УДК 517.9

Л. П. Нижник (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ТОЧЕЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

For the Schrödinger operator corresponding to the point interaction, a direct definition is given in terms of the singular perturbation.

Наведено безпосереднє означення оператора Шредінгера, що відповідає точковій взаємодії, через сингулярне збурення.

Под точечным взаимодействием в квантовой механике понимают взаимодействие, описываемое уравнением Шредингера

$$-\Delta u + Vu = k^2 u, \tag{1}$$

когда потенциал $V(x)$ имеет вид дельта-функции Дирака $V(x) = \lambda\,\delta(x)$. В этом случае для описания точечных взаимодействий используют самосопряженный оператор $-\Delta_\alpha$, являющийся самосопряженным расширением в $L_2(E^n)$ оператора $-\Delta$ из пространства $C_0^\infty(E^n \setminus \{0\})$ [1]. В случае $n = 3$ резольвента оператора $-\Delta_\alpha$ имеет вид [1]

$$(-\Delta_\alpha - k^2)^{-1} g = \int \mathcal{G}_k(x-s) g(s)\,ds + \left(\alpha - \frac{ik}{4\pi}\right)^{-1} \mathcal{G}_k(x) \int \mathcal{G}_k(s) g(s)\,ds, \tag{2}$$

где

$$\mathcal{G}_k(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}, \qquad \operatorname{Im} k > 0.$$

Параметр α характеризует самосопряженное расширение и имеет физический смысл при описании рассеяния ($-(4\pi\alpha)^{-1}$ — так называемая длина рассеяния).

Параметр α в формуле (2) для резольвенты имеет также очень простой смысл с точки зрения уравнений в частных производных. Действительно, из (2) легко увидеть, что функция $u(x) = (-\Delta_\alpha - k^2)^{-1} g$ из области определения оператора $-\Delta_\alpha$ имеет при $|x| \to 0$ особенность типа $|x|^{-1}$, существуют числа

$$\begin{aligned} u_{-1} &= \lim_{x \to 0} |x|\,u(x), \\ u_0 &= \lim_{x \to 0} \left(u(x) - u_{-1}|x|^{-1}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

и справедливо соотношение [2]

$$u_0 - 4\pi\alpha u_{-1} = 0. \tag{4}$$

Соотношение (4) имеет смысл граничного условия в точке $x = 0$ для функций $u(x)$ из области определения оператора $-\Delta_\alpha$. Граничное условие (4) однозначно определяет оператор $-\Delta_\alpha$.

Рассмотрим теперь в пространстве $L_2(E^3)$ линейное множество H_+, состоящее из функций соболевского пространства $W_2^2(E^3)$, дополненного функцией $e^{-|x|^2}/|x|$, т. е. вне любой окрестности точки $x = 0$ функции из H_+ совпадают с $W_2^2(E^3)$, а в окрестности точки $x = 0$ имеют особенность $|x|^{-1}$. Для функций $u(x) \in H_+$ можно определить числа u_{-1}, u_0 по формулам (3).

Определим теперь на множестве H_+ линейный оператор

$$L_{\lambda,\gamma} u(x) = -\Delta u(x) + \delta(x)[\lambda u_0 + \gamma u_{-1}], \tag{5}$$

где действие оператора $-\Delta$ понимается в смысле теории обобщенных функций. Область значения оператора $L_{\lambda,\gamma}$ рассматривается в классе обобщенных функций над основным пространством $C_0^\infty(E^3)$. Она состоит из пространства $L_2(E^3)$, дополненного дельта-функцией Дирака. Поскольку в обобщенном смысле $-\Delta(1/|x|) = 4\pi\delta(x)$, то действие оператора $L_{\lambda,\gamma}$ на H_+ можно представить в виде

$$L_{\lambda,\gamma} u(x) = -(\Delta u)(x) + \delta(x)[\lambda u_0 + \gamma u_{-1} + 4\pi u_{-1}], \tag{6}$$

где $(\Delta u)(x)$ обозначает обычное применение оператора Лапласа к функции $u(x)$ при $x \neq 0$.

Значения оператора $L_{\lambda,\gamma} u(x)$ принадлежат пространству $L_2(E^3)$ тогда и только тогда, когда для функции $u(x) \in H_+$ выполняется граничное условие в точке $x = 0$:

$$\lambda u_0 + (\gamma + 4\pi) u_{-1} = 0. \tag{7}$$

Сопоставляя (7) и (4), приходим к важному выводу, что при λ и γ, удовлетворяющим равенству

$$\alpha = -\left(1 + \frac{\gamma}{4\pi}\right)\lambda^{-1}, \tag{8}$$

самосопряженный оператор $-\Delta_\alpha$, описывающий точечное взаимодействие, является естественным сужением в $L_2(E^3)$ оператора $L_{\lambda,\gamma}$:

$$-\Delta_\alpha u = -\Delta u(x) + \delta(x)[\lambda u_0 + \gamma u_{-1}]. \tag{9}$$

Равенство (9) означает, что область определения оператора $-\Delta_\alpha$ состоит из тех функций $u(x) \in H_+$, которые при подстановке в правую часть (9) приводят к функции из $L_2(E^3)$.

