УДК 519.41/47

М. М. Семко (НДІ педагогіки АПН України, Київ)

ПРО БУДОВУ УЩН[ ]-ГРУП З ЕЛЕМЕНТАРНИМ КОМУТАНТОМ РАНГУ ДВА

We describe certain CDN-groups of order p^n with elementary commutant of rank two

Описані деякі УЩН[ ]-групи порядку p^n з елементарним комутантом рангу два.

Природним і досить значним узагальненням дедекіндових груп є УЩН[ ]-групи. Вивчення УЩН[ ]-груп розпочато в [1] і було продовжено в [2–5]. У цих роботах описані локально ступінчасті метагамільтонові і ненільпотентні групи такого роду. Легко бачити, що опис довільних нільпотентних УЩН[ ]-груп можна одержати з опису УЩН[ ]-груп порядку p^n. В даній роботі описані деякі УЩН[ ]-групи G порядку p^n з елементарним комутантом рангу два (теореми 1 і 2). Необхідні означення можна знайти, наприклад, в [5].

При доведенні основних результатів суттєво використовуються наступні леми.

Лема 1. *Всі УЩН[ ]-групи G, що містять підгрупу діедра порядку* 8, *є метагамільтоновими групами.*

Лема 2. *Нільпотентна неметагамільтонова УЩН[ ]-група G, що містить ненормальну підгрупу кватерніонів $Q = \langle x, y\rangle$ порядку* 8, *є або групою кватерніонів порядку* 32, *або скінченною неметациклічною* 2*-групою з комутантом G' порядку 2^m, $m > 1$, яка має нормальну підгрупу $C = Q \times \langle d\rangle$, $|d| = 2$, $\Phi(Q) \times \langle d\rangle \lhd G$, $\Phi(Q) \times \langle d\rangle$ містить всі інволюції з G і G/C — дедекіндова група.*

Лема 3. *Нехай G — неметагамільтонова УЩН[ ]-група G порядку p^n, що містить елементарну абелеву підгрупу M порядку p^3. Тоді $|G'| = p^m$, $m > 1$, $n > 4$, всі елементи порядку p із G належать $M \lhd G$, G/M — дедекіндова група і справедливі наступні твердження:*

1) *G містить ненормальну підгрупу*

$$X = \langle x\rangle \leftthreetimes \langle y\rangle,\quad |x| = p^{\Delta},\quad |y| = p,\quad \Delta > 1,\quad [x, y] = c = x^{p^{\Delta-1}} \in Z(G),$$
$$[X : \langle c\rangle] > 4,\qquad \langle x^p\rangle \times \langle y\rangle \lhd G,\qquad \langle c\rangle \times \langle y\rangle = w(X) \lhd G,$$

G не містить неабелевих підгруп порядку p^3, що є 2*-групами чи мають експоненту p;*

2) *для будь-яких елементів u і v з G, $|u| > p$, $|v| > p$, $\langle u, v\rangle = \langle u\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle$ маємо, що $w(\langle u, v\rangle) = w(\langle u\rangle) \times \langle v\rangle \lhd G$, в G нормальні підгрупи Фраттіні всіх циклічних підгруп і комутанти всіх неабелевих підгруп;*

3) *в* 2*-групі G $G' \le Z(\Phi(G))$.*

Доведення. Нехай G і M задовольняють умову леми. Тоді G — неметациклічна група, $n > 4$, $|G'| = p^m$, $m > 1$. Завдяки лемам 1 та 2 G не має підгруп діедра порядку 8 і всі підгрупи кватерніонів порядку 8 нормальні в G. За теоремою 3.4 з [3] $M \lhd G$ і G/M — дедекіндова група. В неметагамільтоновій групі G в силу теореми 2.2 з [3] існує ненормальна підгрупа $X = \langle x\rangle \leftthreetimes \langle y\rangle$ типу 5 згаданої теореми, а тому

$$|x| = p^{\Delta},\quad |y| = p,\quad \Delta > 1,\quad [x, y] = c = x^{p^{\Delta-1}} \in Z(G),$$
$$[X : \langle c\rangle] > 4,\qquad \langle x^p\rangle \times \langle y\rangle \lhd G,\qquad \langle c\rangle \times \langle y\rangle = w(X) \lhd G.$$

Нехай $C = C_G(w(X))$. Тоді $C \lhd G$ і $C < G$. Відомо [6], що G/C — підгрупа з $\operatorname{Aut} w(X) \cong GL(2, p)$ і силовська p-підгрупа з $GL(2, p)$ має порядок p. Звідси $[G : C] = p$. Зрозуміло, що $x \notin C$ і тому $G = C\langle x\rangle = CX$, $C \cap X = \langle x^p\rangle \times \langle y\rangle \lhd G$. Покладемо $U = MX$. Зрозуміло, що $U \lhd G$ і існує ряд $X < U_1 \le U$, де $[U_1 : X] = p$, $[U : U_1] \le p$. Оскільки X — метациклічна підгрупа, M — неметациклічна підгрупа, то $M \backslash X$ містить z, $|z| = p$. Можна вважати, що $U_1 = X \leftthreetimes \langle z \rangle$. Завдяки теоремі 2.2 з [3] $U_1 \lhd G$. Легко показати, що будь-який елемент d з G порядку p належить M. Звідси G не містить неабелевих підгруп порядку p^3 і експоненти p, $M = w(X) \times \langle z \rangle$, $U_1 = U$. Зрозуміло, що $X \lhd U$, $\Phi(X) = \langle x^p \rangle$ і тому $\langle x^p \rangle \lhd U$. При $\Delta = 2$ $\langle x^p \rangle = \langle c \rangle \lhd G$. Нехай $\Delta > 2$. Покладемо $U_3 = \langle x^p \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$. Оскільки G, а тому і U_3, не містить підгруп діедра порядку 8, то в силу [7] $w(U_3) = \langle z \rangle \times \langle c \rangle$. При $U_3 \lhd G$ $w(U_3) \lhd G$. При $U_3 \ntriangleleft G$ за теоремою 2.2 з [3] $w(U_3) \lhd G$. В G існує підгрупа $\langle z \rangle w(U_3) = \langle x \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$, яка максимальна і тому нормальна в $U = (\langle x \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle) \leftthreetimes \langle y \rangle$. Звідси $\Phi(U) = \langle x^p \rangle$ і, значить, $\langle x^p \rangle \lhd G$. Якщо g — елемент з G і $\langle g \rangle \lhd G$, то $\Phi(\langle g \rangle) \lhd G$. Нехай $\langle g \rangle \ntriangleleft G$. Покладемо $U_4 = \langle g \rangle M$. Якщо $|g| = p$, то $\Phi(\langle g \rangle) \lhd G$. Нехай $|g| > p$. Тоді U_4 містить $Y = \langle g \rangle \leftthreetimes \langle f \rangle$, де $f \in M$, $|f| = p$, $\Phi(Y) = \langle g^p \rangle$. При $Y \lhd G$ $\Phi(Y) = \langle g^p \rangle \lhd G$. При $Y \ntriangleleft G$ можна вважати, що $Y = X$ і за попереднім, $\langle g^p \rangle \lhd G$. Отже, завжди $\Phi(\langle g \rangle) \lhd G$.

