УДК 517.54

А. К. Бахтин (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПРОИЗВЕДЕНИИ ВНУТРЕННИХ РАДИУСОВ СИММЕТРИЧНЫХ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ *

Some results about extremal problems of nonoverlapping domains with free poles on the unit circle known for the simply connected case are generalized to the case of multiply connected domains.

Узагальнено на випадок багатозв'язних областей деякі результати, відомі у однозв'язному випадку щодо екстремальних задач про неналягаючі області з вільними полюсами на одиничному колі.

Введение. Впервые экстремальные задачи для неналегающих областей появились в работе [1], где была решена экстремальная задача о произведении конформных радиусов пары неналегающих областей. В дальнейшем эта тематика бурно развивалась во многих направлениях (см., например, [2 – 6]).

В работе [7] были рассмотрены задачи для неналегающих областей нового типа, а именно: задачи со свободными полюсами на окружности. В дальнейшем такие задачи изучались в работах [6, 8, 9], где постановки задач обобщались и усиливались в разных направлениях.

Целью данной работы является обобщение результатов о произведении степеней конформных радиусов, полученных в [10] для односвязного случая, на случай симметричных неналегающих областей конечной связности.

1. Формулировка результатов. Пусть U_w — круг $|w|<1$ w-плоскости C_w, $l=\partial U_w=\{w\colon |w|=1\}$, а $\sum_n$ — объединение всех систем $F_n=\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ неналегающих конечносвязных, симметричных относительно l областей w-плоскости по всем наборам $\{a_k\}_{k=1}^n$ попарно различных точек на l таких, что $a_k\in B_k$, $k=1,2,\ldots,n$. (Область B называется симметричной относительно окружности $|w|=1$, если для любой точки $w\in B$ точка $(\overline{w})^{-1}\in B$, где $\overline{w}$ — точка, комплексно-сопряженная с точкой w.) Подкласс класса $\sum_n$, состоящий из систем $F_n=\{B_k\}_{k=1}^n$ таких, что $\infty\;\overline{\in}\;B_k$, $k=1,2,\ldots,n$, обозначим через $\widetilde{\sum}_n$. Всюду в дальнейшем фиксируем произвольное значение α, $\alpha>0$.

На классе $\sum_4$ рассмотрим функционал

$$J_\alpha(F_4)=r(B_1,a_1)\,r^\alpha(B_2,a_2)\,r(B_3,a_3)\,r^\alpha(B_4,a_4), \tag{1}$$

где $F_4\in\{B_k\}_{k=1}^4\in\sum_4$, а на классе $\widetilde{\sum}_2$ — функционал

$$\mathcal{J}_\alpha(F_2)=r(B_1,a_1)\,r^\alpha(B_2,a_2), \tag{2}$$

где $F_2\in\{B_k\}_1^2\in\widetilde{\sum}_2$, а $r(B,a)$ обозначает внутренний радиус области B относительно точки $a\in B$.

Пусть дополнение произвольной конечносвязной области B до расширенной комплексной плоскости $\overline{C}_w$ состоит из компонент $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_s,\ldots,\Gamma_m$, $m\in N$. Операцию перехода от области B к области $B^s=B\bigcup\Gamma_s$, $s=1,2,\ldots$ $\ldots,m$, назовем операцией заполнения s-й граничной компоненты области B. Пусть $\{B_k\}_{k=1}^n\in\sum_n$ $\left(\text{соответственно}\in\widetilde{\sum}_n\right)$. Граничная компонента Γ_s

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Международных научных фондов (гранты № UB 4200 ISF и 94-1474 INTAS) и Министерства Украины по делам науки и технологий.

области B_{k_0}, $k_0 = 1, 2, \ldots, n$, называется несущественной, если $B_j \not\subset \Gamma_s$ $\forall j = 1, 2, \ldots, n$.

Функция Грина области B имеет следующее представление в окрестности точки $w = a$:

$$g_B(w, a) = \log \frac{1}{|w-a|} + \log r(B, a) + o(1), \tag{3}$$

где $o(1) \rightrightarrows 0$ при $w \to a$.

Для произвольной области B внутренний радиус определяется как точная верхняя грань множества внутренних радиусов в точке $w = a$ всех областей $B_n \subset B$, $a \in B_n$, где область B_n имеет классическую функцию Грина [11, с. 97–110].

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. На классе $\sum_4$ найти максимум функционала (1) и определить все экстремальные системы.

Задача 2. На классе $\widetilde{\sum}_2$ найти максимум функционала (2) и определить все экстремальные системы.

Отметим, что

$$\sup_{F_4 \in \sum_4} J_\alpha(F_4) = J_\alpha^0 < +\infty, \qquad \sup_{F_2 \in \widetilde{\sum}_2} \mathcal{J}_\alpha(F_2) = \mathcal{J}_\alpha^0 < +\infty.$$

Из этих свойств функционалов (1) и (2) следует существование экстремальных систем, несмотря на некомпактность рассматриваемых классов.