Представление (5) можно получить как формальный предел $-\Delta u + V_n u$ при $n \to \infty$, если считать $u(x) \in H_+$ и

$$V_n(x) \to \lambda\,\delta(x), \qquad \frac{V_n(x)}{|x|} \to \gamma\,\delta(x). \tag{10}$$

Легко построить последовательность $V_n(x)$, для которой выполняется (10) в смысле обобщенных функций над классом $C_0^\infty(E^3)$. Таковыми, например, будут

$$V_n(x;\lambda,\gamma) = \begin{cases} \dfrac{3\lambda}{28\pi} n^3 & \text{при } n^{-1} \le |x| \le 2n^{-1}, \\ -\dfrac{3\lambda}{28\pi} n^5 + \dfrac{\gamma}{6\pi} n^4 & \text{при } n^{-2} \le |x| \le 2n^{-2}, \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases} \tag{11}$$

Соотношение (8) можно также получить формально из уравнения для резольвенты оператора Шредингера

$$(-\Delta - k^2 + V_n)^{-1} = (-\Delta - k^2)^{-1} - (-\Delta - k^2)^{-1} V_n(-\Delta - k^2 + V_n)^{-1}. \quad (12)$$

Если предположить, что существует предел $(-\Delta - k^2 + V_n)^{-1} \to (-\Delta_\alpha - k^2)^{-1}$ и предел в правой части (12) заменить на повторный предел, то при $n \to \infty$ из (12) получаем

$$(-\Delta_\alpha - k^2)^{-1} = (-\Delta - k^2)^{-1} - \lim_{n \to \infty} (-\Delta - k^2)^{-1} V_n(-\Delta_\alpha - k^2)^{-1}. \quad (13)$$

Рассматривая уравнение (13) для ядер и учитывая пределы (10), получаем нужную связь α с характеристиками λ и γ потенциалов V_n.

Как правило, характеристика γ для потенциала существенно больше, чем λ. Это приводит в силу (8) к большим значениям α, т. е. к отсутствию взаимодействия. Однако для очень специальных потенциалов предельное взаимодействие может сохраняться. Сформулируем строгий результат в этом направлении для уравнения Шредингера, возмущенного одномерными операторами. Рассмотрим при $n \to \infty$ последовательность операторов

$$L_n u = -\Delta u + V_n^{(1)}(x)(u, V_n^{(2)}) \quad (14)$$

при условии

$$V_n^{(j)}(x) \to \lambda_j \delta(x), \quad j = 1, 2. \quad (15)$$

Теорема. *Пусть для операторов* L_n *выполняется условие* (15) *и по норме* $L_2(E^3)$

$$\int \mathcal{G}_k(x-s) V_n^{(j)}(s)\, ds \to \lambda_j \mathcal{G}_k(x), \quad j = 1, 2, \quad \operatorname{Im} k > 0. \quad (16)$$

Пусть также существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \int\int \frac{1}{|x-s|} V_n^{(1)}(x) V_n^{(2)}(s)\, dx\, ds = \gamma. \quad (17)$$

Тогда резольвента оператора L_n *сходится к резольвенте* $-\Delta_\alpha$:

$$(L_n - k^2)^{-1} \to (-\Delta_\alpha - k^2)^{-1}, \quad \operatorname{Im} k > 0,$$

где

$$\alpha = -\left(1 + \frac{\gamma}{4\pi}\right)(\lambda_1 \lambda_2)^{-1}. \quad (18)$$

Доказательство теоремы сразу следует из явного вида резольвенты L_n:

$$(L_n - k^2)^{-1} g = (-\Delta - k^2)^{-1} g -$$

$$- (-\Delta - k^2)^{-1} V_n^{(1)}((-\Delta - k^2)^{-1} g, V_n^{(2)})[1 + ((-\Delta - k^2)^{-1} V_n^{(1)}, V_n^{(2)})]^{-1}. \quad (19)$$

В силу предположения теоремы

$$((-\Delta - k^2)^{-1} V_n^{(1)}, V_n^{(2)}) =$$

$$= \int\int \frac{e^{ik|x-s|}}{4\pi|x-s|} V_n^{(1)}(x) V_n^{(2)}(s)\, dx\, ds \to \frac{\gamma}{4\pi} + \frac{ik}{4\pi} \lambda_1 \lambda_2,$$

поэтому правая часть (19) имеет предел по операторной норме, и он совпадает с оператором $(-\Delta_\alpha - k^2)^{-1}$ с α, задаваемым формулой (18).

Замечания. **1.** Для выполнения условия (17) последовательности $V_n^{(j)}(x)$, $j = 1, 2$, должны быть определенным образом согласованы между собой. Например, если исходить из примера (11) и определить $V_n^{(1)}(x) = V_n(x\,;\lambda_1, \gamma_1)$, а $V_n^{(2)}(x) = V_{n^5}(x\,;\lambda_2, \gamma_2)$, то все условия теоремы будут выполнены. При этом

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \int\int \frac{1}{|x-s|} V_n^{(1)}(x) V_n^{(2)}(s)\, dx\, ds = \gamma_1 \lambda_2,$$

что соответствует снятию сначала интеграла по s, а затем по x.

2. Параметр α предельной резольвенты для операторов L_n из (14) не всегда можно выразить через константу взаимодействия и характеристику γ. Если в (14)

$$V_n^{(2)}(x) = -V_n^{(1)}(x) = V_n(x),$$

то для существования предельной резольвенты необходимо требовать существование предела

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \int\int \frac{1}{4\pi|x-s|} V_n(x) V_n(s)\, dx\, ds\right] \left[\int V_n(x)\, dx\right]^{-2}. \tag{20}$$

Это приводит к условию $\int V_n(x)\, dx \to 0$, т. е. к необходимости выбирать константу связи бесконечно малой величиной.

1. *Albeverio S., Gesztesy F., Höegh Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. – Springer-Verlag, 1988. (Рус. пер. *Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х.* Решаемые модели в квантовой механике. – М.: Мир, 1991. – 568 с.).
2. *Павлов Б. С.* Теория расширений и явно решаемые модели // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**, вып. 6 (258). – С. 99–131.

Получено 11.03.97