

ЕДИНСТВО ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФОРМАЛИЗМА

The relation of the physical theory to its mathematical formalism is shown.

Показано зв'язок фізичної теорії з її математичним формалізмом.

Математический символизм был введен в физическую науку Ньютоном, создавшим новую математику — дифференциальное и интегральное исчисления. Она понадобилась ему, чтобы сформулировать созданную им же первую физическую теорию — механику. Вместе с развитием механики происходило и развитие математики. Появилась теория дифференциальных уравнений, без которой не могли решаться проблемы классической механики. Однако в дальнейшем математика обогнала физику, получив от нее первоначальный импульс для своего развития. Математика все дальше отдалялась от физики, подчиняясь собственным законам развития. Она все больше становилась абстрактной наукой, занимающейся исследованием проблем, имеющих самостоятельный, чисто математический интерес. В результате математика стала царицей наук. И само ее название „матезис“, что означает „наука“, как бы подчеркивает тождественность науки и математики.

Здесь уместно вспомнить вдохновенные слова крупнейшего математика нашего столетия Германа Вейля: *„Подобно мифам, языку и музыке, математизация принадлежит к числу первичных видов человеческой деятельности, в которых бурлит глубочайшая человечность, живет стремление к созиданию форм духа и выражается мировая гармония“*.

Каждая физическая теория не отделима от математического формализма теории. Без него невозможна сама формулировка физической теории. Именно поэтому Бор говорил, что математика — это больше чем наука, это язык.

В этом можно убедиться на каждом этапе развития физической картины мира. Проследим связь между различными физическими теориями и их математическими аппаратами.

На базе классической механики была создана статистическая механика. Формулировка основ этой теории невозможна без теории вероятности, понятия которой широко используются в статистической механике. Кинетическое уравнение Больцмана, лежащее в основе кинетической теории газов, базируется на теории интегральных уравнений. В этих примерах речь идет об использовании уже существовавших математических теорий, но подчеркнем еще раз, что и статистическая механика, и кинетическая теория не отделимы от соответствующих им математических аппаратов.

Перейдем от классической механики Ньютона ко второй великой физической теории — классической электродинамике Максвелла. Она формулируется в виде дифференциальных уравнений в частных производных по координатам и времени. Но можно ли „оторвать“ физическую теорию электромагнетизма от ее математической формулировки в виде уравнений Максвелла. По этому поводу крупнейший физик XIX в. Генрих Герц, первым подтвердивший опытным путем уравнения электромагнетизма Максвелла, доказав существование радиоволн, говорил: *„Невозможно избавиться от ощущения, что эти математические формулы существуют независимо от нас и обладают собственным разумом, что они мудрее нас, мудрее даже тех, кто их открыл, и что мы извлекаем из них больше, чем первоначально было заложено“*.

После этих слов становятся понятными слова Больцмана об уравнениях Максвелла: *„Уж не Боги ли начертали эти знаки“*.

Сейчас курьезом представляется та дискуссия о природе электрического то-

ка, которая происходила в тридцатые годы в Ленинграде. На ней известные в то время люди пытались „оторвать” физику Фарадея от математики Максвелла и оперировали силовыми магнитными линиями как некоторой материальной субстанцией. В свое время существовала даже крылатая фраза: „Материя исчезла, а остались одни уравнения”. Сейчас мы вспоминаем обо всем этом как о бессмысленной нелепости.

После максвелловой электродинамики возникла специальная, а затем общая теория относительности Эйнштейна. Специальная теория относительности отвергла представления об абсолютном характере времени и пространства. Физика подошла здесь впервые к ревизии понятий геометрии и к вопросу о том, абсолютный ли смысл имеют теоремы евклидовой геометрии. В связи с этой проблемой Эйнштейн в своей работе „Геометрия и опыт” писал:

„Из всех наук математика пользуется особым уважением, потому что ее теоремы абсолютно верны и неоспоримы, тогда как законы других наук в известной степени спорны и всегда существует опасность их опровержения новыми открытиями. Однако исследователю, работающему в какой-либо другой области науки, не приходится завидовать математику, так как положения математики покоятся не на реальных объектах, а исключительно на объектах нашего воображения. В самом деле, нет ничего удивительного в том, что можно прийти к логически согласованным выводам, если сначала пришли к соглашению относительно основных положений (аксиом), а также относительно тех приемов, при помощи которых из этих основных положений выводятся другие теоремы. В то же время это глубокое уважение к математике имеет и другое основание, а именно: математика является тем, что дает точным наукам известную меру уверенности; без математики они ее не могли бы достичь.