Упорядоченная пара $E = (E_0, E_1)$ непересекающихся, непустых, замкнутых множеств E_0, E_1 в расширенной комплексной плоскости C называется конденсатором [11, с. 82–104]. Открытое множество $V_E = C \setminus (E_0 \cup E_1)$ называется полем конденсатора E.

Емкость конденсатора E определяется следующим образом:

$$\operatorname{Cap} E = \inf_{v \in P(V_E)} \iint_{V_E} [(v_x)^2 + (v_y)^2]\, dx\, dy = \inf_{v \in P(V_E)} \iint_{V_E} |\nabla v|^2\, dx\, dy,$$

где нижняя грань берется по классу $P(V_E)$ всех функций, вещественных, непрерывных в C, равных нулю на E_0 и единице на E_1 и удовлетворяющих условию Липшица на каждом компакте из V_E.

Гармоническая во множестве V_E функция $\omega \in P(V_E)$ (если она существует) называется потенциальной функцией и, кроме того,

$$\operatorname{Cap} E = \iint_{V_E} |\nabla \omega|^2\, dx\, dy.$$

Рассмотрим следующие квадратичные дифференциалы (сведения по теории квадратичных дифференциалов см. в [5]):

$$Q(w)\, dw^2 = \frac{(\alpha-1)w^4 - 2(\alpha+1)w^2 + (\alpha-1)}{(w^4-1)^2}\, dw^2, \tag{4}$$

$$Q(w)\, dw^2 = \frac{(\alpha-1)w^2 - 2(\alpha+1)w + (\alpha-1)}{w(w^2-1)^2}\, dw^2. \tag{5}$$

Критическим множеством для квадратичного дифференциала $Q(w)\, dw^2$ назовем замыкание объединения траекторий $Q(w)\, dw^2$, имеющих предельную концевую точку в некоторой конечной критической точке дифференциала $Q(w)\,dw^2$. Обозначим через T_A критическое множество для квадратичного дифференциала (4), а через T_B критическое множество дифференциала (5).

Рассмотрим допустимое относительно дифференциала (4) семейство областей $F_4 = \{D_k\}_{k=1}^4 \in \sum_4$, определяемое следующим образом:

$$\begin{gathered}\bigcup_{k=1}^{4} D_k = C_w \setminus T_A,\\ a_k = \exp\frac{\pi}{2}(k-1)i \in D_k, \quad k=1,2,3,4.\end{gathered} \tag{6}$$

Пусть $F_4(\varepsilon) = \{\varepsilon D_k\}_{k=1}^4$, $\varepsilon \in l$, $\varepsilon D_k = \{\xi \in \overline{C}_w \colon \xi = \varepsilon w,\ w \in D_k\}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Через $\check{D}$ будем обозначать область D, из которой удалено любое конечное число точек. Тогда пусть $\check{F}_4(\varepsilon) = \{\varepsilon \check{D}_k\}_1^4$, $\varepsilon \in l$.

В свою очередь, дифференциал (5) определяет единственную пару областей G_1 и G_2 так, что

$$\begin{gathered}G_1 \cup G_2 = C_w \setminus T_B,\\ \exp\pi(k-1)i = a_k \in G_k, \quad k=1,2.\end{gathered} \tag{7}$$

Для произвольного $\varepsilon \in l$ рассмотрим системы вида $F_2(\varepsilon) = \{\varepsilon G_k\}_1^2$, $\varepsilon G_k = \{\xi \in C_w \colon \xi = \varepsilon w,\ w \in G_k\}$, $k=1,2$, и $\check{F}_2(\varepsilon) = \{\varepsilon \check{D}_k\}_{k=1}^2$.

В данной работе доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *В задаче* 1 *экстремальны системы* $\check{F}_4(\varepsilon)$ $\forall\, \varepsilon$, $\varepsilon \in l$, *и только они.*

Теорема 2. *В задаче* 2 *экстремальны системы* $\check{F}_2(\varepsilon)$ $\forall\, \varepsilon$, $\varepsilon \in l$, *и только они.*

Таким образом, экстремальные системы полностью определяются в терминах квадратичных дифференциалов (4), (5) и соотношений (6), (7). Отметим, что степенные функционалы вида (2) в задачах о неналегающих областях впервые изучались в работах [12–14]. Для симметричных неналегающих областей эти функционалы рассматривались в работах [7, 10, 15].

