УДК 519.2

Е. С. Синайский (Горн. акад. Украины, Днепропетровск)

ОБ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ПРИВОДЯЩЕЙ К УСТОЙЧИВОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

We consider an integral equation describing the contagion phenomenon, in particular, the equation of state of hereditarily elastic body, and interpret this equation as a stochastic model, in which the Rabotnov exponent of fractional order plays the role of density of probability of random delay time. We investigate the approach of distribution for sums of values with a given density to the stable law and establish the principal characteristics of the corresponding renewal process.

Інтегральне рівняння, що описує явище післядії, зокрема рівняння стану спадковопружного тіла, інтерпретується як стохастична модель з щільністю ймовірності випадкового часу запізнювання у вигляді експоненти дробового порядку Работнова. Вивчається наближення розподілу для сум величин з даною щільністю до стійкого закону розподілу. Встановлюються основні характеристики відповідного процесу відновлення.

1. Пусть система, состоящая из большого числа однотипных элементов, подвергается зависящему от времени t воздействию $x(t)$, причем $x(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Под влиянием воздействия возможен переход элемента из пассивного состояния в активное. С вероятностью λ_0 элемент активизируется мгновенно, с вероятностью λ_1 $(\lambda_0 + \lambda_1 \leq 1)$ его реакция на воздействие $x(\tau)$ запаздывает случайным образом на величину $\theta > 0$, т. е. происходит в случайный момент времени $T = \tau + \theta$. Если $K(\theta)$ — плотность распределения величины θ, то $K(t-\tau)$ есть плотность распределения величины T, $K(t-\tau)d\tau$ — вероятность активизации элемента в момент t под влиянием воздействия, сосредоточенного на промежутке $[\tau, \tau + d\tau]$. Предположим, что результатом активизации элементов является некоторая физическая величина y, линейно зависящая от x. Ожидаемое в момент t значение y выражается формулой

$$y(t) = A\left[\lambda_0 x(t) + \lambda_1 \int_0^t K(t-\tau)x(\tau)\,d\tau\right], \qquad A = \text{const}. \tag{1}$$

Интегральное слагаемое (оператор наследственности) представляет здесь математическое ожидание составляющей, вызванной последействием.

Равенство (1) описывает эффекты запаздывания в явлениях различной физической природы (электромагнетизм, упругость, взаимодействие биологических сообществ [1]). Оно является определяющим уравнением механики наследственно-упругого тела [2]. Роль воздействия $x(t)$ играет напряжение, откликом $y(t)$ служит деформация, величины $A\lambda_0$ и $A\lambda_1$ характеризуют соответственно упругую и вязкоупругую податливость материала.

В качестве ядра уравнения (1) широко используется экспонента дробного порядка [2]

$$Э_{\alpha-1}(-\beta; t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{\alpha(n+1)-1}}{\Gamma[\alpha(n+1)]}, \qquad \beta > 0, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{2}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Интегралом (2) является функция Миттаг-Леффлера

$$E_\alpha(z) := \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\alpha n + 1):$$

$$\int_0^t Э_{\alpha-1}(-\beta; \tau)\,d\tau = \frac{1}{\beta}\left[1 - E_\alpha(-\beta t^\alpha)\right], \tag{3}$$

преобразование Лапласа ряда (2) приводит к равенству

$$\int_0^\infty e^{-pt}Э_{\alpha-1}(-\beta;t)dt = 1/(p^\alpha+\beta). \tag{4}$$

При всех значениях $t>0$ функция (2) положительна и с ростом t монотонно убывает к нулю, ее интеграл (3) при $t=\infty$ равен $1/\beta$. Указанные свойства позволяют рассматривать функцию $\beta Э_{\alpha-1}(-\beta;t)$ в качестве плотности распределения некоторой случайной величины θ со значениями на полуоси $t>0$. Так как

$$\beta Э_{\alpha-1}(-\beta;t)dt = Э_{\alpha-1}(-1;\beta^{1/\alpha}t)\,d(\beta^{1/\alpha}t),$$