Нехай H — неабелева підгрупа з G. Якщо $H \lhd G$, то $H' \lhd G$. Якщо $H \ntriangleleft G$, то можна вважати, що $H = X$ і тоді $H' \lhd G$.

Нехай $H = \langle u, v \rangle = \langle u \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle$, $|u| > p$, $|v| = p$. Оскільки G не містить підгруп діедра порядку 8, то в силу [7] $w(H) = w(\langle u \rangle) \times \langle v \rangle$. При $H \lhd G$ $w(H) \lhd G$, при $H \ntriangleleft G$ $w(H)$ нормальна в G завдяки теоремі 2.2 з [3]. Отже, твердження 2 леми доведене повністю.

Відомо [8], що в скінченній 2-групі G $\Phi(G) = \langle g^2 \rangle$ для всіх g з G і $G' \le \Phi(G)$. За попереднім, $\langle g^2 \rangle \lhd G$. Ясно, що $C_G(\langle g^2 \rangle) \lhd G$ і $G / C_G(\langle g^2 \rangle)$ — підгрупа з абелевої групи $\operatorname{Aut} \langle g^2 \rangle$. Звідси $C_G(\langle g^2 \rangle)$ містить G', а тому $G' \le Z(\Phi(G))$. Твердження 3 леми доведене.

Далі легко показати, що G не містить підгруп кватерніонів порядку 8 і, значить, має місце твердження 1 леми. Лема доведена.

Теорема 1. *Всі УЩН[ ]-групи G порядку p^n з комутантом G' типу (p, p), який містить всі елементи порядку p з G, p — довільне просте число, мають вигляд $G = UX$, $U = \langle a, b \rangle \lhd G$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $\beta \in \{1, 2\}$, $|X| > p$ та вичерпуються групами таких типів:*

1) *$G = U \leftthreetimes X$, X — група кватерніонів порядку 8, U — циклічна 2-група, чи група кватерніонів порядку 8, $[U, X] \le w(U)$; при $U' = 1$ $[U, X] = w(U)$;*

2) $U = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;

3) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)$, $U = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ $X = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$, $a^2 = x^2 = [a, y]$;

4) $U = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$;

5) $U = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $X = \langle x \rangle$, $|a| = 8$, $|x| = 4$, $|b| = 2$, $[a, b] = x^2 = a^4$, $[a, x] = b$, $[b, x] = 1$;

Доведення. *Необхідність.* Нехай G задовольняє умову теореми. Зрозуміло, що G — скінченна p-група, у якої всі абелеві підгрупи метациклічні. Звідси при $p > 2$ в силу [9] з урахуванням умови, що G' містить всі елементи порядку p з G, випливає, що $G = UX$ має загальний вигляд групи з теореми і є групою типу 4 цієї теореми. Отже, в подальшому будемо вважати, що $p = 2$.

Припустимо спочатку, що $G' \le Z(G)$. Тоді за наслідком 7 з [10] G — група одного з типів 1–3 розглядуваної теореми.

Нехай тепер $G' \nless Z(G)$. Тоді $G' = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, де $|c| = |d| = 2$, $c \in Z(G)$, $d \notin Z(G)$ і $G' = w(G)$. Нехай $C = C_G(G')$. Тоді $[G:C] = 2$, $G' \le Z(G') \le C \lhd$ $\lhd G$. Звідси $G = C\langle u \rangle$, $C \cap \langle u \rangle = \langle u^2 \rangle$, $|u| = 2^{\Delta}$, $\Delta > 1$. Зрозуміло, що G не містить підгрупи діедра порядку 8. Нехай $v \in G \backslash w(G)$. Тоді $|v| > 2$, $w(\langle v \rangle) \le w(G)$. Отже, $w(G)\langle v \rangle = V \lhd G$, $\Phi(V) \lhd G$.

Припустимо, що $\langle c \rangle \cap \langle v \rangle = 1$. Тоді $w(V) = w(G) = \langle c \rangle \times w(V)$ і $V = \langle c \rangle \times$ $\times \langle v \rangle$. Але $\Phi(V) = \langle v^2 \rangle$ і $w(\langle v \rangle) \le Z(G)$. Звідси $w(G) = G' \le Z(G)$, що неможливо. Отже, $w(\langle v \rangle) = \langle c \rangle$, $V = \langle v \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle$, $w(\langle u \rangle) = w(\langle v \rangle) = \langle c \rangle$ і будь-яка циклічна підгрупа з G порядку 4 містить c. Нехай $D = w(G)\langle u \rangle$. Тоді $D = \langle u \rangle$ $\leftthreetimes \langle d \rangle$. Оскільки $d \notin Z(G)$, то $[u, d] = c$. За попереднім $\Delta > 2$. Зрозуміло, що G — неметациклічна група і тому $D < G$. Тоді $|G| > 2^{\Delta+1}$, $\Delta + 1 > 3$, $\exp(G) \ge$ $\ge 2^{\Delta}$, $\exp(G) \ge 2^{\Delta-1} \ge 4$. Можливі випадки: 1) $C/\langle d \rangle$ — циклічна група; 2) $C/\langle d \rangle$ — нециклічна група.

