \varnothing$ для всех $g \in G$, $U \in \mathfrak{A}$. Различные задачи о разбиениях групп на $\mathfrak{A}$-плотные подмножества рассматривались в работах [1 – 5]. Первым результатом в этом направлении была замечательная теорема Комфорта – ван Милла [1], согласно которой любую недискретную абелеву группу с конечным числом элементов порядка 2 можно разбить на два плотных подмножества.

Главная цель данной работы — доказать следующее обобщение теоремы Комфорта – ван Милла: любую недискретную абелеву группу с конечным числом элементов порядка 2 можно разбить на счетное число плотных подмножеств. Для доказательства этого утверждения предложен новый метод перемен знаков разбиения прямых произведений групп. Помимо основного результата этим методом доказан ряд утверждений, представляющих самостоятельный интерес. В частности, любая бесконечная подгруппа G прямого произведения счетного семейства конечных групп без элементов порядка 2 разбивается на счетное число подмножеств, плотных в любой недискретной топологии на группе G. Это разбиение примечательно следующим алгебраическим свойством: каждое подмножество разбиения пересекается с любым смежным классом группы G по любой бесконечной подгруппе.

Кратко о структуре работы. В п. 1 указаны способы построения $\mathfrak{A}$-плотных подмножеств прямых произведений групп для достаточно общих семейств подмножеств $\mathfrak{A}$. Конкретными примерами таких семейств являются база окрестностей единицы недискретной топологии на группе, семейство подмножеств, каждое из которых является окрестностью единицы некоторой недискретной топологии на группе, семейство всех бесконечных подгрупп группы. В п. 2 содержатся доказательства результатов о разложимых топологических пространствах, сильно и и абсолютно разложимых группах. Основные конструкции из п. 1 применяются в п. 3 для разбиения подгрупп прямых произведений групп на топологически плотные подмножества. Наконец, в п. 4 доказывается теорема о разбиении недискретной абелевой группы с конечным числом элементов порядка 2 на счетное число плотных подмножеств.

1. Плотные подмножества прямых произведений групп. Пусть γ — бесконечный ординал, $\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ — семейство групп, $|G_\alpha| > 1$, e_α — единица группы G_α. Множество ординалов $\{\alpha : \alpha < \gamma\}$ назовем множеством индексов данного семейства групп. Отличный от единицы e элемент g прямого произведения $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ однозначно записывается в виде

$$g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \cdots g_{\alpha_n}, \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n, \quad g_{\alpha_1} \neq e_{\alpha_1}, \ldots, g_{\alpha_n} \neq e_{\alpha_n}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\operatorname{supp} g = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}, \quad l(g) = \alpha_1, \quad r(g) = \alpha_n.$$

Вполне упорядочение $<$ множества индексов порождает следующий частичный порядок $\lhd$ на множестве $G\setminus\{e\}$:

$$g_1 \lhd g_2 \Leftrightarrow r(g_1) < l(g_2).$$

Пусть каждая группа семейства $\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ не имеет элементов порядка 2. Трансфинитной индукцией множество $G_\alpha \setminus \{e_\alpha\}$ легко разбить на два подмножества G_α^+ и G_α^- так, что

$$\left(G_\alpha^+\right)^{-1} = G_\alpha^-, \quad G_\alpha^+ \cap G_\alpha^- = \varnothing.$$

Для элемента $x \in G_\alpha \setminus \{e_\alpha\}$ положим

$$s(x) = \begin{cases} +, & \text{если } x \in G_\alpha^+; \\ -, & \text{если } x \in G_\alpha^-. \end{cases}$$

Такая градуировка сомножителей прямого произведения $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ позволяет каждому нееединичному элементу $g = g_{\alpha_1} \cdots g_{\alpha_n}$ группы G приписать последовательность знаков

$$s(g) = s(g_{\alpha_1}) s(g_{\alpha_2}) \ldots s(g_{\alpha_n}).$$

Обозначим через $\nu(g)$ число перемен знаков в последовательности $s(g)$. Ясно, что $\nu(g) = \nu(g^{-1})$. Предположим, что $g \lhd h$. Если последний элемент последовательности $s(g)$ и первый элемент последовательности $s(h)$ совпадают, то $\nu(gh) = \nu(g) + \nu(h)$. Иначе, $\nu(gh) = \nu(g) + \nu(h) + 1$. Значит, для элементов g, h можно подобрать такое число $i = \pm 1$, что $\nu(gh^i) = \nu(g) + \nu(h^i)$.

Определим следующее семейство подмножеств группы G:

$$D(k, n) = \{g \in G : \nu(g) \equiv k (\operatorname{mod} n)\}, \quad 0 \le k < n < \omega.$$

Заметим, что семейство подмножеств $\{D(2^n, 2^{n+1}) : 0 < n < \omega\}$ дизьюнктно, т. е. подмножества этого семейства попарно не пересекаются.

Пусть γ — предельный ординал. Семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств группы $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ назовем *конфинальным*, если для любых ординала $\alpha < \gamma$ и подмножества $U \in \mathfrak{A}$ найдется такой элемент $g \in U$, что $\alpha < l(g)$.