то параметр β устраняется соответствующим преобразованием масштаба. Существенную роль играет только параметр α. Величина $\beta^{1/\alpha}t$ имеет смысл безразмерного времени. Заменив ее на t, изучим плотность распределения

$$э(t;\alpha) := Э_{\alpha-1}(-1;t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{\alpha(n+1)-1}}{\Gamma[\alpha(n+1)]}, \quad 0<\alpha<1. \tag{5}$$

Функция $э(t;\alpha)$ имеет слабую особенность при $t=0$. Применительно к наследственно-упругому телу, поведение которого описывается уравнением (1) с ядром (5), возможна следующая интерпретация. Упругие элементы тела („пружинки") ориентированы хаотически. В момент приложения нагрузки „пружинки", соосные действующей силе, растягиваются (сжимаются). Остальные элементы под влиянием внутренних связей испытывают переориентацию и после ее завершения, когда ось „пружинки" устанавливается по линии действия силы, деформируются. В зависимости от структуры тела полностью сонаправленными силе могут стать только те элементы, для которых начальный угол отклонения ψ принадлежал некоторому интервалу $(0,\psi_0)$. Для изотропного тела естественно считать, что величина ψ распределена в этом промежутке равномерно. Момент растяжения каждой „пружинки" запаздывает на время θ, которое функционально зависит от угла ψ. При монотонном изменении функции $\theta(\psi)$ плотность распределения $K(t)$ величины θ выражается через плотность распределения $Q(\varphi)$ величины ψ: $K(t)=Q[\psi(t)]\,|\psi'(t)|$, где $\psi(t)$ — функция, обратная $\theta(\psi)$. Если при $\psi\to 0$ $\theta\sim k_1\psi^a$, $a>1$ и $Q(0)\neq 0$, то при $t\to 0$ $K(t)\sim k_2t^{\alpha-1}$, причем $\alpha=1/a<1$, k_1, k_2 — постоянные, $K(0)=\infty$. Сингулярность ядра наследственного оператора выражает известный экспериментальный факт резкого роста деформации ползучести в начальный период нагружения. Именно для описания этого наблюдения и вводилась первоначально функция (2).

Удобным средством решения уравнения (1) и других уравнений с наследственными операторами, возникающих в задачах линейной вязкоупругости, является преобразование Лапласа. В случае ядра наследственности (2) простая форма его трансформанты (4) способствует эффективному применению методов комплексного анализа для отыскания интегральных представлений и построения асимптотических формул. В частности, справедливо равенство [2]

$$Э_{\alpha-1}(-\beta;t) = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n\beta^{-n-1}t^{-\alpha n-1}}{\Gamma(-\alpha n)} + r_N(t). \tag{6}$$

Остаточный член этого разложения оценивается так же, как в [3]:

$$|r_N(t)| \le \frac{\Gamma(\alpha N+\alpha+1)}{\pi\gamma\beta^{N+1}}t^{-\alpha N-\alpha-1}, \quad \gamma := \begin{cases}\beta & \text{при } \alpha\le 1/2;\\ \beta\sin\pi\alpha & \text{при } \alpha>1/2.\end{cases}$$

В силу (5), (6) и равенства $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\pi/\sin\pi\alpha$ имеем

$$э(t;\alpha) \sim \frac{1}{\pi}\sin\pi\alpha\Gamma(1+\alpha)t^{-\alpha-1}, \quad t\to\infty. \tag{7}$$

Соответствие (7) представляет интерес с точки зрения приложений функции $э(t;\alpha)$ для описания стохастических зависимостей гиперболического типа (закон Ципфа – Парето и др. [4]), а также для установления ее связи с устойчивыми законами распределения [5]. Асимптотика (7) позволяет утверждать, что распределение с плотностью (5) принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем α [5, 6].