В связи с этим возникает вопрос, который волновал исследователей всех времен. Почему возможно такое превосходное соответствие математики с реальными предметами, если сама она является произведением только человеческой мысли, не связанной ни с каким опытом? Может ли человеческий разум без всякого опыта путем только одного размышления понять свойства реальных вещей.

На мой взгляд, ответ на этот вопрос вкратце таков: если теоремы математики прилажаются к отражению реального мира, они не точны; они точны до тех пор, пока не ссылаются на действительность”.

Последняя фраза Эйнштейна нуждается в комментарии. Эйнштейн здесь фактически полемизирует с Пуанкаре. Последний считал геометрию Евклида простейшей и из-за ее простоты пришел к выводу об универсальности ее применения. Эйнштейн же, учитывая сокращения измерительных стержней при их движении, уже в специальной теории относительности пришел к выводу о необходимости различать абстрактную, или аксиоматическую, геометрию от геометрии практической, или физической. Удивительно то, что Эйнштейн понимал необходимость аксиоматизации геометрии и вообще математики.

После эйнштейновской теории относительности и нам становится теперь понятным огромное значение построения аксиоматики геометрии, проблемы, решенной крупнейшим математиком нашего времени Давидом Гильбертом. Мы не можем останавливаться здесь подробнее и на этой проблеме, и на трудностях, возникающих при аксиоматизации математики, нашедших свое выражение в известной теореме Геделя о том, что можно высказать такие утверждения (в рамках заданной аксиоматики), которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Великий математик Гильберт, говоривший, что „физика слишком сложна для физиков”, хотел даже аксиоматизировать и физику, но из этой затеи, естественно, ничего не вышло, поскольку физическая теория мира все время эволюционирует и не может существовать окончательной физической картины мира.

Но если вернуться к теории относительности, то она не может быть сформулирована без римановой геометрии, так что и здесь мы воочию убеждаемся в неотделимости теории относительности от римановой геометрии.

Связь физической теории с ее математическим формализмом достигает апогея в квантовой механике, в которой физические величины, т. е. наблюдаемые, неразрывно связываются с эрмитовскими операторами.

В. А. Фок для иллюстрации связи между квантовой теорией и ее математическим аппаратом составил целый словарь для перевода с математического языка на физический [1].

Математика	Физика
Линейный оператор L	Физическая величина λ
Собственные значения λ' (характеристические числа)	Наблюдаемые значения физической величины
Собственная (фундаментальная) функция ψ для собственного значения (характеристического числа) λ'	Состояние механической системы, в котором $\lambda = \lambda'$
Коммутативность операторов	Одновременная наблюдаемость физических величин
Квадрат модуля $ \psi ^2$	Плотность вероятности
Нормировка $\int \psi ^2 d\tau = 1$	Сумма вероятностей равна 1
Переход к собственным дифференциалам в сплошном спектре	Конечная вероятность неравенства $\lambda' < \lambda < \lambda' + \Delta\lambda$
Ортогональность $\int \varphi^* \psi d\tau = 0$	Состояния φ и ψ несовместимы
Замкнутость системы функций $\psi(x, \lambda')$	Значения λ' , λ'' и т. д. единственно возможны
Интеграл $\int \varphi^* L \varphi d\tau$	Математическое ожидание величины λ в состоянии φ
Квадрат модуля коэффициента разложения $\varphi(x)$ по $\psi(x, \lambda')$	Вероятность равенства $\lambda = \lambda'$ в состоянии φ

Синтез требований квантовой теории и теории относительности привел Дирака к построению релятивистской квантовой механики электронов. При этом в теорию пришлось ввести наряду с известными четырехмерными векторами и тензорами новые величины — спиноры и биспиноры, которые преобразуются при преобразованиях Лоренца иначе, чем тензорные величины.

Переходя к миру элементарных частиц, мы приходим к необходимости использования новой математической дисциплины — теории групп. Мы исходим из того, что частицы обладают некоторыми внутренними свойствами симметрии. Но наличие симметрий находит в математике свое отражение в новом математическом объекте — группе симметрии, а теория представлений групп симметрии может быть связана с классификацией частиц. Каждое представление соответствует отдельной частице и, таким образом, в физике возникает так называемый восьмеричный путь или $SU(3)$ симметрия.