Семейство $\mathfrak{A}$ бесконечных подмножеств произвольной бесконечной группы G назовем *мультипликативным*, если для любого подмножества $U \in \mathfrak{A}$ найдется такое подмножество $V \in \mathfrak{A}$, что

$$V = V^{-1}, \quad V \subseteq U, \quad VV \subseteq U.$$

Напомним, что подмножество D группы G называется $\mathfrak{A}$-*плотным*, если $gU \cap D \ne \varnothing$ для всех $g \in G$, $U \in \mathfrak{A}$.

1.1. Теорема. *Пусть γ — предельный ординал, $\mathfrak{A}$ — конфинальное мультипликативное семейство подмножеств прямого произведения $G = \times\{G_\alpha :$ $\alpha < \gamma\}$ групп без элементов порядка* 2. *Подмножества $D(k, n)$ $\mathfrak{A}$-плотны для всех $0 \le k < n < \omega$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное подмножество $U \in \mathfrak{A}$ и покажем вначале, что $U \cap D(0, n) \ne \varnothing$ для всех натуральных чисел n. Пользуясь мультипликативностью семейства $\mathfrak{A}$, выберем такое симметричное подмножество $U \in \mathfrak{A}$, что $V^k \subseteq U$ для всех k, $1 \le k \le n$. Так как семейство $\mathfrak{A}$

конфинально, найдутся такие целое число m, $0 \le m < n$, и элементы $g_1, g_2, \dots$ $\dots, g_n \in V$, что

$$g_1 \lhd g_2 \lhd \dots \lhd g_n, \quad \nu(g_k) = k (\mathrm{mod}\, n), \quad 1 \le k \le n.$$

Выберем такие числа $i_1, i_2, \dots, i_n$, равные ± 1, что

$$\nu\left(g_1^{i_1} g_2^{i_2} \dots g_n^{i_n}\right) = \nu\left(g_1^{i_1}\right) + \nu\left(g_2^{i_2}\right) + \dots + \nu\left(g_n^{i_n}\right).$$

Положим $h = g_1^{i_1} g_2^{i_2} \dots g_n^{i_n}$ и заметим, что $h \in U \cap D(0, n)$. Возьмем произвольный элемент $g \in G$ и в подмножестве V выберем такие элементы $h_1, h_2, \dots$ $\dots, h_n$, что

$$g \lhd h_1 \lhd h_2 \lhd \dots \lhd h_n, \quad \nu(h_k) \equiv k (\mathrm{mod}\, n), \quad 1 \le k \le n.$$

Подберем такие числа $m_1, m_2, \dots, m_n$, равные ± 1, что

$$\nu\left(g h_1^{m_1} h_2^{m_2} \dots h_k^{m_k}\right) = \nu(g) + \nu\left(h_1^{m_1}\right) + \dots + \nu\left(h_k^{m_k}\right) + k, \quad 1 \le k \le n.$$

Положим $q_k = g h_1^{m_1} h_2^{m_2} \dots h_k^{m_k}$, $1 \le k \le n$. Ясно, что $q_k \in gU$ для всех k, $1 \le$ $\le k \le n$. Осталось заметить, что $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \cap D(k, n) \ne \varnothing$ для всех k, $0 \le$ $\le k \le n$.

1.2. *Следствие.* *Пусть γ — предельный ординал, $\mathfrak{A}$ — конфинальное мультипликативное семейство подмножеств прямого произведения $G = \times \{ G_\alpha : \alpha < \gamma \}$ групп без элементов порядка 2. Существует счетное дизъюнктное семейство $\mathfrak{A}$-плотных подмножеств группы G.*

Семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств группы $G = \times \{ G_\alpha : \alpha < \gamma \}$ назовем финитарным, если для любого конечного подмножества F множества индексов найдется такое подмножество $U \in \mathfrak{A}$, что $G[F] \cap U \in \mathfrak{A}$, где $G[F] = \{ g \in G :$ $pr_\alpha g = e_\alpha$ для всех $\alpha \in F \}$.

1.3. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ – финитарное мультипликативное семейство подмножеств прямого произведения $G = \times \{ G_n : n < \omega \}$ групп без элементов порядка 2. Подмножества $D(k, n)$ $\mathfrak{A}$-плотны для всех $0 \le k < n < \omega$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что семейство $\mathfrak{A}$ на данной группе G конфинально, и применить теорему 1.1.

Следующий пример показывает, что в условии теоремы 1.3 ординал ω нельзя заменить произвольным бесконечным ординалом.

1.4. Пример. Пусть γ — ординал, $\gamma > \omega + \omega$, $G = \times \{ G_\alpha : \alpha < \gamma \}$ — прямое произведение конечных групп без элементов порядка 2. Рассмотрим семейство $\mathfrak{A}$ всех бесконечных подгрупп группы G. Ясно, что $\mathfrak{A}$ — финитарное мультипликативное семейство подмножеств группы G. Для каждого натурального числа n выделим в группах G_n, $G_{\omega+n}$ такие неединичные элементы g_n, $g_{\omega+n}$, что $s(g_n) = s(g_{\omega+n})$. Положим $h_n = g_n g_{\omega+n}$ и рассмотрим подгруппу H, порожденную элементами h_n, $1 \le n < \omega$. Далее, в группах G_0, $G_{\omega+\omega}$ выберем такие элементы g_0, $g_{\omega+\omega}$, что $s(g_0) = s(g_{\omega+\omega})$. Положим $g = g_0 g_{\omega+\omega}$. Нетрудно проверить, что $gH \subseteq D(0, 2)$. Следовательно, подмножество $D(1, 2)$ не является $\mathfrak{A}$-плотным.