3. Дифференциально-функциональные уравнения для экстремальных систем. Пусть $F_2 = \{B_1, B_2\}$ — экстремальная система в задаче 2, а $g_1(w, a_1)$ и $g_2(w, a_2)$ — обобщенные функции Грина для областей B_1 и B_2 соответственно относительно точек $a_1 \in B_1$ и $a_2 \in B_2$. (Функции Грина B_1 и B_2 существуют, так как $\operatorname{cap}\partial B_k > 0$, $k=1,2$.) Из формулы (3) получаем

$$\begin{gathered}g_1(w, a_1) = \log\frac{r(B_1, a_1)}{|w-a_1|} + o(1),\\ o(1) \rightrightarrows 0, \quad w \to a_1,\\ g_2(w, a_2) = \log\frac{r(B_2, a_2)}{|w-a_2|} + o(1),\\ o(1) \rightrightarrows 0, \quad w \to a_2.\end{gathered} \tag{8}$$

Согласно методу граничной вариации [16, 17] имеем следующую вариационную формулу:

$$\zeta = \zeta_\rho(w) = w + \frac{A\cdot\rho^2}{w_0}\frac{w}{w-w_0} - \frac{\overline{A}\cdot\rho^2}{\overline{w}_0}\frac{w^2}{(1-w\overline{w}_0)} + O(\rho^3), \tag{9}$$

где $A = A(\rho)$, $|A(\rho)| \le 4$, ρ — достаточно малое, положительное число, величина $\rho^{-3}O(\rho^3)$ равномерно ограничена на любом компакте, не содержащем точек w_0 и $\dfrac{1}{\overline{w}_0}$.

Функция (9) задает однолистное и конформное отображение в области $C_w \setminus \Gamma_\rho$, где Γ_ρ — множество, состоящее из двух симметричных относительно l континуумов, $w_0 \in \Gamma_\rho$, $\dfrac{1}{\overline{w}_0} \in \Gamma_\rho$, причем $\zeta(0) = 0$, $\zeta(\infty) = \infty$ [7, 15]. При отображении (9) любая система $\{B_1, B_2\} \in \widetilde{\sum}_2$ преобразуется в „близкую" систему $\{B_1^\rho, B_2^\rho\} \in \widetilde{\sum}_2$. Обратное к (9) отображение можно записать в следующем виде:

$$w = w(\zeta) = \zeta - \frac{A\rho^2}{w_0}\frac{\zeta}{\zeta-\overline{w}_0} + \frac{\overline{A}\rho^2}{\overline{w}_0}\frac{\zeta^2}{(1-\overline{w}_0\zeta)} + O(\rho^3). \tag{10}$$

Согласно свойству инвариантности функции Грина при конформном отображении получаем

$$g_{B_k^\rho}(\zeta, a_k^\rho) = g_{B_k}(w(\zeta), a_k), \qquad k=1,2, \tag{11}$$

где $w = w(\zeta)$ — отображение, задаваемое соотношением (10), $a_k^\rho = \zeta_\rho(a_k)$.

Тогда из соотношений (8) – (10) следует

$$g_{B_k^\rho}(\zeta, a_k^\rho) = \log\frac{r(B_k, a_k)}{|w-a_k^\rho|} + o(1), \qquad k=1,2, \tag{12}$$

$$|w-a_k| = |\zeta - a_k^\rho|\left\{1 + \operatorname{Re} A\rho^2\left[\frac{1}{(a_k^\rho - w_0)^2} + \frac{2\overline{a}_k^\rho - (\overline{a}_k^\rho)^2 w_0}{w_0(1-w_0\,\overline{a}_k^\rho)^2}\right] + O(\rho^3)\right\} + o(1), \tag{13}$$

$$o(1) \rightrightarrows 0, \quad \zeta \to a_k^\rho, \quad k=1,2.$$

Из равенств (11) – (13) имеем

$$g_{B_k^\rho}(\zeta, a_k) = \log\frac{1}{|\zeta - a_k^\rho|} +$$

$$+ \log\frac{r(B_k, a_k)}{1 + \operatorname{Re} A\rho^2\left[\dfrac{1}{(a_k^\rho - w_0)^2} + \dfrac{2\overline{a}_k^\rho - (\overline{a}_k^\rho)^2 w_0}{w_0(1-w_0\,\overline{a}_k^\rho)^2}\right] + O(\rho^3)} + o(1), \quad k=1,2. \tag{14}$$

Соотношение (14) дает возможность получить

$$r(B_k^\rho, a_k^\rho) = r(B_k, a_k)\left\{1 - \operatorname{Re} A\rho^2\frac{2a_k^\rho}{w_0(a_k^\rho - w_0)^2} + O(\rho^3)\right\}, \qquad k=1,2. \tag{15}$$

С помощью формулы (15) вычисляем значения функционала (2) для „близких" систем $F_2^\rho = \{B_1^\rho, B_2^\rho\}$:

$$\mathcal{J}_\alpha(F_2^\rho) = \mathcal{J}_\alpha(F_2)\left\{1 - \operatorname{Re}\frac{A\rho^2}{w_0}\left[\frac{2a_1^\rho}{(a_1^\rho - w_0)^2} + \frac{2\alpha a_2^\rho}{(a_2^\rho - w_0)^2}\right] + O(\rho^3)\right\}. \tag{16}$$

Тогда для экстремальных систем $\{B_1, B_2\}$ из соотношения (16) следует неравенство

$$\operatorname{Re}\frac{A}{w_0}\left[\frac{2a_1^\rho}{(a_1^\rho - w_0)^2} + \frac{2\alpha a_2^\rho}{(a_2^\rho - w_0)^2}\right] + O(\rho^3) \geq 0 \tag{17}$$

для достаточно малых положительных ρ и любых значений A, w_0, определяемых формулой (9).