2. Пусть θ_j, $j=1,2,\ldots$, — взаимно независимые неотрицательные случайные величины, распределенные с одной и той же плотностью $э\,(t;\alpha)$ (5). Будем отмечать чертой сверху преобразование Лапласа соответствующего оригинала, символом $\mathbf{M}$ математическое ожидание. Ввиду (4) и (5) для любой величины θ_j справедливо:

$$\overline{э}(p;\alpha) = \mathbf{M}\exp(-p\theta_j) := \int_0^\infty e^{-pt}э(t;\alpha)dt = \frac{1}{(p^\alpha+1)}. \tag{8}$$

Через $э_k(t;\alpha)$ обозначим плотность распределения нормированной суммы

$$S_k := (\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_k)/k^{1/\alpha}, \quad k=1,2,\ldots. \tag{9}$$

С учетом (8)

$$\overline{э}_k(p;\alpha) = \mathbf{M}\exp(-pS_k) = [\mathbf{M}\exp(-p\theta_j/k^{1/\alpha})]^k = (1+p^\alpha/k)^{-k}. \tag{10}$$

Плотность вероятности $g(t;\alpha)\equiv g(t;\alpha,1)$ устойчивого закона распределения с характеристическим показателем $0<\alpha<1$ имеет трансформанту Лапласа $\overline{g}(p;\alpha)=\exp(-p^\alpha)$ [5]. Положим

$$\overline{\Delta}_k(p;\alpha) := \overline{э}_k(p;\alpha)-\overline{g}(p;\alpha) = (1+p^\alpha/k)^{-k}-\exp(-p^\alpha). \tag{11}$$

Величина $\overline{\Delta}_k(p;\alpha)$ как функция комплексного переменного p многозначна. Она имеет точки ветвления $p=0$ и $p=\infty$. Соединим эти точки разрезом по действительной отрицательной полуоси и зафиксируем главную ветвь функции условием $|\arg p^\alpha|\le\pi\alpha$. Точку $p=0$ изолируем окружностью $|p|=r$, $r\to 0$. Выделенная ветвь функции $\overline{\Delta}_k(p;\alpha)$ в области $r<|p|<R$, $R\to\infty$, голоморфна. На любом конечном промежутке действительной положительной полуоси при $k\to\infty$ $\overline{\Delta}_k(p;\alpha)\to 0$ равномерно относительно p. Вследствие единственности голоморфных функций [7] $\overline{\Delta}_k(p;\alpha)\to 0$ также во всей полуплоскости $\operatorname{Re} p>0$.

Теорема *При любом* α *из интервала* $(0,1)$ *на промежутке* $[t_0,\infty)$, *где* $t_0>0$ *сколь угодно мало, справедливо равномерное по* t *асимптотическое равенство*

$$\Delta_k(t;\alpha) := э_k(t;\alpha)-g(t;\alpha) = O(1/k), \quad k\to\infty. \tag{12}$$

Для значений $0<\alpha<1/2$ *утверждение верно также при* $t_0=0$.

Доказательство. Исходной служит приложенная к (11) формула обратного преобразования Лапласа. Нетрудно показать, что путь интегрирования в ней можно преобразовать в путь, составленный из двух последовательно проходимых лучей $\Gamma_\pm := \{p: \arg p=\pm\pi\rho,\ 0<|p|<\infty\}$ с произвольным значением $\rho\in[1/2,1]$, так что

$$\Delta_k(t;\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\Gamma_-} + \int\limits_{\Gamma_+}\right)\left[\overline{\Delta}_k(p;\alpha)e^{pt}\,dp\right]. \tag{13}$$

Пусть $x := |p|$,

$$u := x^\alpha \cos\alpha\pi\rho, \quad v := x^\alpha \sin\alpha\pi\rho, \quad \lambda := 1 + u/k,$$
$$\mu := v/k, \quad \sigma^2 := \lambda^2 + \mu^2, \tag{14}$$

$$\delta(x) := \left[(\lambda - \mu i)/\sigma^2\right]^k - \exp(-u - iv). \tag{15}$$

В этих обозначениях согласно равенствам (13) и (11) получаем

$$|\Delta_k(t;\alpha)| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty |\delta(x)|\, e^{xt\cos\pi\rho}\, dx. \tag{16}$$