Далее нам понадобится некоторое ослабление теоремы 1.3, пригодное для всех бесконечных ординалов. Предварительно сформулируем в виде леммы следующее простое замечание.

1.5. Лемма. *Пусть $G = G_1 \times G_2$, $\mathfrak{A}$ — произвольное семейство подмно-*

жеств группы G, $\mathfrak{A}_1 = \{ pr_{G_1} U : U \in \mathfrak{A} \}$. *Если подмножество* $D \subseteq G_1$ *является* $\mathfrak{A}_1$-*плотным, то подмножество* $D \times G_2$ *является* $\mathfrak{A}$-*плотным.*

1.6. Теорема. *Пусть* γ — *произвольный бесконечный ординал,* $\mathfrak{A}$ — *финитарное мультипликативное семейство подмножеств прямого произведения* $G = \times \{ G_\alpha : \alpha < \gamma \}$ *групп без элементов порядка* 2. *Предположим, что* $U \cap V \in \mathfrak{A}$ *для любых* $U, V \in \mathfrak{A}$. *Существует счетное дизъюнктное семейство* $\mathfrak{A}$-*плотных подмножеств группы* G.

Доказательство. Применим трансфинитную индукцию по классу бесконечных ординалов, определяющих число сомножителей группы G. Для первого бесконечного ординала ω утверждение непосредственно следует из теоремы 1.3. Предположим, что теорема доказана для всех бесконечных ординалов $< \gamma$.

Рассмотрим семейство подгрупп $H_\beta = \times \{ G_\alpha : \alpha < \beta \}$, $\beta < \gamma$. В каждой подгруппе H_β определим семейство подмножеств $\mathfrak{A}_\beta = \{ pr_{H_\beta} U : U \in \mathfrak{A} \}$.

Предположим, что для некоторого ординала $\lambda < \gamma$ все подмножества семейства $\mathfrak{A}_\lambda$ бесконечны. Тогда $\mathfrak{A}_\lambda$ — финитарное мультипликативное семейство подмножеств группы H_λ, удовлетворяющее условиям теоремы. Согласно предположению индукции в группе H_λ существует счетное дизъюнктное семейство $\mathfrak{A}_\lambda$-плотных подмножеств. По лемме 1.5 существует счетное дизъюнктное семейство $\mathfrak{A}$-плотных подмножеств группы G.

В противном случае для каждого ординала $\beta < \gamma$ найдется конечное подмножество $V_\beta \in \mathfrak{A}_\beta$. Положим $F_\beta = \bigcup \{ \operatorname{supp} g : g \in V_\beta \}$. Выберем такое подмножество $U_\beta \in \mathfrak{A}$, что $V_\beta = pr_{H_\beta} U_\beta$. Положим $W_\beta = U_\beta \cap G[F_\beta]$. Из финитарности семейства $\mathfrak{A}$ следует, что $W_\beta \in \mathfrak{A}$. Заметим, что $l(g) \geq \beta$ для любого неединичного элемента $g \in W_\beta$. Зафиксируем произвольное подмножество $U \in \mathfrak{A}$. Поскольку $U \cap W_\beta \in \mathfrak{A}$, то в подмножестве U найдется такой элемент h, что $l(h) \geq \beta$. Учитывая финитарность семейства $\mathfrak{A}$, заключаем, что γ — предельный ординал и семейство подмножеств $\mathfrak{A}$ конфинально. Применение следствия 1.2 завершает доказательство теоремы.

Укажем еще один способ построения плотных подмножеств прямых произведений групп. Пусть $G = \times \{ G_\alpha : \alpha < \gamma \}$ — прямое произведение произвольного семейства неединичных групп. Для каждого неединичного элемента $g \in G$ обозначим через $| \operatorname{supp} g |$ число элементов подмножества $\operatorname{supp} g$ и выберем целое число $n(g)$ так, что

$$2^{n(g)} \leq | \operatorname{supp} g | < 2^{n(g)+1}.$$

Далее используются следующие простые наблюдения. Число $n(g)$ — это номер старшего разряда в двоичном разложении числа $| \operatorname{supp} g |$. Пусть $\operatorname{supp} g \cap \operatorname{supp} h = \varnothing$. Если $| \operatorname{supp} g | = | \operatorname{supp} h |$, то $n(gh) = n(g) + 1$. Если номер младшего разряда в двоичном разложении числа h больше $n(g)$, то $n(gh) = n(h)$.

Определим следующее семейство подмножеств группы G:

$$S(k, n) = \{ g \in G : n(g) \equiv k (\operatorname{mod} n) \}, \qquad 0 \leq k < n.$$

Заметим, что семейство подмножеств $\{ S(2^n, 2^{n+1}) : n < \omega \}$ дизъюнктно.

1.7. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *мультипликативное семейство подмножеств прямого произведения* $G = \times \{ G_\alpha : \alpha < \gamma \}$ *произвольного семейства групп. Предположим, что* μ — *несчетный регулярный кардинал и* $| U | \geq \mu$, $| G_\alpha | < \mu$

для всех $U \in \mathfrak{A}$, $\alpha < \gamma$. *Подмножества* $S(k, n)$ $\mathfrak{A}$-*плотны для всех* $0 \le k < < n < \omega$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные элемент $g \in G$, подмножество $U \in \mathfrak{A}$ и числа k, n, $0 \le k < n < \omega$. Покажем, что $gU \bigcap S(k, n) \ne \varnothing$.