Неравенство (17), в силу леммы Шиффера [17], означает, что экстремальная система $\{B_1, B_2\}$ является допустимым семейством [5] относительно квадратичного дифференциала

$$Q(w)\,dw^2 = -2\left\{\frac{a_1}{(a_1 - w)^2} + \frac{\alpha a_2}{(a_2 - w)^2}\right\}\frac{dw^2}{w}, \tag{18}$$

где $a_k \in B_k$, $a_k \in l$, $\mathcal{J}_\alpha(F_2) = \mathcal{J}_\alpha^0$, $\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 = \overline{C}_w$.

Далее нам необходимо показать, что любая экстремальная система в задаче 1 является допустимым семейством относительно следующего квадратичного дифференциала:

$$Q(w)\,dw^2 = -2\left[\frac{2-\overline{a}_1 w}{(a_1 - w)^2} + \alpha\frac{2-\overline{a}_2 w}{(a_2 - w)^2} + \frac{2-\overline{a}_3 w}{(a_3 - w)^2} + \alpha\frac{2-\overline{a}_4 w}{(a_4 - w)^2}\right]dw^2,$$
$$a_k \in l \bigcap B_k, \quad \bigcup_{k=1}^{4} B_k = \overline{C}_w, \quad J_\alpha(F_4) = J_\alpha^0. \tag{19}$$

Для этого будем использовать вариант формулы Дюрена–Шиффера [16]

$$\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_\rho(w) = w + \frac{A\rho^2}{w - \overline{w}_0} - \frac{\overline{A}\rho^2 w^3}{1 - w\overline{w}_0} + O(\rho^3),$$

где величины $A = A(\rho)$, w_0, ρ и $O(\rho^3)$ имеют такой же смысл, как и в формуле (9). Вариация $\tilde{\zeta}_\rho(w)$ задает однолистное и конформное отображение в той же области, что и формула (9), с той лишь разницей, что $w = 0$ и $w = \infty$ не являются неподвижными точками [7]. Обратное отображение имеет вид

$$w = w_\rho(\tilde{\zeta}) = \tilde{\zeta} - \frac{A\rho^2}{\tilde{\zeta} - \overline{w}_0} + \frac{\overline{A}\rho^2\tilde{\zeta}^3}{1 - \tilde{\zeta}\overline{w}_0} + O(\rho^3).$$

Для варьированных объектов используем следующие обозначения:

$$\tilde{B}_k^\rho = \tilde{\zeta}_\rho(B_k), \ \tilde{a}_k^\rho = \tilde{\zeta}_\rho(a_k), \ \{B_k\}_{k=1}^4 \in \sum\nolimits_4, \ a_k \in l \bigcap B_k.$$

Отсюда и из конформной инвариантности функции Грина, аналогично тому, как это было сделано при получении соотношений (9)–(13), будем иметь

$$g_{\tilde{B}_k^\rho}(\tilde{\zeta}, a_k) = \log\frac{r(B_k, a_k)}{|w - a_k|} + o(1),$$

$$o(1) \rightrightarrows 0, \quad w \to a_k,$$

$$|w - a_k| = |\tilde{\zeta} - \tilde{a}_k^\rho|\left\{1 + 2\rho^2 \operatorname{Re} A\left[\frac{2 - \overline{\tilde{a}_k^\rho w_0}}{(\tilde{a}_k^\rho - w_0)^2}\right] + O(\rho^3)\right\} + o(1),$$

$$o(1) \rightrightarrows 0, \quad \tilde{\zeta} \to \tilde{a}_k^\rho, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

$$g_{\tilde{B}_k^\rho}(\tilde{\zeta}, \tilde{a}_k^\rho) = \log \frac{1}{|\tilde{\zeta} - \tilde{a}_k^\rho|} +$$

$$+ \log \frac{r(B_k, a_k)}{1 + 2\rho^2 \operatorname{Re} A \left[\dfrac{2 - \overline{\tilde{a}_k^\rho}\, w_0}{(\tilde{a}_k^\rho - w_0)^2} \right] + O(\rho^3)} + o(1), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Отсюда следует формула для вариации внутреннего радиуса

$$r(\tilde{B}_k^\rho, \tilde{a}_k^\rho) = r(B_k, a_k) \left\{ 1 - 2\rho^2 \operatorname{Re} A \left[\frac{2 - \overline{\tilde{a}_k^\rho}\, w_0}{(\tilde{a}_k^\rho - w_0)^2} \right] + O(\rho^3) \right\}, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Вычисляя функционал J_α для варьированной системы областей $\{\tilde{B}_k^\rho\}_1^4$, получаем соотношение (19).