Функцию (15) представляем в виде

$$\delta(x) = \left(\frac{\lambda - \mu i}{\sigma}\right)^k \delta_0 - e^{-u}\left[\delta_1 e^{-iv} + \delta_2 (\lambda/\sigma)^k\right], \tag{17}$$

где

$$\delta_0 := \sigma^{-k} - e^{-u}, \quad \delta_1 := 1 - (\lambda/\sigma)^k, \quad \delta_2 := e^{-iv} - (1 - \mu i/\lambda)^k. \tag{18}$$

Для оценки этих величин применяем известные соотношения [8]:

$$my^{m-1}(x-y) \le x^m - y^m \le mx^{m-1}(x-y), \quad x, y > 0, \quad m \ge 1, \tag{19}$$

$$1 + x \le e^x, \quad e^x = 1 + x + (x^2/2)e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1, \tag{20}$$

$$(1 + u/m)^m \le (1 + u/k)^k, \quad 1 \le m \le k, \quad u > 0. \tag{21}$$

Считая, что $k \ge 2$, рассмотрим в отдельности два случая: а) $u \ge 0$, б) $u < 0$, $|u| \le v$, $|u| < k$.

Случай а). При $u \ge 0$ $(\sigma \ge \lambda \ge 1)$ вследствие (18) – (21) имеем

$$\delta_0 = \sigma^{-k}e^{-u}\left[(e^{2u/k})^{k/2} - (\sigma^2)^{k/2}\right] \ge -\frac{u^2 + v^2}{2k}e^{-u},$$
$$\delta_0 = \lambda^{-k}e^{-u}\left[(e^{u/k})^k - \lambda^k\right] \le \frac{u^2}{2k}\lambda^{-k}. \tag{22}$$

Из этих соотношений с учетом (14) получаем

$$|\delta_0| \le x^{2\alpha}/(2k). \tag{23}$$

Величина δ_1 оценивается аналогично:

$$0 \le \delta_1 = 1 - (\lambda^2/\sigma^2)^{k/2} \le \frac{k}{2}(1 - \lambda^2/\sigma^2) = \frac{v^2}{2k\sigma^2} \le x^{2\alpha}/(2k). \tag{24}$$

Пусть $\binom{k}{j}$ — биномиальные коэффициенты,

$$\omega_k(j) := \binom{k}{j+1}\frac{(j+1)!}{k^{j+1}} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right)\ldots\left(1 - \frac{j}{k}\right), \quad j = \overline{0, k-1},$$
$$\omega_k(k) := 0, \quad \Omega(j) := \frac{1 - \omega_k(j)}{j(j+1)}, \quad \Lambda(j) := \frac{1 - \lambda^{-j}}{j}, \quad j = \overline{1, k}. \tag{25}$$

Так как $0 \le \omega_k(j) \le 1$, то $\Omega(j) \ge 0$. Очевидно,

$$1/\omega_k(0) = 1, \quad 1/\omega_k(1) = 1 + 1/(k-1) > 1 + 1/k.$$

По индукции находим

$$1/\omega_k(j) \ge 1 + j(j+1)/(2k), \qquad 0 \le j \le k-1. \tag{26}$$

Ввиду (26) $\Omega(j)$ с ростом j убывает, следовательно,

$$0 \le \Omega(j) \le \Omega(1) = 1/(2k), \qquad 1 \le j \le k. \tag{27}$$

В силу монотонного изменения величины $\Lambda(j)$ имеем

$$0 \le \Lambda(j) \le \Lambda(1) \le u/k, \qquad j \ge 1, \qquad \lambda \ge 1. \tag{28}$$

Функция e^{-iv} с вещественным v допускает разложение [6]

$$e^{-iv} = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-iv)^j}{j!} + \frac{\theta v^{k+1}}{(k+1)!}, \qquad |\theta| \le 1. \tag{29}$$