Випадок 1. У цьому випадку $C/\langle d \rangle = \langle v\langle d \rangle \rangle$ і тому за попереднім $C =$ $= \langle d \rangle \langle v \rangle = \langle d \rangle \times \langle v \rangle$. Значить, $|v| = 2^{\gamma}$, $\gamma > 1$. При $\gamma = 2$ $C = \langle u^2 \rangle \times \langle d \rangle$ і G — метациклічна група, що не так. Звідси $\gamma > 2$. Зрозуміло, що $u^2 \in Z(G)$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $[u, v] = d$. Оскільки $[v, d] = 1$, то за відомим результатом [7] $[v^2, u] = [u, v]^2 = d^{-2} = 1$. Звідси $v^2 \in Z(G)$. Зрозуміло, що $G = D\langle v \rangle$, $D' = \langle c \rangle$, $Z(D) = \langle u^2 \rangle \le Z(G)$, $D \cap \langle v \rangle = \langle f \rangle = \langle v \rangle \cap \langle u \rangle \le$ $\le Z(D) \cap \langle v^2 \rangle$. З співвідношення $f \in Z(G)$ випливає $\langle f \rangle = \langle v^2 \rangle \cap \langle u^2 \rangle$. Зрозуміло, що $X_i' = 1$, де $X_1 = \langle v^2 \rangle \langle u \rangle$, $X_2 = \langle v \rangle \langle u^2 \rangle$, $i \in \{1, 2\}$. Якщо X_i — нециклічна група, то вона містить x_i, $|x_i| = 2$, $\langle x_i \rangle \cap w(G) = 1$, що неможливо. Отже, X_i — циклічна група. Тоді $\langle u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$. Далі, існує непарне i, для якого $u^{2i}v^2 = 1$. Покладемо $z = u^i v$. Тоді $z^2 = (u^i v)(u^i v) = u^i v^2 (v^{-1} u v)^i =$ $= v^2 u^i (ud)^i = v^2 u^i u^i d^i c^{-(i-1)/2} = v^2 u^{2i} h$, де $h = d^i c^{-(i-1)/2} \ne 1$. Зрозуміло, що $h \in G'$ і $\langle h \rangle \cap \langle c \rangle = 1$. Звідси $|z| = 4$, що суперечить попередньому. Випадок 1 неможливий.

Випадок 2. Припустимо, що $C/\langle d \rangle$ містить елементарну абелеву підгрупу $H/\langle d \rangle$ порядку 4. Тоді $H/\langle d \rangle = \langle \langle d \rangle x_1 \rangle \times \langle \langle d \rangle x_2 \rangle$. При $|x_i| = 2$ одержимо, що в G є інволюції, які не належать $w(G)$ $(i \in \{1, 2\})$. Суперечність. Нехай, наприклад, $|x_1| = 4$. Тоді $\langle x_1^2 \rangle = \langle d \rangle$, що суперечить попередньому. Отже, в $C/\langle d \rangle$ є тільки одна інволюція. В силу теореми 12.5.1 з [7] $C/\langle d \rangle$ — група кватерніонів порядку 8. Нехай $\langle d \rangle$ не доповнюється в C. Тоді в силу твердження 1.1.11 з [11] $C = \langle x_1 \rangle \leftthreetimes \langle x_2 \rangle$, $|x_1| = |x_2| = 4$, $[x_1, x_2] = x_1^2$. За попереднім $x_1^2 = c = x_2^2$, що неможливо. Отже, $C = \langle d \rangle \times Q$, де Q — група кватерніонів порядку 8. Зрозуміло, що $\exp(C) = 4$, $\Delta = 3$ і $|u^2| = 4$. Покладемо $u = a$, $d = b$, $D = U$. Тоді $|a| = 8$, $|b| = 2$, $[a, b] = c = a^4$. Нехай $v = x$. Тоді $[x, b] =$ $= 1$. Отже, $|U| = 16$, $x^2 = c$ і $x \notin U$. Звідси $G = U\langle x \rangle$. Оскільки $G' \nless \langle c \rangle$, то $[a, x] \nless \langle c \rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $[a, x] = b$. Покладемо $X = \langle x \rangle$ і одержимо, що G — група типу 5 розглядуваної теореми. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1–5 теореми. Тоді $|G| =$ $= p^n$, $n > 3$, p — просте число, G' — група типу (p, p). Залишається показати, що G — УЩН[ ]-група і всі елементи порядку p з G належать G'. За наслідком 7 з [10] група G кожного з типів 1–3 теореми G' містить всі інволюції і

$G' \leq Z(G)$. В силу [9] всі елементи порядку 3 групи G типу 4 належать G'.