Обозначим $m = n(g)$ и выберем такое симметричное подмножество $V \in \mathfrak{A}$, что $V^i \subseteq U$ для всех $i = 1, 2, \ldots, 2^{m+n+2}$.

Рассмотрим семейство $\{\operatorname{supp} g : g \in V\}$ конечных подмножеств множества индексов. Из условий теоремы и леммы о пересечениях [6] следует, что данное семейство содержит подсемейство $\{\operatorname{supp} g_\eta : \eta < \mu\}$ различных подмножеств с одним числом элементов, дизъюнктное по модулю пересечения. Это означает, что

$$\operatorname{supp} g_\eta \bigcap \operatorname{supp} g_\xi = F, \quad \eta < \xi < \mu, \quad F = \bigcap \{\operatorname{supp} g_\eta : \eta < \mu\}.$$

Рассмотрим подгруппу $H = \times \{G_i : i \in F\}$ группы G. Так как $|H| < \mu$, то в семействе $\{g_\eta : \eta < \mu\}$ можно выделить равномощное подсемейство элементов, проекции которых на подгруппу H совпадают. Чтобы не нагромождать обозначений, считаем таковым само семейство $\{g_\eta : \eta < \mu\}$.

Положим $h_1 = g_1 g_2^{-1}$, $h_2 = g_3 g_4^{-1}, \ldots, h_i = g_{2i-1} g_{2i}^{-1}, \ldots$. Заметим, что семейство подмножеств $\{\operatorname{supp} h_i : 1 \le i < \omega\}$ дизъюнктно и все его подмножества содержат одинаковое число элементов.

Отбрасывая в последовательности элементов $\{h_i : 1 \le i < \omega\}$ конечное число членов, можно считать, что $\operatorname{supp} g \bigcap \operatorname{supp} h_i = \varnothing$ для всех натуральных чисел i.

Определим следующую последовательность элементов:

$$a_1 = h_1 h_2 \ldots h_{2^{m+1}}, a_2 = h_{2^{m+1}+1} h_{2^{m+1}+2} \ldots h_{2^{2(m+1)}}, \ldots .$$

Ясно, что семейство подмножеств $\{\operatorname{supp} a_i : 1 \le i < \omega\}$ дизъюнктно и все его подмножества содержат одинаковое число членов, например s. Кроме того, номер младшего разряда двоичного разложения каждого числа a_i больше m.

Наконец, определим следующие элементы:

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1 a_2, \quad b_3 = a_1 a_2 a_3 a_4, \ldots, b_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_{2^n}.$$

Процедура выбора элементов $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ обеспечила выполнение следующих соотношений:

$$n(g b_{i+1}) = n(g a_1 a_2 \ldots a_{2^i}) = m + s + i, \quad 0 \le i < n.$$

Следовательно, среди элементов $gb_1, gb_2, \ldots, gb_{n+1}$ непременно найдется элемент подмножества $S(k, n)$. Осталось заметить, что $gb_1, gb_2, \ldots, gb_{n+1} \in \in gU$.

2. О разложимости топологических пространств и топологических групп. Топологическое пространство называется *разложимым* ($\aleph_0$-*разложимым*), если его можно разбить на два (счетное число) плотных подмножества. Заметим, что если подмножество D пространства X плотно и $D \subseteq A \subseteq X$, то подмножество A также плотно. Поэтому будем пользоваться следующим более удобным определением. Топологическое пространство называется разложимым ($\aleph_0$-разложимым), если существует дизъюнктное семейство из двух (счетного числа) его плотных подмножеств.

2.1. Лемма. *Замыкание* $\aleph_0$-*разложимого подпространства топологического пространства* $\aleph_0$-*разложимо.*

2.2. Лемма. *Открытое подпространство $\aleph_0$-разложимого топологического пространства $\aleph_0$-разложимо.*

2.3. Лемма. *Объединение произвольного семейства $\aleph_0$-разложимых подпространств топологического пространства $\aleph_0$-разложимо.*

Доказательство. Пусть γ — ординал, $\{X_\alpha\colon \alpha<\gamma\}$ — семейство $\aleph_0$-разложимых подпространств топологического пространства X. Положим $Y_\beta = \bigcup\{X_\alpha\colon \alpha<\beta\}$, $\beta\le\gamma$ и трансфинитной индукцией в каждом из подпространств Y_β выделим такое дизъюнктное семейство $\{Y_\beta(n)\colon n<\omega\}$ плотных подмножеств, что $Y_\xi(n)\subset Y_\eta(n)$ для всех $\xi<\eta\le\beta$, $n<\omega$.

Для ординала $\gamma=0$ подпространство Y_0 пусто и обозначим $Y_0(n)=\varnothing$, $n<\omega$. Зафиксируем ординал $\lambda\le\gamma$ и допустим, что построены семейства $\{Y_\beta(n)\colon n<\omega\}$ для всех ординалов $\beta<\lambda$.