После введения понятия цвета кварка и введения соответствующей трем цветам цветовой $SU(3)$ произошло расширение этой симметрии с глобального до локального уровня, при котором параметры глобальной $SU(3)$ симметрии

становятся функциями координат и времени. Так возникла динамическая цветовая группа симметрии с новыми физическими полями — полями глюонов, обмен которыми обеспечивает взаимодействие между кварками.

До сих пор мы говорили о тесной связи или единстве физической теории и соответствующего ей математического формализма. Но кроме этой связи нужно иметь в виду, что математический формализм обладает, если можно так выразиться, собственной жизнью и поэтому приводит к совершенно новым физическим предсказаниям, которые не содержались в исходных положениях физической теории. Иными словами, математический аппарат теории обладает предсказательной силой.

Проследим эту предсказательную силу на разных этапах развития физической картины мира.

Если начать с ньютоновской механики, то здесь мы должны напомнить о предсказанном небесной механикой существовании новой планеты Солнечной системы — Нептуна. Нужно упомянуть также предсказанный А. Н. Колмогоровым спектр турбулентных колебаний жидкости.

В классической электродинамике из уравнений Максвелла вытекала возможность существования электромагнитных волн, распространяющихся в вакууме с универсальной скоростью, не зависящей от длины волны.

Специальная теория относительности Эйнштейна предсказала изменение хода часов, изменение длин отрезков, существование частиц с нулевой массой и установила эквивалентность массы и энергии. Последнее предсказание позволило понять, что такое энергия связи ядра, и позволило определить ту энергию, которая выделяется при делении тяжелых ядер и при цепной ядерной реакции.

Общая теория относительности со своим математическим аппаратом привела к открытию красного смещения, открытию отклонения луча света вблизи Солнца и Звезд, к предсказанию гравитационных волн и реликтового излучения, т. е. фотонов, сохранившихся после Большого взрыва.

Квантовая механика предсказала туннельный эффект при прохождении частиц через потенциальный барьер. Это дало возможность Гамову объяснить α -распад ядер.

Релятивистская квантовая механика электрона, построенная Дираком, предсказала существование позитрона, т. е. антиэлектрона, а отсюда далее было предсказано существование других античастиц.

Наконец, в теории Дирака автоматически возникал спин электрона, который до этого вводился феноменологически.

Квантовая электродинамика, представляющая собой синтез электромагнитной теории Максвелла и теории Дирака, привела к предсказанию целого ряда замечательных явлений. Прежде всего отметим превращения фотонов в электронно-позитронные пары, аннигиляции электронно-позитронных пар в фотоны, рассеяния света светом и ряда других эффектов, показывающих, что вакуум полей обладает реальными физическими свойствами.

В теории сильного взаимодействия на основании SU(3) симметрии была математически получена формула, определяющая массы барионов и на основании этой формулы предсказано существование новой частицы Ω^- — гиперона.

Вера в закон сохранения энергии позволила Паули предсказать существование новой частицы — нейтрино, а развитая на основе этого предсказания теория Ферми β -распада ядер дала возможность объяснить непрерывный характер энергетического спектра электронов при β -распаде.

Единая теория электрослабого взаимодействия, развитая Вайнбергом, предсказала существование W^\pm - и Z-бозонов, переносящих слабое взаимодействие.

Как бы подытоживая все эти замечательные предсказания теоретической физики, Дирак говорил:

„Природе присуща та фундаментальная особенность, что самые основные

физические законы описываются математической теорией, аппарат которой обладает необыкновенной силой и красотой” [2].

Свою веру в огромную предсказательную силу математического формализма физической теории Дирак формулирует следующим образом [2]:

„Наши жалкие математические усилия позволяют пока понять во Вселенной лишь немного. Но развивая все более совершенные математические методы, мы можем надеяться на лучшее понимание Вселенной. Математические исследования дают надежду угадать, какими будет аппарат будущей теоретической физики.

Рано или поздно появится новый Гейзенберг, способный уловить существенные особенности новой информации и открыть метод ее использования, подобно тому, как ранее экспериментальные данные по спектрам были использованы Гейзенбергом для построения матричной механики”.

Наконец, роль математики в развитии физической теории анализирует известный физик-теоретик Ф. Дж. Дайсон:

„При всех отклонениях и поворотах в развитии физики неизменным остается один фактор — исключительная роль математического воображения. В каждом столетии отдавалось предпочтение какому-то своему направлению в науке и вырабатывался свой стиль в математике. Математика для физика это не только инструмент, с помощью которого он может количественно описать любое явление, но и главный источник представлений и принципов, на основе которых зарождаются новые теории.