Квадратичные дифференциалы (18) и (19) были получены в [7, 10, 15] для случая односвязных областей.

4. Доказательство теоремы 2. Любую экстремальную в задаче 2 систему можно нормировать следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= e^{2i\theta}, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя соотношения (20) в равенство (18) и производя необходимые вычисления, получаем выражение

$$Q(w)\, dw^2 = -2e^{2i\theta} \frac{(e^{-2i\theta} + \alpha) w^2 - 2(\alpha + 1) w + (e^{2i\theta} + \alpha)}{w(w-1)^2 (w - e^{2i\theta})^2}\, dw^2. \tag{21}$$

Выполняя операцию заполнения несущественных граничных компонент и учитывая при этом неубывание внутреннего радиуса, получаем, что среди экстремальных систем всегда найдется система, содержащая хотя бы одну односвязную область. Пусть в такой экстремальной системе областей $\{B_1, B_2\}$ односвязной будет область B_1. Произведем круговую симметризацию (см. [5, 6, 11, 18, 19]) области B_1 относительно начала координат и положительной полуоси, а области B_2 — относительно начал координат и отрицательной полуоси. В результате получим пару односвязных неналегающих областей $\{B_1^*, B_2^*\} \in \widetilde{\sum}_2$, $1 \in B_1^*$, $-1 \in B_2^*$, характеризующихся свойствами

$$r(B_1, 1) \le r(B_1^*, 1), \qquad r(B_2, e^{2i\theta}) \le r(B_2^*, -1). \tag{22}$$

Из соотношений (22) и экстремальности пары $\{B_1, B_2\}$ следует $r(B_1^*, 1) = r(B_1, 1)$, $r(B_2^*, -1) = r(B_2, e^{2i\theta})$. В силу результатов Дженкинса [5, 18, 19] получаем $B_1^* = B_1$, $B_2^* = B_2$, $e^{2i\theta} = -1$. Таким образом, экстремальные системы, содержащие хотя бы одну односвязную область, удовлетворяют условиям теоремы 2. Рассмотрим теперь любую экстремальную систему с неодносвязными областями. Из свойств внутреннего радиуса следует, что несущественные граничные компоненты такой системы должны иметь логарифмическую емкость нуль. В конечносвязном случае это означает, что произвольная экстремальная система получается из односвязной экстремальной системы удалением любого конечного числа точек. С учетом этих фактов получаем, что экстремальная односвязная система, нормированная условиями (20), является системой круговых областей для квадратичного дифференциала, получаемого из (21) при $\theta = \pi/2$:

$$Q(w)\,dw^2 = 2\frac{(\alpha-1)w^2 - 2(\alpha+1)w + (\alpha-1)}{w(w^2-1)^2}\,dw^2. \tag{23}$$

Квадратичный дифференциал (23) полностью определяет нормированную экстремальную пару областей $\{B_1, B_2\} \equiv \{G_1, G_2\}$. Все другие экстремальные системы совпадают с $\check{F}_2(\varepsilon)$, $\varepsilon \in l$.

5. Доказательство теоремы 1. Любая экстремальная в задаче 1 система является допустимым семейством областей относительно квадратичного дифференциала (19). Рассмотрим вспомогательную вариацию круга U_w, определяемую функцией

$$\zeta = \frac{w-\sigma}{1-\overline{\sigma}w}, \tag{24}$$

где σ — произвольный комплексный параметр.

Из формулы (24) получим соотношение

$$\zeta = w - \sigma + \overline{\sigma}w^2 + O(\sigma^2), \tag{25}$$

где величина $\sigma^{-2}O(\sigma^2)$ равномерно ограничена на любом компакте при $\sigma \to \to 0$. Отображение, обратное к (24), имеет представление, аналогичное разложению (25):

$$w = \zeta + \sigma - \overline{\sigma}\zeta^2 + O(\sigma^2). \tag{26}$$

При отображении (24) произвольная экстремальная система областей $F_4 = = \{B_k\}_1^4$ преобразуется в „близкую" систему $F_4^\sigma = \{B_k^\sigma\}_1^4$. Из конформной инвариантности функции Грина, формул (3), (26), аналогично тому, как это было сделано при получении формул (7), (12) – (15), получаем равенство

$$r(B_k^\sigma, a_k^\sigma) = r(B_k, a_k)\{1 + 2\operatorname{Re}\overline{\sigma}a_k + O(\sigma^2)\}, \tag{27}$$

где B_k^σ — образ области B при отображении (24), a_k^σ — образ точки a_k при том же отображении. Использовав соотношение (27), вычислим значение функционала (1) для „близких" к экстремальной систем

$$J_\alpha(F_4^\sigma) = J_\alpha(F_4)\{1 + 2\operatorname{Re}\overline{\sigma}[a_1 + a_3 + \alpha(a_2 + a_4)] + O(\sigma^2)\}. \tag{28}$$