Покажемо, що і в групі G типу 5 теореми всі інволюції належать G'. Дійсно, нехай це не так. Тоді G містить d, $|d|=2$ і $\langle d\rangle \cap G' = 1$. Легко бачити, що $G' = w(U) = \langle a^4\rangle \times \langle b\rangle$, $a^4 = x^2 \in Z(G)$. Зрозуміло, що $d = a^i b^j x^k$. Оскільки $d \notin G'$, то $d \notin w(U)$. Звідси k — непарне число. Припустимо, що i — парне число. Тоді $d \in Q \times \langle b\rangle$, де $Q = \langle x, a^2\rangle$ — група кватерніонів порядку 8 і $w(U) = w(Q) \times \langle b\rangle$, що неможливо. Отже, i —непарне число. Звідси $d^2 = (a^i b^j x^k)(a^i b^j x^k) = a^i b^j a^i x^k [x^k, a^i] b^j x^k = a^i b^j a^i [x^k, a^i] b^j x^{2k} = a^i b^j a^i d b^j x^{2k} = a^i b^j a^i b^j x^{2k} d_1$, де $d_1 = [x^k, a^i]$ і не належить циклічній підгрупі $\langle a\rangle$. Покладемо $x^{2k} d_1 = d_2$. Зрозуміло, що $\langle d_2\rangle \cap \langle a\rangle = 1$ і $d^2 = (a^i b^j)^2 d_2 = a^{2i} b^{2j} [a, b]^{-ij} d_2 = a^{2i} d_3$, де $d_3 = [a, b]^{-ij} d_2 = a^{-4iy} d_2$ і $\langle d_3\rangle \cap \langle a\rangle = 1$. Звідси $|d_3| \leq 2$. Але тоді при непарному i $|a^{2i}| = 4$. Таким чином, $a^{2i} d_3 \neq 1$ і тому $d^2 \neq 1$, що неможливо. Отже, і в групі G типу 5 всі інволюції належать G'.

Покажемо, що G — УЩН[ ]-група. В теоремі 4.1 з [3] встановлено, що група G кожного з типів $2-4$ є навіть ЩН[ ]-групою і тому УЩН[ ]-групою. Отже, залишається показати, що група G типу 1 чи 5 є УЩН[ ]-групою.

Нехай $|[A; B]| > 2$. Покажемо, що $[A; B] \ni N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$ чи $B \lhd G$, то покладемо $A = N$ чи $B = N$ і одержимо, що G — УЩН[ ]-група. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \ntriangleleft G$, $B \ntriangleleft G$, $A \neq 1$, $B \not\geq G'$ і B — власна немаксимальна підгрупа з G. Зрозуміло, що $G' \cap B = \langle f\rangle$, $|f| \in \{1, 2\}$. Нехай $w(U) = \langle c\rangle$ в групі G типу 1, а в групі G типу 5 $\langle c\rangle = \langle a^4\rangle$. Тоді $\langle c\rangle = 2$ і $c \in Z(G)$. Припустимо, що $\langle c\rangle \cap B = 1$. В групі G типу 1 $[G\colon B] \geq |U|$ і для груп G розглядуваних типів $[G\colon U] \leq 8$. Звідси $|B| = 8$, G — група типу 1 теореми і B — група кватерніонів порядку 8. Тоді $|A| = 2$ і, значить, $A \leq Z(G)$, що неможливо. Отже, $c \in B$. В групі G типу 5 $|G| = 32$, $|B| = 8$, $|A| = 2$, $\langle c\rangle \cap A = 1$ і тому $\langle c\rangle \times A = G' \leq B$, що неможливо. Достатність для груп G типу 5 теореми доведена.

Нехай G — група типу 1 теореми. Зрозуміло, що $G' = w(G) = W(U) \times w(X) \leq Z(G)$. Звідси для будь-якого елемента $g \in G$ $g^2 \in Z(G)$ і, значить, B — нециклічна група. Оскільки $B \not\geq G'$, то в B тільки одна інволюція, і тому в силу теореми 12.5.1 з [7] B — група кватерніонів. Тоді $|A| = 2$ і, значить, $A \leq Z(G)$, що неможливо. Достатність для груп G типу 1 доведена. Теорема доведена.

Теорема 2. *Неметагамільтонові УЩН[ ]-групи G порядку p^n, що мають підгрупу M типу (p, p, p), $G' \leq M$, p — довільне просте число, мають вигляд $G = UX$, $U = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle \lhd G$, $|a| = p^2$, $|b| = p^\beta$, $\beta > 0$, $|X| > 1$, та вичерпуються групами типів:*

1) $G = U \leftthreetimes X$, $X = \langle x\rangle$, $|x| = p$, $\beta > 2$, $[a, b] = a^p$, $[b, x] = 1$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$;

2) $X = \langle x\rangle \times \langle z\rangle$, $|b| = |z| = 3$, $|a| = |x| = 9$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $[b, z] = [a, b] = 1$, $[a, z] \in \langle a^3\rangle$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. За лемою 3 G містить ненормальну неабелеву підгрупу

$$X = \langle x\rangle \leftthreetimes \langle y\rangle, \quad |x| = p^\Delta, \quad \Delta > 1, \quad |y| = p,$$

$$[x, y] = x^{p^{\Delta-1}} = c \in Z(G), \quad [X\colon \langle c\rangle] > 4, \quad w(X) = N \lhd G,$$

підгрупи Фраттіні всіх циклічних та неабелевих підгруп з G нормальні в G, всі елементи порядку p з G належать M і G не містить неабелевих підгруп порядку 8 та неабелевих підгруп порядку p^3 і експоненти p. Нехай $C =$

$= C_G(N)$. Тоді $C \lhd G = CX = C\langle x\rangle$, $C \cap X = \langle x^p\rangle \times \langle y\rangle$, $C \cap \langle x\rangle = \langle x^p\rangle$, $[G:C] = p$. Зрозуміло, що $N \le Z(C)$, $w(C) = N \times \langle z\rangle = M$, $|z| = p$. Оскільки $X \ntriangleleft G$, то $[G:X] > p$ і $M < C$. Нехай $u \in C \setminus M$. Тоді $|u| = p^\gamma$ і за попереднім $\gamma > 1$, $w(\langle u\rangle) \le Z(G)$. Нехай $N \cap \langle u\rangle = 1$. Тоді за лемою 3 $w(\langle y\rangle \times \langle u\rangle) = \langle y\rangle \times w(\langle u\rangle) \lhd G$, $X \cap (\langle y\rangle \times w(\langle u\rangle)) = \langle y\rangle \lhd X$, що неможливо. Отже, $N \cap \langle u\rangle = N \cap \Phi(\langle u\rangle) = w(\langle u\rangle) \le Z(G)$. Оскільки $N \nleq Z(G)$, то $w(\langle u\rangle) = \langle c\rangle$. Зрозуміло, що підгрупа C містить $V = \langle u\rangle M = (\langle u\rangle \times \langle y\rangle) \leftthreetimes \langle z\rangle$. Звідси $[u, z] \in N = \langle c\rangle \times \langle y\rangle \le Z(C)$.

