УДК 517.9

К. Г. Валеев, А. Л. Лапшин (Киев. эконом. ун-т)

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

We suggest a new method for optimizing solutions of a linear control system, which is based on solving the Lyapunov matrix equation.

Запропоновано новий метод оптимізації розв'язків лінійної системи управління, пов'язаний з розв'язанням матричного рівняння Ляпунова.

Многие задачи синтеза оптимального управления могут быть приведены к линейной системе уравнений [1]

$$\frac{dX(t,\mu)}{dt} = A(\mu)X(t,\mu) + B(\mu)W(t), \qquad \dim X(t,\mu) = m, \tag{1}$$

где μ — вектор параметров, $W(t)$ — вектор возмущающих воздействий с корреляционной матрицей

$$\langle W(t)W^*(\tau)\rangle = C\cdot\delta(t-\tau), \qquad C^* = C \geq 0, \qquad \langle W(t)\rangle = 0. \tag{2}$$

Вектор μ выбирается из условия минимума функционала

$$J(\mu) = H^*D(\mu)H, \qquad D(\mu) = \lim_{t\to\infty}\langle X(t,\mu)X^*(t,\mu)\rangle,$$

$$H = \text{const}, \qquad \dim H = m. \tag{3}$$

В силу предположения (2) находим в явной форме матрицу

$$D(\mu) = \int_0^\infty e^{A(\mu)t}B(\mu)CB^*(\mu)e^{A^*(\mu)t}dt. \tag{4}$$

В работе [2] показано, что матрица D является решением матричного уравнения Ляпунова

$$A(\mu)D(\mu) + D(\mu)A^*(\mu) + B(\mu)CB^*(\mu) = 0, \qquad D \geq 0. \tag{5}$$

Решение (5) является установившимся решением матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dD(t,\mu)}{dt} = A(\mu)D(t,\mu) + D(t,\mu)A^*(\mu) + B(\mu)CB^*(\mu)$$

и может быть найдено численно из соотношения $D(\mu) = \lim_{t\to\infty}D(t,\mu)$.

Этот способ позволяет в явной форме вычислить функционал $J(3)$ и, следовательно, минимизировать его значение.

***Пример* 1.** Ищем оптимальное управление в системе

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) + \varphi(t), \tag{6}$$

где $\varphi(t)$ — стационарный случайный процесс со спектральной плотностью $S_\varphi(\omega) = 4\alpha(\omega^2 + \alpha^2)^{-1}$. Находим оптимальное управление из условия минимума функционала

$$J = \lim_{t\to\infty}\left(m^2\langle x^2(t)\rangle + \langle u^2(t)\rangle\right).$$

Полагая $u(t) = \beta x(t) + \gamma\varphi(t)$, сводим уравнение (6) к системе вида (1)

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \beta x_1(t) + (\gamma + 1)x_2(t),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\alpha x_2(t) + 2\sqrt{\alpha}\,w(t), \quad x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv \varphi(t),$$

и из уравнения Ляпунова (5) находим функционал в явном виде

$$J = 2m^2(\gamma+1)^2(\beta-\alpha)^{-1}\beta^{-1} + 2(\beta - \alpha\gamma^2)(\beta-\alpha)^{-1}.$$

Из необходимых условий минимума получаем

$$\beta = -m, \quad \gamma = -m(\alpha+m)^{-1},$$

что определяет оптимальное управление

$$u(t) = -\frac{m}{\alpha}\frac{dx(t)}{dt} - m\frac{\alpha+m}{\alpha}x(t).$$

Полученные результаты совпадают с результатами работы [1].

2. Аналогичный способ можно предложить для оптимизации системы линейных разностных уравнений.

Рассмотрим систему линейных разностных уравнений

$$X_{n+1}(\mu) = A(\mu)X_n(\mu) + B(\mu)W_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \dim X_n(\mu) = m, \tag{7}$$

где W_n — последовательность независимых случайных векторов таких, что

$$\langle W_n = 0\rangle, \quad \langle W_n W_n^*\rangle = C, \quad C^* = C \geq 0,$$
$$\langle W_n W_s^*\rangle = 0, \quad n, s = 0, 1, 2, \dots . \tag{8}$$

Ищем значение квадратичного функционала

$$J(\mu) = H^* D(\mu) H, \quad D(\mu) = \lim_{n\to\infty}\langle X_n(\mu)X_n^*(\mu)\rangle, \quad H = \mathrm{const}\,\dim H = m. \tag{9}$$

Из системы разностных уравнений (7) находим

$$D_n(\mu) = \left\langle\left(A^n(\mu)X_0 + \sum_{s=0}^{n-1}A^s(\mu)B(\mu)W_{n-1-s}\right)(X_0^*(A^*(\mu))^n + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=0}^{n-1}W_{n-1-s}^*B^*(\mu)\left(A^*(\mu)\right)^s)\right\rangle =$$
$$= A^n(\mu)\langle X_0X_0^*\rangle(A^*(\mu))^n + \sum_{s=0}^{n-1}A^s(\mu)B(\mu)CB^*(\mu)\left(A^*(\mu)\right)^s.$$

Предполагая, что $A^n(\mu) \to 0$ при $n \to \infty$, находим явное выражение для $D(\mu)$:

$$D(\mu) = \sum_{s=0}^{n-1} A^s(\mu) B(\mu) C B^*(\mu) \left(A^*(\mu)\right)^s.$$

Эта матрица удовлетворяет матричному уравнению Ляпунова

$$D(\mu) = B(\mu) C B^*(\mu) + A(\mu) D(\mu) A^*(\mu), \tag{10}$$

численно-аналитические методы решения которого приведены в работе [2].

Решая уравнение (10), можно вычислить значение функционала $J(\mu)$ (9) и, следовательно, минимизировать его.

К системе разностных уравнений (7) могут быть сведены лишь дискретные системы уравнений [2, 3].

Все изложенные здесь результаты можно обобщить на случай, когда коэффициенты систем уравнений (1), (7) зависят от марковского конечнозначного случайного процесса [4].

1. *Петров Ю. П.* Синтез оптимальных систем управления при неполностью известных возмущающих силах. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 292.
2. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1981. – 412 с.
3. *Острем К. Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1973. – 322 с.
4. *Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во Росс. ун-та дружбы народов, 1996. – 260 с.

Получено 05.03.97