УДК 517.9

С. В. Янчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ПОВЕДІНКУ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТИ НОРМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We obtain necessary and sufficient conditions for the existence of sliding mode and also for the knotting of solutions of the equation for components of a normal system of first-order differential equations.

Одержані необхідні та достатні умови існування ковзаючого режиму, а також зав'язування у вузол розв'язків рівняння для компонент нормальної системи диференціальних рівнянь першого порядку.

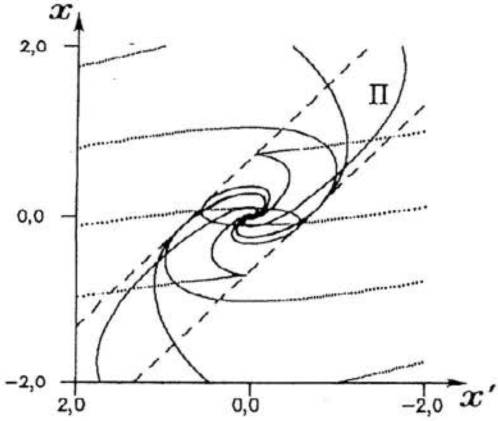
Відомо, що нормальна система диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \ldots, x_q), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_q' &= f_q(t, x_1, \ldots, x_q) \end{aligned} \tag{1}$$

в деяких випадках може бути зведена до одного еквівалентного диференціального рівняння порядку q. Але не завжди таке рівняння існує для кожної з компонент x_j системи (1). В такому випадку фазовий простір $(t, x_q, x_q', \ldots$ $\ldots, x_q^{(q-1)})$ компоненти x_q розбивається на кілька областей, в кожній з яких рух відбувається згідно з деяким рівнянням — диференціальним рівнянням порядку q. Часто такі області можуть перетинатися. Будемо говорити, що в такому випадку розв'язок зав'язується у вузол. Тоді в одній і тій же області фазового простору будуть виконуватися кілька рівнянь. Для того щоб ліквідувати цю неоднозначність, необхідно враховувати рівняння для інших компонент. При цьому, внаслідок неперервності розв'язку системи (1) розв'язок у фазовому просторі $(t, x_q, x_q', \ldots, x_q^{(q-1)})$ може перейти з однієї області в іншу лише через межу.

На мал. 1 наведено приклад зав'язування у вузол розв'язку рівняння для компоненти x системи

$$\begin{aligned} x' &= -x + y - \frac{y^3}{3}, \\ y' &= -x - y, \end{aligned} \tag{2}$$



Мал. 1.

або іншими словами, фазовий портрет цієї системи у просторі (x, x'). Зав'язування відбувається в області П. З вигляду мал. 1 стає зрозумілим вибір терміну „зав'язування у вузол".

Крім того, може відбуватися ковзання розв'язку рівняння для компоненти [4]. Це означає, що в тому ж фазовому просторі виникає многовид нульової міри, в якому розв'язок може знаходитись деякий час. Як і в попередньому випадку, для знаходження моменту виходу розв'язку з ковзаючого режиму необхідно враховувати рівняння для інших компонент.

Згадані вище явища зустрічались в канонічній системі Чуа [1 – 3] і описані в роботах [1, 3], де були одержані рівняння для компонент цієї системи.

В даній роботі розглядаються системи виду (1) з досить гладкими правими частинами $f_i \in C^{q+1}$, $1 \le i \le q$.

Без втрати загальності будемо розглядати компоненту q. Введемо деякі позначення. Нехай D — оператор диференціювання за часом вздовж розв'язку системи (1), тобто

$$Dg\left(t, x_1, \ldots, x_q\right) = \frac{\partial g}{dt} + \sum_{i=1}^{q} f_i \frac{\partial g}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Позначимо також

$$\begin{aligned} F_1(t, x) &\stackrel{\text{def}}{=} f_q(t, x), \\ F_2(t, x) &\stackrel{\text{def}}{=} D f_q(t, x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_q(t, x) &\stackrel{\text{def}}{=} D^{q-1} f_q(t, x), \end{aligned} \tag{4}$$

де $x = \left(x_1, \ldots, x_q\right)$.

Введемо відображення $F: R^{q+1} \to R^{q+1}$ таким чином:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1, \\ \xi_2 &= \eta_{q+1}, \\ \xi_i &= F_{i-2}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{q+1}), \quad 3 \le i \le q+1. \end{aligned} \tag{5}$$

Тут $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{q+1})$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{q+1})$ — $(q+1)$-вимірні вектори. Нехай G — область, в якій існує розв'язок (1). Тоді розглянемо таку множину точок в фазовому просторі системи (1):

$$S = \left\{ (t, x) \in G \colon \frac{\partial(F_1 \ldots F_{q-1})}{\partial(x_1 \ldots x_{q-1})} = 0 \right\}. \tag{6}$$

Оскільки $f_i \in C^{q+1}(G)$, то $F_i \in C^2(G)$ і, значить, $\dfrac{\partial(F_1 \ldots F_{q-1})}{\partial(x_1 \ldots x_{q-1})} = J(t, x_1, \ldots, x_q)$ — неперервно диференційовна функція.