Из равенства (28) и экстремальности системы $F_4 = \{B_k\}_1^4$ имеем

$$a_1 + a_3 + \alpha(a_2 + a_4) = 0, \quad a_k \in B_k \cap l, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{29}$$

Соотношение (29) позволяет нормировать экстремальную систему следующим образом:

$$a_1 = -a_3 = 1, \quad a_2 = -a_2 = e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{30}$$

С учетом условий нормировки (30) квадратичный дифференциал (19) принимает следующий вид:

$$Q(w)\,dw^2 = -8e^{2\varphi i}\frac{(\alpha + e^{-2\varphi i})w^4 - 2(\alpha+1)w^2 + (\alpha + e^{2\varphi i})}{(w^2-1)^2(w^2 - e^{2\varphi i})^2}\,dw^2. \tag{31}$$

Из конкретного вида дифференциала (31) следует

$$Q(-w)\,d(-w)^2 = Q(w)\,dw^2. \tag{32}$$

Свойство (32) означает, что структура траекторий дифференциала (31) имеет центральную симметрию относительно начала координат. Учитывая формулы (19), (30) – (32), получаем, что любая экстремальная система $F_4 = \{B_k\}_{k=1}^4 \in$

$\in \sum_4$, состоит из областей B_k, $k = 1, 2, 3, 4$, допустимых относительно квадратичного дифференциала (31). Для того чтобы доказать теорему 1, остается показать, что

$$J_\alpha(F_4) \leq J_\alpha(\check{F}_4(\varepsilon)), \tag{33}$$

где знак равенства достигается только для систем $\check{F}_4(\varepsilon)$, определенных соотношениями (6). При доказательстве неравенства (33) используются методы работы [20].

Произвольная нормированная условиями (30) экстремальная система $F_4 = \{B_k\}_{k=1}^4$ допустима относительно квадратичного дифференциала (31) и, кроме того, $a_1 = 1 \in B_1$, $a_2 = e^{i\varphi} \in B_2$, $a_3 = -1 \in B_3$, $a_4 = -e^{i\varphi} \in B_4$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Рассмотрим множество $\sum_4(\varphi) \subset \sum_4$ всех систем $\{B_k\}_{k=1}^4$, односвязных, неналегающих, симметричных относительно l и таких, что $1 \in B_1$, $B_3 = \{w: -w \in B_1\}$, $e^{i\varphi} \in B_2$, $B_4 = \{w: -w \in B_2\}$, $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. На классе $\sum_4(\varphi)$ рассмотрим задачу об экстремуме функционала (1). Экстремальные системы $\{B_k(\varphi)\}_1^4$ в такой задаче существуют и являются допустимыми относительно квадратичного дифференциала следующего вида:

$$Q(w)\,dw^2 = -A\frac{(w^2 - m^2)(1 - \overline{m}^2 w^2)}{(w^2 - 1)^2 (w^2 - e^{2i\varphi})^2}\,dw^2, \tag{34}$$

где $m = m(\varphi)$, $|m(\varphi)| < 1$ — нуль квадратичного дифференциала, однозначно определенный при каждом значении $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, постоянная величина A такова, что дополнение до критического множества дифференциала (34) состоит только из круговых областей.

Получить дифференциал (34) можно с помощью вариационного метода (см. [2, с. 108 ; 4, с. 34–58]).

Тогда согласно теореме 1 работы [20] получаем неравенство

$$J_\alpha(\{B_k\}_{k=1}^4) \leq J_\alpha(\{B_k(\varphi)\}_{k=1}^4), \tag{35}$$

где $F_4 = \{B_k\}_{k=1}^4 \in \sum_4$ — экстремальная система, фиксированная выше, а $\{B_k(\varphi)\}_{k=1}^4 \in \sum_4(\varphi)$ — экстремальная односвязная система с фиксированными полосами в точках $w = 1$, $w = e^{i\varphi}$, $w = -1$, $w = -e^{i\varphi}$.

Структура траекторий квадратичного дифференциала (34) имеет свойство центральной симметрии относительно начала координат.

Ясно, что области $B_k(\varphi)$, $k = 1, 2, 3, 4$, являются круговыми областями квадратичного дифференциала (34). Поэтому области $B_1(\varphi)$ и $B_3(\varphi)$ (соответственно $B_2(\varphi)$ и $B_4(\varphi)$) центрально-симметричны друг другу относительно начала координат.

Теперь доказательство теоремы 1 завершается аналогично тому, как это было сделано в работе [21].

Для этого проводим круговую симметризацию системы $\{B_k(\varphi)\}_{k=1}^4$ следующим образом: область $B_1(\varphi)$ симметризуем относительно начала координат и положительной части вещественной оси, область $B_3(\varphi)$ — относительно начала и отрицательной полуоси, область $B_2(\varphi)$ — относительно начала и верхней половины оси ординат, $B_4(\varphi)$ — относительно начала и нижней половины оси ординат.