На основании (18), (25) и (29) получаем

$$\delta_2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-iv)^j}{(j-1)!}\Lambda(j) + \sum_{j=2}^{k}\left(-\frac{iv}{\lambda}\right)^j \frac{\Omega(j-1)}{(j-2)!} + \frac{\theta v^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{30}$$

Отсюда согласно (27) и (28) следует

$$|\delta_2| \le \frac{1}{2k}(2u+v)\sum_{j=0}^{k-1} \frac{v^{j+1}}{j!}. \tag{31}$$

Учитывая неравенство $|2\cos\psi + \sin\psi| < 5/2$, из соотношений (17), (23), (24), (31) и (14) получаем оценку

$$|\delta(x)| \le |\delta_0| + |\delta_1| + |\delta_2| \le \frac{x^{2\alpha}}{k}\left[1 + \frac{5}{4}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{\alpha j}}{j!}(\sin \alpha\pi\rho)^{j+1}\right]. \tag{32}$$

Случай б). Теперь $u < 0$, $|u| < k$, $|u| \le v$, $0 < \lambda < 1$. Посредством (19), (20) и (14) так же, как и выше, находим

$$\sigma^{-k} \le e^{-u}, \qquad 0 > \Lambda(j) = \lambda^{-j}(\lambda^j - 1)/j \ge u\lambda^{-j}/k, \tag{33}$$

$$-\frac{x^{2\alpha}}{2k}e^{-2u} \le \delta_0 \le 0, \qquad 0 \le \delta_1 \le \frac{x^{2\alpha}}{2k}e^{-u}. \tag{34}$$

Ввиду (30), (27), (33) и (14) имеем

$$(\lambda/\sigma)^k |\delta_2| \le \frac{1}{2k}e^{-u}(2|u|+v)\sum_{j=0}^{k-1} \frac{v^{j+1}}{j!}. \tag{35}$$

Согласно (17), (34), (35) получаем

$$|\delta(x)| \le \frac{1}{k}x^{2\alpha}e^{-2u}\left[1 + \frac{5}{4}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{\alpha j}}{j!}\right]. \tag{36}$$

Параметр ρ, фиксирующий путь интегрирования в формуле (13), можно выбрать произвольно, соблюдая условие $1/2 \le \rho \le 1$. Полагаем $\rho = 3/4$. Если $0 < \alpha \le 2/3$, то в виду (14) $u > 0$ и справедливо (32). В силу (16) и (32)

$$|\Delta_k(t;\alpha)| \le \frac{1}{k}\psi\left(t/\sqrt{2}\right), \qquad \psi(z) := \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{z^{1+2\alpha}} + \frac{5}{4}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma[1+\alpha(j+2)]}{j!\,z^{1+\alpha(j+2)}}\right\}. \tag{37}$$

Последний ряд сходится при всех значениях $z>0$, его сумма $\psi(z)$ монотонно убывает по z. Поэтому на промежутке $[t_0,\infty)$, где $t_0>0$ сколь угодно мало, $|\Delta_k(t;\alpha)| \le \frac{1}{k}\psi\left(t_0/\sqrt{2}\right)$, что и доказывает (12).

Для значений $\alpha\in(2/3,1)$ при $\rho=3/4$ согласно (14) имеем $u<0$, $|u|\le v$. В правой части (16) отделяем слагаемое с промежутком интегрирования $[0, x_0]$, где точка $x_0=\eta k^{1/\alpha}$, $\eta := |\cos\alpha\pi\rho|^{-1/\alpha}$ соответствует равенству $|u|=k$. На промежутке $[0,x_0]$ справедливо (36), на интервале (x_0,∞) ввиду (15), (33) и (14)

$$|\delta(x)| \le \sigma^{-k}+e^{-u} \le 2e^{-u} \le 2\exp\left(x^{\alpha}/\sqrt{2}\right).$$

С учетом этих соотношений неравенство (16) принимает вид

$$|\Delta_k(t;\alpha)| \le \frac{1}{\pi k}\int_0^{x_0}\left[x^{2\alpha}+\frac{5}{4}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^{\alpha(j+2)}}{j!}\right]e^{(-xt+2x^{\alpha})/\sqrt{2}}\,dx +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{x_0}^{\infty}e^{(-xt+x^{\alpha})/\sqrt{2}}\,dx. \tag{38}$$