Множина $S_q = \{ (t, x) \in G : J(t, x) = 0, \ \operatorname{grad} J(t, x) \ne 0 \}$ є об'єднанням q-вимірних гіперповерхонь, множина S_{q+1} — об'єднанням відкритих (у R^{q+1}) підмножин множини $S \setminus S_q$, а $S' = S \setminus (S_q \cup S_{q+1})$.

Далі буде показано, що S_{q+1} буде відповідати області ковзаючого режиму рівняння для компоненти, а S_q — межам між різними областями. Що ж стосується множини S', то до неї ввійдуть в першу чергу точки перетину гіперповерхонь, які входять в S_q, а також деякі інші, які ми не будемо розглядати.

Використовуючи такі позначення, доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *Якщо S не порожня, то фазовий простір системи* (1) *розбивається на області Π_i, $i \in I$, яким відповідають області $F(\Pi_i)$ фазового простору рівняння для компоненти x_q, в яких розв'язок задовольняє деяке диференціальне рівняння порядку q. При цьому межа між деякими областями буде складатися з точок виду $F(S)$.*

Для доведення продиференціюємо по t останнє рівняння системи (1):

$$x_q'' = \frac{\partial f_q}{dt}(t, x) + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

Тепер позбудемося похідних у правій частині одержаного рівняння, враховуючи (1). Одержимо $x_q'' = F_2(t, x)$. Аналогічно для інших похідних $x_q^{(i)} = F_i(t, x)$, $1 \le i \le q$. Таким чином, в результаті одержуємо систему рівнянь

$$x_q^{(i)} = F_i(t, x), \quad 1 \le i \le q,$$

з якої видно, що оператор F, заданий формулою (5), визначає відображення розширеного фазового простору $(t, x_1, \ldots, x_q)$ системи (1) в розширений фазовий простір $(t, x_q, x_q', \ldots, x_q^{(q-1)})$ рівняння для компоненти.

Якщо перші $q-1$ рівнянь системи (5) визначають в околі деякої точки неявну векторну функцію $(\eta_2, \ldots, \eta_q) = \mathcal{F}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1})$, то локально рівняння для q-ї компоненти буде мати вигляд

$$x_q^q = F_q\Big(t, \mathcal{F}\Big(t, x_q, \ldots, x_q^{(q-1)}\Big), x_q\Big). \tag{7}$$

Далі твердження теореми є наслідком теореми про існування неявної функції. Дійсно, в точках, що належать до множини $G \setminus S$, виконані умови цієї теореми і тому рівняння для компоненти буде мати вигляд (7). При цьому межа областей, де можливе зображення (7), буде складатися з точок множини S. У фазовому просторі $(t, x_q, x_q', \ldots, x_q^{(q-1)})$ їй відповідає множина $F(S)$.

Зауваження. Доведена теорема дає необхідні умови зав'язування розв'язку у вузол.

Наступна теорема дає необхідні та достатні умови зав'язування розв'язку у вузол, які є більш складними для перевірки.

Теорема 2. *Для того щоб розв'язок рівняння для компоненти q системи* (1) *зав'язувався у вузол в деякій області фазового простору $(t, x_q, x_q', \ldots$ $\ldots, x_q^{(q-1)})$, необхідно і достатньо, щоб оператор F відображав будь-які дві точки з областей Π_i і Π_j, $i \ne j$, відповідно в одну точку.*

Доведення цієї теореми очевидне з урахуванням доведення теореми 1.

Теорема 3. *Якщо множина S_{q+1} не порожня, то розв'язок рівняння для компоненти x_q являє собою ковзаючий режим на множині $M = F(S_{q+1})$ нульової міри.*

Покажемо спочатку, що M складається з частин траєкторій у фазовому просторі для компоненти x_q. Для будь-якої точки $y_0 \in M$ існує $x_0 \in$ $\in S_{q+1} : y_0 = F(x_0)$. Оскільки $S_{q+1} \in G$, то для $x_0 \in S_{q+1}$ існують такі t_0, t_1 та розв'язок $x(t)$ рівняння (1), що для будь-якого $t \in [t_1, t_2]$ $x(t) \in S_{q+1}$, причому x_0 лежить на цій траєкторії, тобто існує $t \in [t_1, t_2]$ таке, що $x(t_0) = x_0$.

Тоді, очевидно, для будь-якого $t \in [t_1, t_2]$ $F(x(t)) \in M$. Твердження щодо міри множини M випливає з теореми Сарда.