Способность математики отображать поведение физической вселенной беспрестанно удивляла физиков всех времен. Великий астроном XVII в. Иоганн Кеплер, открывший законы движения планет, выразил свое изумление, прибегнув к богословским понятиям: „И вот сам Господь, который был слишком благ, чтобы оставаться праздным, затеял игру в символы, посылая знаки своего подобию в мир. Поэтому я и осмеливаюсь думать, что вся природа и благословенное небо записаны на языке искусства геометрии”.

В связи с этими рассуждениями естественно возникает вопрос, как вообще возникает физическая теория. Достаточно ли для этого одного математического формализма или достаточно самого по себе эксперимента для создания новой фундаментальной физической теории?

Ньютон давал на этот вопрос следующий ответ: „Гипотез не строю”, т. е. он считал, что все в его механической теории взято из элементарного опыта. Образно выражаясь, величайший физик и математик, говоря так, выступал в роли некоего библейского законодателя, которому Природа ниспослала свои законы и позволила запечатлеть их на скрижалях его „Начал”.

Легко, однако, видеть, что элементарного опыта самого по себе недостаточно для логического построения теории.

Действительно, разве можно говорить о логическом выводе закона гравитации Ньютона из законов Кеплера, если ошибка при этом достигала нескольких процентов.

Нельзя говорить также о логическом выводе уравнений Максвелла из опытов Фарадея, ибо в них не содержалась идея о токе смещения.

Широко распространено мнение, что опыт Майкельсона сыграл решающую роль в создании специальной теории относительности, однако в опубликованном письме Эйнштейна это категорически отрицается [3].

Все это свидетельствует о том, что правильной является не концепция Ньютона „гипотез не строю”, а концепция Эйнштейна, согласно которой „любая попытка чисто логического вывода основных понятий и принципов механики (то есть физической теории) из отдельных опытов обречена на неудачу” [4]. Иными словами, нет однозначного логического пути от фактов опыта к теоретическим системам физики.

И действительно, создание физической теории, т. е. построение физической

картины мира, связано не только с данными опыта, но еще с образованием ряда понятий и введением ряда абстракций.

Новые понятия и концепции необходимы нам потому, что мы хотим иметь не безжизненный набор никак не связанных между собой опытных данных, а живую физическую теорию, охватывающую основное и главное и позволяющую с помощью необходимых для этого понятий и концепций предсказывать новые явления и факты.

Схватывание главного и возможность отбрасывания несущественного и второстепенного означает, по сути, не что иное, как создание модели. Мы всегда хотим иметь простую модель сложной вещи. Но сложные вещи не допускают простых моделей. Например, Максвелл хотел создать механическую модель электромагнитного поля, используя для этого набор зубчатых колес и шестеренок, но такая модель оказалась слишком примитивной, поэтому и была отброшена.

Чтобы разъяснить волновой характер света, была придумана модель мирового эфира, т. е. некоторой пронизывающей все тела среды, механические колебания которой эквивалентны электромагнитным колебаниям, связанным со светом. Однако и эта механическая модель оказалась слишком примитивной и была отброшена. После этого для объяснения свойств электромагнитного поля остались только одни уравнения Максвелла — математическая модель электромагнитного поля. Мы намеренно употребляем здесь слово *модель* потому, что в действительности уравнения Максвелла не охватывают всех свойств электромагнитного поля, например, различных нелинейных эффектов (таких как рассеяние света светом), а также превращения электромагнитного поля в электроны и позитроны.

Е. Вингер писал: „*Окружающий нас физический мир допускает сложные математические модели, использующие абстрактные понятия и концепции для отображения его свойств. Такова природа вещей*” [5]. Простые механические модели электромагнитного поля, как и более сложные электромагнитные модели ядерной и субъядерной материи, оказываются слишком примитивными и не отображают адекватно основных свойств окружающего нас мира, поэтому они отбрасываются в мусорный ящик истории.

Усиление роли абстракций, необходимость введения новых понятий и концепций, столь характерные для современной физики, объясняют особое значение математики в физике, которая по своей сущности естественно приспособлена для этой цели, тем более что новые понятия, как правило, не допускают наглядной интерпретации. Мы не видим, например, в окружающем нас мире гильбертова пространства, без введения которого невозможна формулировка квантовой механики. В окружающем нас мире мы не видим также эрмитовых операторов, которые должны сопоставляться различным физическим величинам, но все эти понятия были хорошо известны в математике задолго до того, как введение их стало необходимостью для физики.