Экспоненциальные множители в подынтегральных выражениях представляем в форме $f_j(x)\exp(-x\tau)$, $j=1,2$, $\tau := (t-\varepsilon)/\sqrt{2}$. При любом $\varepsilon>0$ функции $f_1(x) := \exp\left[-(x\varepsilon-2x^{\alpha})/\sqrt{2}\right]$ и $f_2(x) := \exp\left[-(x\varepsilon-x^{\alpha})/\sqrt{2}\right]$ ограничены своими максимальными значениями $A_1=\exp\left[2^{1/(1-\alpha)}\kappa\right]$ и $A_2=e^{\kappa}$, где

$$\kappa := \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}.$$

Расширяя в (38) промежуток интегрирования и используя функцию $\psi(z)$ из (37), получаем

$$|\Delta_k(t;\alpha)| \le \frac{A_1}{k}\psi(\tau)+\frac{2A_2}{\pi\tau}\exp\left(-\eta\tau k^{1/\alpha}\right).$$

При $t\ge t_0>\varepsilon$ оба слагаемых справа равномерно ограничены по t и с ростом k убывают как величины $O(1/k)$, т. е. утверждение теоремы верно и при $2/3<$ $<\alpha<1$.

Покажем, что при $0<\alpha<1/2$ оценка (12) выполняется независимо от t. Полагая $\rho=1/2$, согласно (14) имеем $u>0$. В неравенстве (21) зафиксируем m так, чтобы $m>2+1/\alpha$ (предполагается, что $k\to\infty$, $m<k$). Тогда ввиду (14)

$$\int_0^{\infty}\frac{u^2}{2k}\left(1+\frac{u}{k}\right)^{-k}dx \le \frac{1}{2k}\left[\int_0^1 x^{2\alpha}dx+\int_1^{\infty}u^2\left(1+\frac{u}{m}\right)^{-m}dx\right] = O(1/k),$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{2\alpha}}{2k}e^{-x^{\alpha}/\sqrt{2}}dx = O(1/k), \qquad \int_0^{\infty}x^{\alpha j}e^{-u}dx = \frac{\Gamma(j+1/\alpha)}{\alpha\left[\cos(\alpha\pi/2)\right]^{j+1/\alpha}}.$$

Из этих соотношений вместе с (14), (16), (17), (22), (24) и (31) следуют неравенства

$$|\Delta_k(t;\alpha)| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[|\delta_0|+e^{-u}(|\delta_1|+|\delta_2|)\right]dx \le$$

$$\le O(1/k)+\frac{5}{4\alpha\pi k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j+2+1/\alpha)}{j!\left[\cos(\alpha\pi/2)\right]^{1+1/\alpha}}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\right)^{j+1}.$$

При $0<\alpha<1/2$ $\operatorname{tg}(\alpha\pi/2)<1$, что обеспечивает сходимость записанного выше ряда. Таким образом, независимо от t $\Delta_k(t;\alpha)=O(1/k)$. Теорема доказана.

3. Получим основные характеристики простого процесса восстановления [9] с независимыми случайными величинами θ_j, $j=1,2,\ldots$, имеющими одну и ту же плотность распределения $f(t)=\beta Э_{\alpha-1}(-\beta;t)$.