Если λ — предельный ординал, то в качестве $Y_\lambda(n)$ возьмем $\bigcup\{Y_\beta(n)\colon \beta<\lambda\}$, $n<\omega$.

Для ординала $\lambda=\mu+1$ обозначим через F_μ замыкание в пространстве X подпространства Y_μ. Согласно лемме 2.2 открытое подпространство $Z_\mu = X_\mu\setminus F_\mu$ пространства X_μ $\aleph_0$-разложимо. Выделим дизъюнктное семейство $\{Z_\mu(n)\colon n<\omega\}$ его плотных подмножеств. Положим $Y_{\mu+1}(n)=Y_\mu(n)\cup Z_\mu(n)$, $n<\omega$.

Искомым дизъюнктным семейством плотных подмножеств объединения подпространств $\{X_\alpha\colon \alpha<\gamma\}$ является семейство $\{Y_\gamma(n)\colon n<\omega\}$.

Напомним, что топологическое пространство называется однородным, если для любых двух его точек найдутся гомеоморфные окрестности.

2.4. Лемма. *Если однородное топологическое пространство содержит непустое $\aleph_0$-разложимое подпространство, то пространство X $\aleph_0$-разложимо.*

Доказательство. Обозначим через Y объединение всех $\aleph_0$-разложимых подпространств пространства X. По лемме 2.3 подпространство Y $\aleph_0$-разложимо, а в силу леммы 2.1 Y замкнуто в X. Допустим, что $X\setminus Y\ne\varnothing$. Так как пространство X содержит непустое $\aleph_0$-разложимое подпространство, то однородность X и лемма 2.2 обеспечивают существование непустого $\aleph_0$-разложимого подпространства в $X\setminus Y$, что противоречит определению подпространства Y.

Далее в статье рассматриваются вопросы, связанные с разложимостью топологических групп. Все топологии на группах предполагаются хаусдорфовыми и согласованными с операциями умножения и обращения элементов. Поскольку любая топология на группе однозначно определяется базой окрестностей единицы, топологическую группу обозначаем (G,τ), где G — группа, τ — база окрестностей единицы. Заметим, что плотные подмножества топологической группы (G,τ) — это в точности τ-плотные подмножества в смысле определения из п. 1.

2.5. ***Замечание.*** Для топологической группы (G,τ) обозначим через $\tau(G)$ полугруппу всех сходящихся к единице свободных ультрафильтров на группе G, введенную в работе [7]. Обозначим через B счетную группу экспоненты 2. Используя методы, анонсированные в сообщении [8], Е. Г. Зеленюк для каждого натурального числа n построил в предположении аксиомы Мартина такие топологические группы (B,κ_n), (B,λ_n) и (B,ρ_n), что $|\kappa_n(B)|=$

$=|\lambda_n(B)|=|f_n(B)|=n$ и $\kappa_n(B)$ — цепь идемпотентов, $\lambda_n(B)$ — полугруппа левых нулей, $\rho_n(B)$ — полугруппа правых нулей.

Топологические группы (B, κ_n), (B, ρ_n) неразложимы для любого натурального числа n, а топологическая группа (B, λ_n) разложима при $n \geq 2$. Легко проверить, что полугруппа ультрафильтров $\tau(G)$ $\aleph_0$-разложимой топологической группы (G, τ) бесконечна. Таким образом, существуют разложимые топологические группы, которые не являются $\aleph_0$-разложимыми.

Бесконечная группа G называется *сильно разложимой* (*сильно $\aleph_0$-разложимой*), если группа G, снабженная любой недискретной топологией, является разложимой ($\aleph_0$-разложимой). Таким образом, теорема Комфорта – ван Милла утверждает, что бесконечная абелева группа с конечным числом элементов порядка 2 сильно разложима.

Бесконечная группа G называется *абсолютно разложимой* (*абсолютно $\aleph_0$-разложимой*), если ее можно разбить на два (счетное число) подмножества, плотных в любой недискретной топологии на группе G.

2.6. Лемма. *Если инвариантная подгруппа H группы G и фактор-группа G/H сильно $\aleph_0$-разложимы, то группа G сильно $\aleph_0$-разложима.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную недискретную топологию на группе G. Если подгруппа H недискретна, то группа G $\aleph_0$-разложима согласно лемме 2.4. Предположим, что подгруппа H дискретна, и рассмотрим факторный гомоморфизм $f\colon G \to G/H$. Так как топологическая группа G/H недискретна, то по условию леммы существует счетное дизъюнктное семейство $\{D_n\colon n<\omega\}$ ее плотных подмножеств. Но тогда $\{f^{-1}(D_n)\colon n<\omega\}$ — дизъюнктное семейство плотных подмножеств группы G.

2.7. Лемма. *Прямое произведение конечного числа сильно $\aleph_0$-разложимых групп является сильно $\aleph_0$-разложимой группой.*

Доказательство легко проводится индукцией по числу сомножителей с использованием леммы 2.6.

3. Разложимость подгрупп прямых произведений групп. Предположим, что недискретная хаусдорфова топологическая группа (H, τ) является подгруппой прямого произведения $G = \times\{G_\alpha\colon \alpha<\gamma\}$ семейства конечных групп. Положим

$$\tau_f = \{U \cap G[F]\colon U \in \tau,\ F \subset \{\alpha\colon \alpha<\gamma\},\ |F| < \aleph_0\}.$$

Нетрудно проверить, что финитарное мультипликативное семейство подмножеств τ_f можно принять в качестве базы окрестностей единицы топологии на группе G, причем подгруппа H открыта в топологической группе (G, τ_f).