Так математический аппарат становится неотъемлемой частью физической теории, без которой невозможна сама формулировка физической теории.

Физическая теория становится неотделимой от своей математической формы, адекватной ее содержанию.

Модельность теории находится в тесной связи с ее феноменологичностью. Часто противопоставляют теории феноменологические теории микроскопическим. В действительности это различие между теориями условное, ибо любая микроскопическая теория никогда не может быть избавлена от феноменологических элементов. Например, классическая термодинамика считается стопроцентной феноменологической теорией. Это означает, что хотя она и устанавливает два фундаментальных закона Природы — первое и второе начала термодинамики, конкретного содержания в эти законы не вкладывается, ибо только статистическая механика позволяет определить энергию и энтропию системы как функции ее состояния.

Квантовая же механика считается стопроцентной микроскопической теорией, ибо она позволяет определить энергетические уровни отдельных атомов и молекул. Но ведь она только связывает их с универсальными константами — зарядом и массой электрона и с постоянной Планка, „смысла” же этих констант не раскрывает, и они вводятся в теорию чисто феноменологически. Но главное заключается в том, что об основе основ квантовой механики — статистической закономерности в поведении микрообъектов — мы говорим: такова природа вещей, т. е. фактически статистическую закономерность вводим феноменологически.

Все физические теории содержат элементы феноменологии, одни больше, другие меньше, и „примесь” феноменологии неизбежна, ибо это следствие модельности или, если угодно, плата за модельность.

Усиление роли абстракций в физической теории привело к разделению физики на две науки — физику экспериментальную, которая с помощью экспериментальных устройств исследует закономерности существующих в окружающем нас мире форм материи и создает новые формы материи, не существующие непосредственно в земных условиях, и физику теоретическую, которая математически отображает закономерности различных форм материи, т. е. создает математические модели различных форм движения материи и с помощью них предсказывает новые явления. Эти две науки оплодотворяют друг друга и не могут существовать одна без другой, образуя единое целое.

Усиление роли абстракций в современной физике и всевозрастающая математизация теоретической физики несомненно затрудняют освоение физики. Это приводит к тому, что часто ищут сокровенную физическую сущность и противопоставляют ее математической форме теории. Но такое противопоставление не имеет под собой почвы. Действительно, каков смысл утверждения, что определенная физическая теория объясняет определенный круг явлений. Смысл этого утверждения заключается в том, что все связи между рассматриваемыми явлениями могут быть отражены с помощью понятий и концепций данной теории и что для этого не требуется введения никаких добавочных понятий и концепций. Именно таков смысл слова „объясняет” в физике. „Объяснить” можно только в терминах данной теории.

В этой связи полезно напомнить ответ Ньютона на заданный ему вопрос о теории гравитации: „Ведь она ничего не объясняет”.

Ньютон ответил: „Она говорит, как движутся тела. Этого должно быть достаточно. Я сказал Вам, как они движутся, а не почему”.

Какими же средствами располагает человечество для создания новой физической теории, т. е. теории, объясняющей явления, относящиеся к ядерной и субъядерной материи?

Несомненно, для этого необходима новая информация о свойствах субъядерной материи, которая будет получена с помощью как старых, так и новых мощных ускорителей заряженных частиц.

Но теория — это отражение закономерностей Природы. Может ли в результате синтеза эксперимента и математики появиться окончательная физическая теория, после которой уже не будут нужны новые теории?

Эйнштейн давал на этот вопрос отрицательный ответ, считая, что „наши представления о физической реальности никогда не могут быть окончательными” и что „вера в существование внешнего мира независимо от воспринимающего субъекта есть основа всего естественного” [6].

1. Фок В. А. Начала квантовой механики. — М., 1976. — 92 с.
2. Дирак П. Эволюция физической картины мира // Над чем думают физики. — М., 1965. — Вып. 3.
3. Письмо Эйнштейна // Успехи физ. наук. — 1971. — 104, № 2. — С. 298.
4. Эйнштейн А. Физика и реальность. — М., 1965. — С. 76.
5. Вингер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Этюды о симметрии. — М.: Мир, 1971.
6. Эйнштейновский сборник. — М., 1966. — С. 7.

Получено 30.06.97