Пусть $F(t):=P\{\theta_j<t\}$ — функция распределения, $S_n:=\sum_{j=1}^{n}\theta_j$ — момент времени t, в который произошло n-е восстановление, N_t — наибольшее значение n, для которого $S_n\le t$, $H(t):=\mathbf{M}N_t$ — функция восстановления (среднее число восстановлений на промежутке $[0,t]$), $f_n(t)$ — плотность распределения величины S_n,

$$G(t,\zeta) := \sum_{j=0}^{\infty}\zeta^j P\{N_t=j\}$$

— производящая функция величины N_t. В терминах преобразования Лапласа, следуя методике [9], ввиду (4) получаем

$$\bar f(p)=\frac{\beta}{p^{\alpha}+\beta},\qquad \overline{F}(p)=\frac{\beta}{p\left(p^{\alpha}+\beta\right)},\qquad \bar f_n(p)=\left(\frac{\beta}{p^{\alpha}+\beta}\right)^n, \tag{39}$$

$$\overline{G}(p,\zeta)=\frac{1-\bar f(p)}{p\left[1-\zeta\bar f(p)\right]}=\frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}+\beta(1-\zeta)}. \tag{40}$$

Отсюда, разлагая по обратным степеням p и переходя к оригиналам, имеем

$$f_n(t)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{n+j-1}{j}\frac{\beta^{n+j}t^{\alpha(n+j)-1}}{\Gamma[\alpha(n+j)]},$$

$$P\{N_t=j\}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{j+r}{r}\frac{\beta^{j+r}}{\Gamma[\alpha(j+r)+1]}t^{\alpha(j+r)},\qquad j=0,1,2,\ldots.$$

По соотношениям (39), (40) стандартными приемами, основанными на разложениях вблизи точки ветвления $p=0$, для больших значений t находим

$$F(t)=\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{\beta^j\Gamma(1-\alpha j)}t^{-\alpha j}+O(t^{-\alpha(k+1)}),$$

$$f_n(t)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{n+j-1}{j}\frac{\beta^{-j}t^{-\alpha j-1}}{\Gamma(-\alpha j)}+O(t^{-\alpha(k+1)-1}),$$

$$P\{N_t=j\}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{j+r}{r}\frac{\beta^{-r-1}}{\Gamma[1-\alpha(r+1)]}t^{-\alpha(r+1)}+O(t^{-\alpha(k+2)}),$$

$$P\{N_t < q\} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{r+q}{r+1} \frac{\beta^{-r-1}}{\Gamma[1-\alpha(r+1)]} t^{-\alpha(r+1)} + O(t^{-\alpha(k+2)}).$$

Следовательно, при $t \to \infty$

$$F(t) \sim 1 - \frac{1}{\beta\pi} \sin \pi\alpha \Gamma(\alpha) t^{-\alpha}, \quad f_n(t) \sim \frac{n}{\beta\pi} \sin \pi\alpha \Gamma(1+\alpha) t^{-\alpha-1},$$

$$P\{N_t < q\} \sim \frac{q}{\beta\pi} \sin \pi\alpha \Gamma(\alpha) t^{-\alpha}.$$

Посредством первого из этих соответствий и формулы (6) находим асимптотики для функции надежности $\mathcal{F}(t) := P\{\theta > t\}$ и „опасности отказа" $\varphi(t) := f(t) / \mathcal{F}(t)$:

$$\mathcal{F}(t) = 1 - F(t) \sim \frac{1}{\beta\pi} \sin \pi\alpha \Gamma(\alpha) t^{-\alpha}, \quad \varphi(t) \sim \alpha / t, \quad t \to \infty.$$

Плотность восстановления $h(t) := dH(t)/dt$ удовлетворяет интегральному уравнению [9]

$$h(t) = f(t) + \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau. \tag{41}$$

При $f(t) = \beta Э_{\alpha-1}(-\beta; t)$ решение (41) имеет простой вид

$$h(t) = \beta t^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha). \tag{42}$$

В силу (42) функция восстановления $H(t) = \beta t^{\alpha} / \Gamma(1+\alpha)$.

1. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
3. *Синайский Е. С.* Об асимптотическом представлении оператора для описания поведения упруго-наследственных сред, воздействующего на степенную функцию // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 1. – С. 128–131.
4. *Яблонский А. И.* Математические модели в исследовании науки. – М.: Наука, 1986. – 351 с.
5. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983. – 304 с.
6. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
7. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т.1. – 364 с.
8. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
9. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. – М.: Сов. радио, 1967. – 300 с.

Получено 07.10.94