За допомогою одержаних теорем можна досліджувати описані явища в будь-якій конкретній системі. Наприклад, розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y + \gamma z + m f(x),$$
$$\frac{dy}{dt} = x + \delta z, \tag{8}$$
$$\frac{dz}{dt} = y + \eta z,$$

де функція $f \in C^1(R)$. В [1] показано, що довільна система з однією такою нелінійністю може бути зведена до вигляду (8).

Оскільки в даному випадку система автономна, то замість розширеного фазового простору можна розглядати звичайний. Спочатку розглянемо компоненту y. Функції F_i будуть мати вигляд

$$F_{1,y} = x + \delta z,$$
$$F_{2,y} = \alpha x + m f'(x) + (\beta + \delta) y + (\gamma + \delta\eta) z.$$

Відповідний якобіан

$$J_y = \begin{vmatrix} 1 & \alpha + mf'(x) \\ \delta & \delta\eta + \gamma \end{vmatrix} = \delta\eta + \gamma - \delta(\alpha + m f'(x)). \tag{9}$$

Тоді множина S набуде вигляду

$$S = \left\{ x \colon f'(x) = -\frac{\gamma_1}{m},\ \gamma_1 = -\frac{1}{m}\left(\frac{\gamma}{\delta} + \eta - \alpha\right) \right\}. \tag{10}$$

Аналогічно для інших компонент знаходимо

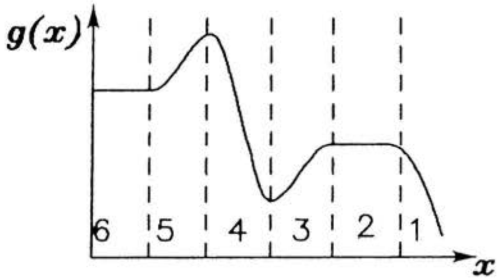
$$J_z = 1, \quad J_x = \beta^2\delta + \beta\gamma m - \gamma^2. \tag{11}$$

Тепер, застосовуючи теореми 1–3, в даному випадку одержуємо наступне твердження.

Наслідок. **1.** *Розв'язки рівнянь x і z компонент системи* (8) *не зав'язуються у вузол і не мають ковзаючого режиму і, таким чином, можуть бути зображені єдиним диференціальним рівнянням третього порядку у всьому фазовому просторі.*

2. *Фазовий простір для компоненти y системи* (8) *розбивається на області K_i, $i \in I$, поверхнями $F(x_i)$, які відповідають площинам $x = x_i$ фазового простору (x, y, z), де $g'(x_i) = 0$, $g(x) = f(x) + \gamma_1 x / m$. В кожній області рівняння може бути зображене одним диференціальним рівнянням порядку q. Виключення складають області, що відповідають таким відрізкам $[a, b]$: $\forall x \in [a, b]$ $g'(x) = 0$. Такі області будуть відповідати ковзаючому режиму. Для того щоб розв'язок для компоненти y зав'язувався у вузол, необхідно й достатньо, щоб функція $g(x)$ була немонотонною.*

Даний наслідок можна проілюструвати таким чином. Нехай g — гладка функція, яка зображена на мал. 2.



Мал. 2.

Тоді вісь x розбивається на 6 областей, які відповідають шести областям $\Pi_1, \ldots, \Pi_6$ у фазовому просторі системи (1). В областях $F(\Pi_2)$ і $F(\Pi_6)$ буде мати місце ковзаючий режим в рівнянні для компоненти y. В кожній з областей $F(\Pi_1)$, $F(\Pi_3)$, $F(\Pi_4)$, $F(\Pi_5)$ розв'язок може бути зображений у вигляді розв'язку одного диференціального рівняння третього порядку. В $F(\Pi_1)$, $F(\Pi_3)$, $F(\Pi_4)$, а також в $F(\Pi_4)$, $F(\Pi_5)$ розв'язок буде зав'язуватись у вузол.

Одним з найпростіших прикладів може бути функція $g(x) = x^3 + ax$. В цьому випадку фазовий простір компоненти y при деяких значеннях параметрів розбивається на три області: Π_{-1}, Π_0, Π_1 і в області Π_0 розв'язок зав'язується у вузол.

Що стосується системи (2), то з теорем 1 – 2 випливає, що розв'язок її у фазовому просторі (x, x') буде зав'язуватись у вузол в області $\Pi = \{(x, x') : -2/3 < x + x' < 2/3\}$, що ми й бачимо на мал. 1.

1. *Samoylenko A. M., Chua L.* Differential equations for the components of the canonical Chua's circuit and its general properties // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**, № 1. – P. 25–41.
2. *Chua L. O.* A Zoo of strange attractors from the canonical Chua's circuits // Tech. Rep. M92/87, Electronic research laboratory. – 1992.
3. *Янчук С. В.* Узагальнена канонічна система Чуа. Рівняння для компонент // Системи еволюційних рівнянь з післядією. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – С. 140–149.
4. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 222 с.

Одержано 27.11.95