3.1. Теорема. *Любая бесконечная подгруппа H прямого произведения $G = \times\{G_n\colon n<\omega\}$ счетного числа конечных групп без элементов порядка 2 абсолютно $\aleph_0$-разложима.*

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что подмножества $H \cap D(k, n)$, $0 \leq k < n < \omega$, плотны в любой недискретной хаусдорфовой топологии на H. Зафиксируем базу τ окрестностей единицы такой топологии. Согласно теореме 1.3 подмножества $D(k, n)$ τ_f-плотны. Поскольку H — открытая подгруппа топологической группы (G, τ_f), то подмножества $H \cap D(k, n)$ τ_f-плотны в H. Следовательно, эти подмножества τ-плотны.

3.2. Теорема. *Любая бесконечная подгруппа H прямого произведения $G = \times\{G_\alpha\colon \alpha<\gamma\}$ семейства конечных групп без элементов порядка 2 сильно $\aleph_0$-разложима.*

Доказательство. Зафиксируем базу τ окрестностей единицы недискретной хаусдорфовой топологии на группе H. Согласно теореме 1.6 существует счетное дизъюнктное семейство $\{D_n : n < \omega\}$ τ_f-плотных подмножеств группы (G, τ_f). Поскольку H — открытая подгруппа топологической группы (G, τ_f), то все подмножества семейства $\{H \cap D_n : n < \omega\}$ τ_f-плотны. Следовательно, эти же подмножества τ-плотны в H.

3.3. Вопрос. Пусть $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ — прямое произведение несчетного семейства конечных групп без элементов порядка 2. Верно ли, что группа G абсолютно разложима?

3.4. Теорема. *Пусть* $G = \times\{G_\alpha : \alpha < \gamma\}$ — *прямое произведение бесконечного семейства групп без элементов порядка 2. Если фактор-группа любой группы* G_α *по любой ее конечной инвариантной подгруппе сильно* $\aleph_0$*-разложима, то группа* G *сильно* $\aleph_0$*-разложима.*

Доказательство. Зафиксируем базу τ окрестностей единицы произвольной недискретной топологии на группе G. Для каждого ординала $\alpha < \gamma$ определим семейство $\tau_\alpha = \{pr_{G_\alpha} U : U \in \tau\}$ подмножеств группы G_α. Положим $H_\alpha = \bigcap\{V : V \in \tau_\alpha\}$, $\alpha < \gamma$ и заметим, что H_α — инвариантная подгруппа группы G_α.

Допустим вначале, что для некоторого ординала $\beta < \gamma$ все подмножества семейства τ_β бесконечны. Рассмотрим два случая.

1. H_β — бесконечная подгруппа группы G_β. Разобьем подгруппу H_β на счетное число непустых подмножеств $H_\beta = \bigcup\{P_n : n < \omega\}$. Далее разложим группу G_β на смежные классы по подгруппе H_β $G_\beta = \bigcup\{g_\lambda H_\beta : \lambda < \kappa\}$. Положим $D_n = \bigcup\{g_\lambda P_n : \lambda < \kappa\}$, $n < \omega$ и заметим, что $\{D_n : n < \omega\}$ — дизъюнктное семейство τ_β-плотных подмножеств группы G_β. Применяя лемму 1.5, заключаем, что существует счетное дизъюнктное семейство τ-плотных подмножеств группы G.

2. H_β — конечная подгруппа группы G_β. Рассмотрим факторный гомоморфизм $f : G_\beta \to G_\beta / H_\beta$. Так как все подмножества τ_β бесконечны, а подгруппа H_β конечна, то семейство подмножеств $f(\tau_\beta) = \{f(V) : V \in \tau_\beta\}$ — база окрестностей единицы недискретной (хаусдорфовой!) топологии на фактор-группе G_β / H_β. По условию теоремы существует дизъюнктное семейство $\{D_n : n < \omega\}$ $f(\tau_\beta)$-плотных подмножеств группы G_β / H_β. Но тогда $\{f^{-1}(D_n) : n < \omega\}$ — дизъюнктное семейство τ_β-плотных подмножеств группы G_β и применяем лемму 1.5.

Итак, далее можно считать, что для каждого ординала $\alpha < \gamma$ в семействе τ_α найдется конечное подмножество. Следовательно, подгруппа H_α конечна и $H_\alpha \in \tau_\alpha$ для всех $\alpha < \gamma$. Положим $H = \times\{H_\alpha : \alpha < \gamma\}$. Если H — недискретная подгруппа в (G, τ), то $\aleph_0$-разложимость топологической группы (G, τ) непосредственно вытекает из теоремы 3.2 и леммы 2.4. Предположим, что подгруппа H дискретна и рассмотрим естественный гомоморфизм f группы G на группу $K = \times\{K_\alpha : \alpha < \gamma\}$, где $K_\alpha = G_\alpha / H_\alpha$. Так как ядром этого гомоморфизма является дискретная подгруппа H группы (G, τ), то семейство подмножеств $f(\tau) = \{f(U) : U \in \tau\}$ образует базу недискретной топологии на группе K. Нетрудно убедиться, что семейство подмножеств $f(\tau)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.6. Значит, существует дизъюнктное семейство $\{D_n\colon n < < \omega\}$ $f(\tau)$-плотных подмножеств группы K. Но тогда $\{f^{-1}(D_n)\colon n < \omega\}$ — дизъюнктное семейство τ-плотных подмножеств группы G и теорема доказана.