Покажемо, що $[u, z] \in \langle c\rangle$. Нехай $[u, z] \notin \langle c\rangle$. Тоді без порушення загальності можна вважати, що $[u, z] = y$. Легко бачити, що $V' = \langle y\rangle$. За теоремою 2.2 з [3] $V \lhd G$ і тому $\langle y\rangle \lhd G$, $y \in Z(G)$, що не так. Отже, $[u, z] \in \langle c\rangle$. Тепер для будь-якого елемента f з $M \setminus \langle c\rangle$ G містить підгрупу $\langle u\rangle \leftthreetimes \langle f\rangle$, $|f| = p$, у якої за попереднім $w(\langle u\rangle \leftthreetimes \langle f\rangle) = \langle c\rangle \times \langle f\rangle \lhd G$. Зрозуміло, що $M/\langle c\rangle$ — центральна підгрупа з $G/\langle c\rangle$, яка містить комутант $G/\langle c\rangle$. Оскільки G — неметагамільтонова група, то $|G'| \in \{p^2, p^3\}$.

Покажемо, що $|G'| = p^2$. Якщо G — 2-породжена група, то 2-породженою буде і $G/\langle c\rangle$. Але тоді з умови $G'/\langle c\rangle \le Z(G/\langle c\rangle)$ випливає, що $|(G/\langle c\rangle)'| \le p$ і тому $|G'| = p^2$. Нехай далі G не породжується двома елементами. Покажемо, що $C/\langle y\rangle$ не містить підгрупи кватерніонів $H/\langle y\rangle$ порядку 8. Дійсно, нехай це не так, тобто $H/\langle y\rangle$ — група кватерніонів порядку 8. Оскільки G не містить групи кватерніонів порядку 8, то $\langle y\rangle$ не доповнюється в H. В силу твердження 1.1.11 з [11] $H = \langle x_1\rangle \leftthreetimes \langle y_1\rangle$, $|x_1| = |y_1| = 4$, $x_1 \in C \setminus M$, $y_1 \in C \setminus M$. За попереднім $x_1^2 = y_1^2$, що неможливо. Отже, $C/\langle y\rangle$ не містить підгрупи кватерніонів порядку 8.

Нехай $C/\langle y\rangle$ містить підгрупу $H/\langle y\rangle = \langle\langle y\rangle x_1\rangle \leftthreetimes \langle\langle y\rangle y_1\rangle$, де $|x_1| > p$, $|\langle y\rangle y_1| \ne 1$. Тоді за попереднім $\langle y\rangle \cap \langle x_1\rangle = 1$ і $\langle y\rangle \cap \langle y_1\rangle = 1$. Звідси $H = (\langle y\rangle \times \langle x_1\rangle) \leftthreetimes \langle y_1\rangle$ і $w(H) = M = \langle y\rangle \times w(\langle x_1\rangle) \times w(\langle y_1\rangle)$. Оскільки $|x_1| > p$, то на підставі викладеного вище $w(\langle x_1\rangle) = \langle c\rangle$. Зрозуміло, що $w(\langle y_1\rangle) \cap \langle c\rangle = 1$ і за попереднім $|y_1| = p$. Припустимо, що $|G'| = p^3$. Тоді $G' = M$. Нехай $C/\langle y\rangle$ — метациклічна група. Очевидно, $C/\langle y\rangle$ містить підгрупу $M/\langle y\rangle$ типу (p, p) і елемент $\langle y\rangle u$, $|\langle y\rangle u| > p$. Тоді $|C/\langle y\rangle| > p^2$ і, значить, $C/\langle y\rangle = H/\langle y\rangle$. Оскільки $M = w(H) = w(C) \le \Phi(G)$, то G — 2-породжена група, що неможливо. Отже, $C/\langle y\rangle$ — неметациклічна група. Звідси $C/\langle y\rangle$ містить мінімальну неметациклічну підгрупу $F/\langle y\rangle$, яка може бути групою одного з типів 1–5 теореми 3.3 з [3]. Зрозуміло, що F — неметациклічна група, яка містить мінімальну неметациклічну підгрупу D тих же типів вказаної теореми. За теоремою 3.4 з [3] $D \lhd G$ і $F \lhd G$. При $D' = \langle y\rangle$ чи $F' = \langle y\rangle$ маємо $y \in Z(G)$, що неможливо.

Припустимо, що $\exp(F/\langle y\rangle) = p$, тобто $F/\langle y\rangle$ — група типу 1 теореми 3.3 з [3]. Тоді за попереднім для будь-якого h з $F \setminus \langle y\rangle$ $\langle h\rangle \cap \langle y\rangle = 1$ і $|h| = p$. Звідси $\exp(F) = p$, $|F| = p^4$, що неможливо. Отже, $\exp(F/\langle y\rangle) > p$. На підставі викладеного вище $F/\langle y\rangle$ не може бути групою типу 3 чи 4 теореми 3.3 з [3] ($F/\langle y\rangle$ не містить груп кватерніонів порядку 8).

Припустимо, що $F/\langle y\rangle$ — група типу 5 теореми 3.3 з [3]. Тоді $F/\langle y\rangle$ містить $H/\langle y\rangle$, де $H/\langle y\rangle = \langle\langle y\rangle x_1\rangle \times \langle\langle y\rangle y_1\rangle$ — група типу (4, 4), що за попереднім неможливо.