В силу свойства центральной симметрии структуры траекторий квадратичного дифференциала (34) получаем, что симметризованная система $\{B_k^*\}_{k=1}^4$ принадлежит классу $\sum_4\left(\frac{\pi}{2}\right) \subset \sum_4$.

Из неравенства (35) и из свойства неубывания внутреннего радиуса при симметризации следует, что система $\{B_k^*\}_1^4$ экстремальна в классе $\sum_4$ и, следовательно, $\{B_k^*\}_1^4$ является системой круговых областей дифференциала (4). Из теоремы единственности Дженкинса [18, 19] получаем, что экстремальными системами могут быть только системы $\check{F}_4(\varepsilon)$. Теорема 1 доказана.

6. Некоторые дополнения. Пусть $F_n = \{B_k\}_{k=1}^n \in \sum_n$. Введем обозначения:

$$\begin{gathered} B_k(\delta_k) = \{w:\ g_{B_k}(w, a_k) > \delta_k\}, \\ F_n(\{\delta_k\}) = \{B_k(\delta_k)\}_{k=1}^n, \\ E_k(\delta_k) = (\partial B_k, E_1^{(k)}(\delta_k)), \\ E_1^{(k)}(\delta_k) = \{w:\ g_{B_k}(w, a_k) \ge \delta_k\}, \\ V_{E_k}(\delta_k) = \{w:\ 0 < g_{B_k}(w, a_k) < \delta_k\}, \\ \delta_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{36}$$

Известно, что

$$\operatorname{Cap} E_k(\delta_k) = \frac{2\pi}{\delta_k}. \tag{37}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Если для двух систем* $\{B_k\}_1^n$, $\{D_k\}_1^n$, $a_k \in B_k$, $a_k^0 \in D_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *из класса* $\sum_n$ *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k}(B_k, a_k) \le \prod_{k=1}^n r^{\alpha_k}(D_k, a_k^0),$$

где $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *— фиксированный вектор, то для любого набора положительных чисел* δ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *имеет место неравенство*

$$\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k}(B_k(\delta_k), a_k) \le \prod_{k=1}^n r^{\alpha_k}(D_k(\delta_k), a_k^0).$$

Доказательство леммы следует из того факта, что

$$r(B_k(\delta_k), a_k) = r(B_k, a_k)\, e^{-\delta_k}.$$

Из теорем 1, 2 и леммы легко вытекают следующие утверждения.

***Следствие* 1.** *На классе* $\widetilde{\sum}_2$ *при всех* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *справедливо неравенство*

$$r(B_1(\delta_1), a_1)\, r^{\alpha}(B_2(\delta_2), a_2) \le r(G_1(\delta_1), 1)\, r^{\alpha}(G_2(\delta_2), -1),$$

причем знак равенства в данном неравенстве реализуется тогда и только тогда, когда система $\{B_1, B_2\}$ *получается из системы* $\{\check{G}_1, \check{G}_2\}$ *вращением плоскости вокруг начала координат; при этом пара точек* $w = 1$, $w = -1$ *совмещается с парой точек* $w = a_1$, $w = a_2$.

Следствие 2. *На классе* $\sum_4$ *при любых* $\delta_k > 0$, $k = 1, 2, 3, 4$, *выполняется неравенство*

$$r(B_1(\delta_1), a_1)\, r^{\alpha}(B_2(\delta_2), a_2)\, r(B_3(\delta_3), a_3)\, r^{\alpha}(B_4(\delta_4), a_4) \le$$

$$\le r(D_1(\delta_1), 1)\, r^{\alpha}(D_2(\delta_2), i)\, r(D_3(\delta_3), -1)\, r^{\alpha}(D_4(\delta_4), -i),$$

причем знак равенства реализуется тогда и только тогда, когда система $\{B_k\}_1^4$ *получается из системы* $\{D_k\}_1^4$ *вращением плоскости вокруг начала координат; при этом набор точек* a_k, $k = 1, 2, 3, 4$, *совмещается с набором точек* $w = 1$, $w = i$, $w = -1$, $w = -i$.

Если ограничиться случаем класса $\sum_n^0 \subset \sum_n$, состоящего из систем односвязных симметричных неналегающих областей, то можно показать справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *На классе* $\sum_4^0$ *при любом* $\delta > 0$ *выполняется неравенство*

$$[\operatorname{Cap} E_1(\sqrt{\alpha}\delta)]^{-1} + \alpha[\operatorname{Cap} E_2(\delta)]^{-1} + [\operatorname{Cap} E_3(\sqrt{\alpha}\delta)]^{-1} + [\operatorname{Cap} E_4(\delta)]^{-1} \le$$

$$\le [\operatorname{Cap} D_1(\sqrt{\alpha}\delta)]^{-1} + \alpha[\operatorname{Cap} D_2(\delta)]^{-1} + [\operatorname{Cap} D_3(\sqrt{\alpha}\delta)]^{-1} + \alpha[\operatorname{Cap} D_4(\delta)]^{-1},$$

где α *— фиксированное положительное число, причем знак равенства реализуется тогда и только тогда, когда система конденсаторов* $\{E_k(\delta)\}_1^4$ *с точностью до вращения плоскости вокруг начала координат совпадает с системой* $\{D_k(\delta)\}_1^4$.