Напомним, что дисперсионный характер топологического пространства — наименьшая из мощностей его непустых открытых подмножеств.

3.5. Теорема. *Пусть H — подгруппа прямого произведения $G = = \times\{G_\alpha\colon \alpha < \gamma\}$ произвольного семейства групп, μ — несчетный регулярный кардинал и $|G_\alpha| < \mu$ для всех $\alpha < \gamma$. Существует счетное дизъюнктное семейство подмножеств из H, плотных в любой топологии на H дисперсионного характера $\geq \mu$.*

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что подмножества $H \cap S(k, n)$, $0 \leq k < n < \omega$, плотны в любой топологии на H дисперсионного характера $\geq \mu$. Зафиксируем базу τ окрестностей единицы такой топологии на H. Согласно теореме 1.7 все подмножества $S(k, n)$ τ-плотны. Так как H — подгруппа и $U \subseteq H$ для всех подмножеств $U \in \tau$, то $H \cap S(k, n)$ — плотные подмножества топологической группы (H, τ).

3.6. *Следствие.* *Несчетную абелеву группу можно разбить на счетное число подмножеств, плотных в любой топологии несчетного дисперсионного характера.*

Доказательство. Достаточно заметить, что любая абелева группа вложима в прямое произведение счетных групп, взять в качестве μ первый несчетный кардинал и воспользоваться теоремой 3.5.

4. Сильная $\aleph_0$-разложимость абелевых групп.

4.1. Лемма. *Группа целых чисел $\mathbf{Z}$ абсолютно $\aleph_0$-разложима.*

Доказательство. Используем аддитивную запись групповой операции на $\mathbf{Z}$. Для каждого целого числа $z \neq 0$ обозначим через $n(z)$ номер старшего разряда двоичного разложения модуля $\|z\|$ числа z. Положим также $n(0) = 0$. Определим следующее семейство подмножеств $\mathbf{Z}$:

$$Z(k, n) = \{z \in \mathbf{Z}\colon n(z) \equiv k (\operatorname{mod} n)\}, \qquad 0 \leq k < n < \omega.$$

Так как семейство подмножеств $\{Z(2^n, 2^{n+1})\colon n < \omega\}$ дизъюнктно, достаточно убедиться в том, что все подмножества $Z(k, n)$ плотны в любой недискретной топологии на группе $\mathbf{Z}$. Зафиксируем базу τ окрестностей нуля такой топологии на группе $\mathbf{Z}$, подмножество $U \in \tau$ и произвольный элемент $g \in \mathbf{Z}$. Пусть $n(g) = m$. Для заданных чисел k, n, $0 \leq k < n < \omega$, выберем такую симметричную окрестность нуля $V \in \tau$, что $2^i V \subseteq U$ для всех $i \leq n + m$, где $2^i V = \{2^i z\colon z \in V\}$.

Возьмем ненулевой элемент $a \in V$ и заметим, что номер младшего разряда двоичного разложения числа $\|2^l a\|$ больше m при $l \geq m + 1$. Положим $s = = n(2^{m+1} a)$.

Определим следующие элементы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ подмножества U:

$$b_1 = 2^{m+1} a, \qquad b_2 = 2 b_1, \qquad b_3 = 2 b_2, \ldots, b_n = 2 b_{n-1}.$$

Такая процедура выбора элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ обеспечивает выполнение соотношений

$$n(g + b_{i+1}) = m + s + i, \qquad 0 \leq i < n.$$

Следовательно, среди элементов $g + b_1, g + b_2, \ldots, g + b_n$ непременно найдется элемент подмножества $Z(k,n)$. Таким образом, $g+U\bigcap Z(k,n)\neq\varnothing$ и лемма доказана.

4.2 Лемма. *Квазициклическая p-группа $\mathbf{Z}(p^{\infty})$ абсолютно $\aleph_0$-разложима для любого простого числа p.*

Доказательство. Для элемента $z\in\mathbf{Z}(p^{\infty})$ порядка p^m положим $h(z)=$ $=m$. Определим следующее семейство подмножеств группы $\mathbf{Z}(p^{\infty})$:

$$H(k,n)=\{z\in\mathbf{Z}(p^{\infty}):\ h(z)\equiv k(\operatorname{mod} n)\},\qquad 0\le k<n<\omega.$$

Так как семейство подмножеств $\{H(2^n,2^{n+1}),\, n<\omega\}$ дизъюнктно, достаточно показать, что подмножества $H(k,n)$ плотны в любой недискретной топологии на группе $\mathbf{Z}(p^{\infty})$. Зафиксируем базу τ окрестностей единицы такой топологии на группе $\mathbf{Z}(p^{\infty})$, подмножество $U\in\tau$ и произвольный элемент $g\in\mathbf{Z}(p^{\infty})$, $h(g)=h$.