Нехай, нарешті, $F/\langle y\rangle$ — група типу 2 теореми 3.3 з [3]. Тоді $p = 3$ і D —

група типу 2 тієї ж теореми, $|D| = 3^4$, $|F| = 3^5$. За теоремою 3.4 з [3] G/D — абелева 3-група. Звідси $M \leq w(D) = D'$ і $|D'| = 9$, що неможливо. Отже, завжди $|G'| = p^2$. Звідси $M \backslash G'$ містить d, $|d| = p$. В силу теореми 1 з [12] $G = K \leftthreetimes \langle v \rangle$, $w(G) = w(K) \times w(\langle v \rangle) = M$, $w(K) = G'$, $G' = K'[K, \langle v \rangle] < K$ і $\exp(K) > p$. Можливі випадки: 1) K — метациклічна група; 2) K — неметациклічна група.

Випадок 1. У цьому випадку $K = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $|K'| \in \{1, p\}$. За попереднім K неізоморфна групі кватерніонів порядку 8. Зрозуміло, що K — абелева група чи група Міллера – Морено. Звідси без порушення загальності можна вважати, що $K = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$. Покажемо, що $\alpha = 2$. Припустимо, що $\alpha > 2$. Тоді на підставі викладеного вище $\langle a^p \rangle \lhd G$ і в G існує підгрупа $\langle a^p \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle$. При $|v| > p$ за теоремою 2.2 з [3] $\langle a^p \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle \lhd G$. При $|v| = p$ за тією ж теоремою $w(\langle a \rangle) \times \langle v \rangle \lhd G$. Тому завжди $\langle a^p \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle \lhd G$ і $[v, b] \in (\langle a^p \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle) \cap G' = \langle c \rangle$. Ясно, що $[a, v] \in (\langle a^p \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle) \cap G' = \langle c \rangle$ і, значить, $G' = \langle c \rangle$, що неможливо. Отже, $\alpha < 3$. При $K' \neq 1$, $\alpha > 1$ і тому $\alpha = 2$. При $K' = 1$ без порушення загальності можна вважати, що $\alpha \geq \beta > 0$. Оскільки $\exp(K) > p$, то $\alpha = 2$. Звідси $\beta \in \{1, 2\}$. Можливі випадки: 1.1) $K' = 1$; 1.2) $K' \neq 1$.

Випадок 1.1. Нехай $\beta = 2$. Тоді $G' = w(K) \leq Z(G)$, $v^p \in Z(G)$, $w(G) = w(K) \times w(\langle v \rangle) = M \not\leq Z(G)$. Звідси $|v| = p$ і тому $G = KX$, $[G : K] = p$, $[X : (K \cap X)] = p$, $K \cap \langle y \rangle = 1$. Зрозуміло, що $(K \cap X) \lhd G$. За попереднім $w(X) \lhd G$. Звідси $X = (K \cap X) w(X) \lhd G$, що неможливо. Отже, $\beta = 1$.

При $|v| = p$, $|G| = p^4$ і G — метагамільтонова група, що не так. Тому $|v| > p$. Якщо $[b, v] = 1$, то $b \in Z(G)$. Якщо $|v| > p^2$, то в G існує підгрупа $X_1 = \langle b \rangle \times \langle v^p \rangle$. За лемою 3 $w(X_1) = \langle b \rangle \times w(\langle v \rangle) \lhd G$. Зрозуміло, що $K \cap w(X_1) = \langle b \rangle \lhd G$ і тому $b \in Z(G)$. Отже, завжди $b \in Z(G)$ і $M = \langle a^p \rangle \times \langle b \rangle \times w(\langle v \rangle) \leq Z(G)$, що неможливо. Звідси $|v| = p^2$, $[b, v] \neq 1$ і G містить неабелеву підгрупу $(\langle a^p \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle$, комутант якої $\langle [b, v] \rangle \leq Z(G)$. Тому $[b, v] = a^{sp}$, $0 < s < p$. Без порушення загальності можна вважати, що $[a, v] = b$. Звідси $G = \langle a, v \rangle$, $|G| = p^5$, $|X| = p^3$, $|x| = p^2$. Якщо $KX = G$, то, як і раніше, при $\beta = 2$ $X \lhd G$, що не так. Отже, $KX < G$. Тоді $KX = K \times \langle v^p \rangle$ — абелева група, що знову не так. Випадок 1.1 неможливий.

Випадок 1.2. У цьому випадку $[a, b] = a^p$. Нехай $\beta = 1$. Як і у випадку 1.1 $|v| = p^2$. При $KX = G$ одержимо $G = K \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|(K \cap X)| = p$, $(K \cap X) \lhd X = \langle x \rangle \times (K \cap X)$ — абелева група, що не так. Отже, $KX < G$, $KX = X_2 = K \times \langle v^p \rangle$. Зрозуміло, що $p > 2$, $w(K) = w(X) = G'$ і тому $X \lhd G$, що неможливо. Таким чином, $\beta > 1$ і тому $w(K) = G' = \langle a^p \rangle \times w(\langle b \rangle) \leq Z(G)$. Оскільки $M = w(K) \times w(\langle v \rangle) \not\leq Z(G)$, то $w(\langle v \rangle) = \langle v \rangle$ і $|v| = p$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $v = y$, $G = KX$ і $K \cap X = \langle x \rangle$. Зрозуміло, що $\langle x \rangle \ntriangleleft K$. Звідси $\langle a \rangle \cap \langle x \rangle = 1$, $\Phi(K) \leq Z(K)$. Тому $x \notin \Phi(K)$. Але тоді $K = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle x \rangle$. Без порушення загальності можна вважати, що $x = b$ і $[b, y] = b^{p^{\beta - 1}}$. Оскільки $w(X) = w(\langle b \rangle) \times \langle y \rangle \lhd G$, то $[a, y] \in w(\langle b \rangle)$. Отже, $[X : w(\langle b \rangle)] > 4$.