***Доказательство теоремы* 3.** Следуя работе [20], обозначим

$$E_1 \cup E_2 = (E_0^{(1)} \cap E_0^{(2)}, E_1^{(1)} \cup E_1^{(2)}), \tag{38}$$

где $E_1 = (E_0^{(1)}, E_1^{(1)})$, $E_2 = (E_0^{(2)}, E_1^{(2)})$ — произвольные конденсаторы.

Справедливо неравенство [20, с. 113]

$$\operatorname{Cap} E_1 \cup E_2 \le \operatorname{Cap} E_1 + \operatorname{Cap} E_2. \tag{39}$$

Условимся называть конденсаторы $E_1, E_2, \ldots, E_n$ неналегающими, если их поля V_{E_k}, $k = 1, 2, \ldots, n$, попарно не налегают друг на друга. Для случая неналегающих конденсаторов в выражении (39) имеет место знак равенства.

Образуем конденсатор

$$E_{\alpha}(\delta) = E_1(2(1+\sqrt{\alpha})\delta) \cup E_2\left(2\frac{1+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\delta\right) \cup E_3(2(1+\sqrt{\alpha})\delta) \cup E_4\left(2\frac{1+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\delta\right).$$

Из условия неналегания конденсаторов и из свойств (36) – (39) получаем

$$\frac{1}{2(1+\sqrt{\alpha})}[\operatorname{Cap} E_1(\delta)]^{-1} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2(1+\sqrt{\alpha})}[\operatorname{Cap} E_2(\delta)]^{-1} +$$

$$+ \frac{1}{2(1+\sqrt{\alpha})}[\operatorname{Cap} E_3(\delta)]^{-1} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2(1+\sqrt{\alpha})}[\operatorname{Cap} E_4(\delta)]^{-1} = [\operatorname{Cap} E_{\alpha}(\delta)]^{-1}. \tag{40}$$

Повторяя рассуждения работы [20, с. 115 – 117] и учитывая конструкции (36) – (40), получаем утверждение теоремы 3.

***Замечания.* 1.** Теоремы 1 и 2 легко распространить на случай систем неналегающих областей произвольной связности.

2. Степенные функционалы в задачах о неналегающих областях на плоскости впервые рассмотрены в работах [13, 14]. Задача 2 данной работы является в некотором смысле „свободным" аналогом задачи Колбиной. В дальнейшем степенные функционалы исследовались в работах [3 – 7].

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1934. – **5**. – С. 159 – 245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
4. *Кузьмина Г. В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. – Л.: Наука, 1980. – 241 с.
5. *Дженкинс Дж.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
6. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Владивосток, 1988. – 193 с. – Машинопись.
7. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 12 с.
8. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48 – 66.
9. *Емельянов Е. Г.* О связи двух задач об экстремальном разбиении // Там же. – 1987. – **160**. – С. 91 – 98.
10. *Бахтина Г. П., Бахтин А. К.* О произведении степеней конформных радиусов симметричных неналегающих областей // Однолистные функции и неналегающие области. – Киев, 1995. – С. 1 – 6. – (Препринт / Ин-т математики НАН Украины; 95.13).
11. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
12. *Куфарев П. П., Фалес А. Э.* Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей // Докл. АН СССР. – 1951. – **81**, № 6. – С. 995 – 998.
13. *Колбина Л. И.* Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении // Там же. – 1952. – **84**, № 5. – С. 865 – 868.
14. *Колбина Л. И.* Конформное отображение единичного круга на неналегающие друг на друга области // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1955. – **5**. – С. 37 – 43.
15. *Бахтина Г. П.* О конформных радиусах симметричных неналегающих областей // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 21 – 27.
16. *Duren P. L., Schiffer M.* A variational method for functions schlicht in an annulus // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1962. – **9**. – P. 260 – 272.
17. *Schiffer M.* A method of variation within the family of simple functions // Proc. Lond. Math. Soc. – 1938. – **44**. – P. 432 – 449.
18. *Jenkins J. A.* Some uniqueness results in the theory of symmetrization // Ann. Math. – 1955. – **61**, № 1. – P. 106 – 115.
19. *Jenkins J. A.* Some uniqueness results in the theory of symmetrization. II // Ibid. – 1962. – **75**, № 2. – P. 223 – 230.
20. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в задачах о неналегающих областях // Мат. сб. – 1985. – **128**, № 1. – С. 110 – 123.
21. *Бахтина Г. П., Бахтин А. К.* Об экстремальных задачах для симметричных неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 179 – 185.

Получено 21.06.96