Для заданных чисел k, n, $0\le k<n<\omega$ выберем такую симметричную окрестность единицы $V\in\tau$, что $V^{p^i}\subseteq U$ для всех $i<n$. Поскольку окрестность V бесконечна, то найдется такой элемент $a\in V$, что $h(a)=s$ и $s\ge n+$ $+h$. Определим следующие элементы $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$ подмножества U:

$$a_0=a,\ a_1=a^p,\ a_2=a^{p^2},\ldots,\ a_{n-1}=a^{p^{n-1}}.$$

Тогда очевидны следующие соотношения:

$$h(ga_i)=s-i,\qquad 0\le i<n.$$

Следовательно, среди элементов ga_0, $ga_1,\ldots,ga_{n-1}$ непременно найдется элемент подмножества $H(k,n)$. Таким образом, $gU\bigcap H(k,n)\neq\varnothing$ и лемма доказана.

4.3. ***Замечание.*** Аналогичными рассуждениями легко доказать абсолютную $\aleph_0$-разложимость конечных произведений квазициклических p-групп для любого простого числа p.

4.4. ***Вопрос.*** Верно ли, что прямое произведение счетного числа квазициклических p-групп, $p\neq 2$, абсолютно $\aleph_0$-разложимо? Абсолютная разложимость таких произведений доказана в работе [2].

4.5. Лемма. *Группа рациональных чисел $\mathbf{Q}$ сильно $\aleph_0$-разложима.*

Доказательство. Зафиксируем базу τ окрестностей единицы недискретной топологии на $\mathbf{Q}$. Положим $\tau'=\{U\bigcap\mathbf{Z}:\ U\in\tau\}$. Допустим, что топологическая группа $(\mathbf{Z},\tau')$ недискретна. В этом случае $\aleph_0$-разложимость топологической группы $(\mathbf{Q},\tau)$ непосредственно вытекает из лемм 4.1 и 2.4. Поэтому далее считаем, что $\mathbf{Z}$ — дискретная подгруппа $(\mathbf{Q},\tau)$.

Рассмотрим группу $H=H_1\times H_2$, где $H_2=\mathbf{Z}(2^{\infty})$, $H_1=\times\{\mathbf{Z}(p^{\infty}):\ p$ — простое число, $p\neq 2\}$.

Из леммы 4.2, теоремы 3.4 и леммы 2.7 следует, что группа H сильно $\aleph_0$-разложима.

Отождествим группу H с фактор-группой $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ и обозначим через f естественный гомоморфизм $\mathbf{Q}$ на H. Так как $\mathbf{Z}$ — дискретная подгруппа топологической группы $(\mathbf{Q},\tau)$, то $f(\tau)=\{f(U):\ U\in\tau\}$ — база окрестностей единицы недискретной топологии на группе H. Из сильной $\aleph_0$-разложимости группы H вытекает, что найдется дизъюнктная система $\{D_n : n < \omega\}$ $f(\tau)$-плотных подмножеств группы H. Но тогда $\{f^{-1}(D_n) : n < \omega\}$ — дизъюнктная система плотных подмножеств топологической группы (Q, τ) и лемма доказана.

4.6. *Вопрос.* Верно ли, что группа Q абсолютно $\aleph_0$-разложима? Абсолютная разложимость группы рациональных чисел доказана в работе [3].

4.7. Теорема. *Бесконечная абелева группа G с конечным числом элементов порядка 2 сильно $\aleph_0$-разложима.*

Доказательство. Рассмотрим делимую оболочку H группы G и заметим, что $H = H_1 \times H_2$, где H_2 — прямое произведение конечного числа квазициклических 2-групп, H_1 — прямое произведение групп рациональных чисел и квазициклических p-групп, $p \neq 2$. Сильная $\aleph_0$-разложимость группы H вытекает из лемм 4.2, 4.5, теоремы 3.4 и леммы 2.7.

Зафиксируем базу τ окрестностей единицы недискретной топологии на группе G. Так как группа H сильно $\aleph_0$-разложима, то существует дизъюнктная система $\{D_n : n < \omega\}$ τ-плотных подмножеств группы H. Но тогда $\{G \cap \cap D_n : n < \omega\}$ — дизъюнктная система плотных подмножеств топологической группы (G, τ) и теорема доказана.

4.8. *Следствие.* *Недискретная $\aleph_0$-неразложимая абелева группа содержит счетную открытую булеву подгруппу.*

1. *Comfort W. W., van Mill J.* Goups with only resolvable group topologies // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – **120**, № 3. – P. 687–696.
2. *Протасов И. В.* Абсолютно разложимые группы // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – С. 383–392.
3. *Протасов И. В.* Абсолютная разложимость группы рациональных чисел // Там же. – № 12. – С. 1653–1656.
4. *Протасов И. В.* Разложимость τ-ограниченных групп // Мат. студії. Праці Львів. мат. т-ва. – 1995. – № 5. – С. 17–20.
5. *Протасов И. В.* Асимметрично разложимые абелевы группы // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 3. – С. 468–471.
6. *Архангельский А. В.* Канторовская теория множеств. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 112 с.
7. *Протасов И. В.* Ультрафильтры и топологии на группах // Сиб. мат. журн. — 1993. – **34**, № 5. – С. 163–180.
8. *Зеленюк Е. Г.* Топологические группы с конечными полугруппами ультрафильтров // Допов. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 37–38.

Получено 27.02.96