Припустимо, що $[a, y] = 1$. Тоді G містить підгрупу $\langle a \rangle \times \langle y \rangle$. За лемою 3 $\langle a^p \rangle \times \langle y \rangle \lhd G$. Зрозуміло, що $(\langle a^p \rangle \times \langle y \rangle) \cap \langle b \rangle = 1$. Звідси $[b, y] = 1$, що неможливо. Отже, $[a, y] \neq 1$. З цього випливає, що $[a, y] = [b, y]^i$, де i — не кратне p. Покладемо $b_1 = a^{-i} b$. Тоді $[b_1, y] = 1$, $|b_1| = |b| = p^\beta$, $\langle b_1 \rangle \cap \langle a \rangle = 1$. Тому без порушення загальності можна вважати, що $K = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b_1 \rangle$. При

$\beta = 2$ в силу теореми 2.5.2 з [11] G — метагамільтонова група, що не так. Звідси $\beta > 2$, $w(\langle b_1 \rangle) = w(\langle b \rangle) = \langle [a, y] \rangle$. Покладемо $b = b_1$, $x = y$ і одержимо $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$ — група типу 1 розглядуваної теореми. Випадок 1.2 розглянуто повністю.

Випадок 2. У цьому випадку K містить мінімальну неметациклічну підгрупу D, яка може бути групою одного з типів 1–5 теореми 3.3 з [3]. За попереднім D не може бути групою жодного з типів 1, 3, 4 згаданої теореми.

Нехай D — група типу 5 теореми 3.3 з [3]. Тоді $w(K) = G' = D' = w(D) \leq \leq Z(D)$, $p = 2$, G' — група типу (2, 2), для будь-якого $g \in G$ $g^2 \in Z(G)$, D містить елементи d_1 і d_2 такі, що $|d_1| = |d_2| = 4$, $D' = \langle d_1^2 \rangle \times \langle d_2^2 \rangle \leq Z(G)$. Як і раніше, $|v| = 2$. Зрозуміло, що K задовольняє умову теореми 1 і може бути лише групою типу 2 чи 3 цієї теореми. Тоді $\exp(K) = 4$. Очевидно, що $G = KX$, $y \notin K$ і тому $X = (K \cap X) \leftthreetimes \langle y \rangle$. Легко бачити, що $X' \leq K \cap X$ і $(K \cap X)/X'$ — циклічна група. Звідси і $K \cap X$ — циклічна група. Оскільки $\exp(K) = 4$, то $|K \cap X| = 4$ і тому $|X| = 8$, що неможливо, оскільки G не містить підгруп діедра порядку 8. Отже, D може бути лише групою типу 2 теореми 3.3 з [3]. Звідси $D' = G' = K' = w(K) = w(D) \nleq Z(D)$. Зрозуміло, що K задовольняє умову теореми 1 і може бути лише групою типу 4 згаданої теореми, тобто $D = K = U\langle u \rangle$, де

$$U = \langle a \rangle \times \langle b \rangle, \quad |a| = |u| = 9, \quad |b| = 3, \quad [a, u] = b, \quad [b, u] = a^3 = u^6,$$
$$w(K) = \langle a^3 \rangle \times \langle b \rangle, \quad w(G) = M = \langle a^3 \rangle \times \langle b \rangle \times w(\langle v \rangle), \quad b \notin Z(K).$$

При $|v| > 9$ в G існує підгрупа $\langle v^3 \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$. За лемою 3 $w(\langle v^3 \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) = = w(\langle v \rangle) \times \langle b \rangle \lhd G$. Звідси $\langle b \rangle \lhd G$, що неможливо. Отже $|v| \in \{3, 9\}$. Зрозуміло, що $\exp(G) = 9$.

Нехай $A = C_G(G')$. Тоді $A \lhd G$, $[G : A] = 3$, $A = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle v^3 \rangle) \langle f \rangle$, $f \neq 1$. Припустимо, що $|v| = 9$. Тоді $|f| = 9$. Як і раніше для C, одержимо $w(\langle a \rangle) = = w(\langle f \rangle)$, $[a, f] \in Z(A)$. Зрозуміло, що знайдеться таке i, не кратне 3, що $|a^i f| = 3$ і $a^i f \notin M$, що неможливо. Отже, $|v| = 3$. Без порушення загальності можна вважати, що $v = y$. Легко бачити, що $[b, y] = 1$ і $A = U \leftthreetimes \langle y \rangle$. За попереднім $\langle a^3 \rangle \times \langle y \rangle = \langle u^3 \rangle \times \langle y \rangle \lhd G$. Звідси в G існують підгрупи $\langle a \rangle \leftthreetimes \langle y \rangle$ і $\langle u \rangle \leftthreetimes \langle y \rangle$ і тому $[a, y] \in \langle a^3 \rangle$, $[u, y] \in \langle u^3 \rangle$. Якщо $[u, y] = 1$, то покладемо $y = z$. Припустимо, що $[u, y] \neq 1$. Тоді $[u, b] = u^6$, $[u, y] = u^{6i}$, i — не кратне 3. Покладемо $z = b^{-i} y$. Тоді $|z| = 9$, $G = K \leftthreetimes \langle z \rangle$, $[u, z] = 1$. Перепозначимо u на x, $\langle x \rangle \times \langle z \rangle$ на X і одержимо, що $G = UX$ — група типу 2 теореми. Випадок 2 розглянуто. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = UX$ — група одного з типів 1, 2 розглядуваної теореми. Тоді

$$|G| = p^n, \quad U = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle \lhd G, \quad |a| = p^2, \quad |b| = p^\beta, \quad \beta > 0,$$
$$G' = \langle a^p \rangle \times w(\langle b \rangle) \leq M = G' \times \langle y \rangle \lhd G,$$

де в групах G типу 1 $y = x$, а в групах G типу 2 $y = z$ і M — група типу (p, p, p). Група G типу 1 містить ненормальну неабелеву підгрупу $\langle ab \rangle \leftthreetimes \langle y \rangle$, а група G типу 2 — ненормальну неабелеву підгрупу $\langle x \rangle \leftthreetimes \langle by \rangle$. Звідси і за означенням метагамільтонових груп G — неметагамільтонова група.

Нехай $|[A; B]| > 2$. Покажемо, що $[A; B] \ni N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$ чи $B \lhd G$, то покладемо $A = N$ чи $B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \ntriangleleft G$, $B \ntriangleleft G$, $A \neq 1$, B — власна немаксимальна підгрупа з G, $G' \cap \cap B = \langle c \rangle$, $|c| \in \{1, p\}$, $|B| > p^2$.

Припустимо, що $|c| = 1$. Тоді з умови $G' = w(U)$ $U \cap B = 1$. Оскільки $[G : U] \leq p^3$ і $|B| > p^2$, одержали суперечність. Отже, $|c| = p$. Легко бачити, що для будь-якого $g \in G$ $g^p \in Z(G)$. З цього випливає, що B — нециклічна група. Легко показати, що $M = w(G)$. Звідси G не містить підгруп діедра порядку 8 та неабелевих підгруп порядку p^3 та експоненти p.

Нехай B — група кватерніонів порядку 8. Тоді $A = \Phi(B)$ і G — група типу 1, $A = B' \leq G' = w(U) \leq Z(G)$ і тому $A \lhd G$, що не так. Звідси $w(B)$ — група типу (p, p), $|B'| \leq p$. При $p = 2$ G — група типу 1 теореми, всі інволюції з B належать $w(B)$. За наслідком 7 з [10] B — метациклічна група. При $p > 2$ за результатом з [8, 9] неметациклічна група B містить або підгрупу порядку p^3 і експоненти p, що в нашому випадку неможливо, або підгрупу типу 2 теореми 3.3 з [3] і $G' \not\leq Z(G)$. Зрозуміло, що G — група типу 2 теореми, $|G| = 3^5$, $|B| = 3^4$ і тому $B \lhd G$, що не так. Отже, завжди B — метациклічна група. Легко бачити, що $B = \langle u \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle$, $|u| = p^{\Delta}$, $w(\langle u \rangle) = \langle c \rangle$ і B — група типу 5 теореми 1 з [10]. Звідси $U \cap \langle v \rangle = 1$. Для груп G кожного з типів теореми $|v| = p$, $A \leq$ $\leq N = \langle u^p \rangle \times \langle v \rangle$. Звідси $\Delta > 1$.

Нехай G — група типу 2 теореми. Тоді $\langle c \rangle = \langle a^3 \rangle$, $|u| = 9$, для будь-якого f з M $\langle c \rangle \langle f \rangle \lhd G$. Звідси $\langle c \rangle \times \langle v \rangle = N \lhd G$, що й треба було довести.

Нехай G — група типу 1 теореми. Тоді $G = U \leftthreetimes \langle v \rangle = UB$ і без порушення загальності можна вважати, що $U \cap B = \langle u \rangle$. При $|u| > p^2$ $w(\langle u \rangle) = w(\langle b \rangle) =$ $= \langle c \rangle$. Але $[U, \langle v \rangle] = \langle c \rangle$. Звідси $\langle c \rangle \times \langle v \rangle \lhd G$ і тому $N \lhd G$, що й треба було довести.

Нехай, нарешті, $|u| = p^2$. Тоді $u = a^i b^j$. Оскільки $\beta > 2$ і $G' \leq Z(G)$, то $|b^j| \leq p$. Зрозуміло, що $|a^i| < p^2$. Якщо $(i, p) = 1$, то $u^p = a^{pi} b^{pj} \notin \langle b \rangle$. Звідси $\langle u \rangle \cap \langle b \rangle = 1$. Оскільки $[u, v] = [a^i b^j, v] = [a, v]^i = b^{ip^{\beta-1}}$, то $B = (\langle b^{p^{\beta-1}} \rangle \times$ $\times \langle v \rangle) \leftthreetimes \langle u \rangle$ — неметациклічна група, що не так. При $(i, p) \neq 1$, $|b^j| = p^2$. Але тоді $u^p = (a^i b^j)^p = a^{pi} b^{pj} = b^{pj} \neq 1$ і $\langle u \rangle$ містить $w(\langle b \rangle) = \langle c \rangle$, $w(B) = \langle c \rangle \times$ $\times \langle v \rangle \lhd G$.

Покажемо, що $u \in Z(G)$. Дійсно, $\langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \leq Z(G)$, тому $a^i \in Z(G)$. Оскільки $|b^j| = p$, $\beta > 2$, то $(j, p) \neq 1$. Тоді $b^j \in Z(G)$ і тому $u \in Z(G)$. Звідси $B = \langle u \rangle w(B) \lhd G$, що суперечить вибору B. Отже, завжди $[A ; B] \lhd N < G$, тобто G — УЩН[ ]-група. Достатність доведена. Теорема доведена.

1. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные группы с плотной системой нормальных подгрупп // XIV Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. – С. 57–58.
2. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные непильпотентные группы с обобщенно плотной системой инвариантных подгрупп. – Киев, 1980. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 19-25-80.
3. *Семко М. М.* Про будову груп з умовами щільності нормальності для підгруп. – Київ, 1996. – 67 с. – Деп. в ДНТБ України, № 743-Ук-96.
4. *Семко М. М.* Про будову груп з узагальненою щільністю нормальності для підгруп. – Київ, 1996. – 41 с. – Деп. в ДНТБ України, № 2340-Ук-96.
5. *Семко М. М.* Будова локально ступінчастих ненільпотентних УЩН[ ]-груп // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 6. – С. 789–798.
6. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
7. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
8. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 793 S.
9. *Blackburn N.* Generalization of certain elementary theorems on p-groups // Proc. London Math. Soc. – 1961. – **11**, № 41. – P. 1–22.
10. *Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Про групи, близькі до метациклічних // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 6. – С. 782–790.
11. *Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Метагамільтонові групи та їх узагальнення. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.
12. *Кузенный Н. Ф., Левищенко С. С.* К вопросу о расщепляемости групп // Комплексный анализ, алгебра и топология. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 62–68.

Одержано 11.07.96