УДК 512.54

С. В. Попович (Киев. ун-т)
Я. П. Сысак (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

РАДИКАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ, ПОДГРУППЫ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ГРУПП КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ПОДАЛГЕБРАМИ

We obtain the characteristic for radical algebras subgroups of adjoint groups of which are subalgebras. In particular, we prove that the algebras of this sort are nilpotent with the nilpotency index at most three. We give the complete classification of those algebras under consideration which are generated by two elements.

Отримана характеризація радикальних алгебр, підгрупи приєднаних груп яких є підалгебрами. Доведено, зокрема, що такі алгебри нільпотентні з індексом нільпотентності, який не перевищує 3. Дана повна класифікація тих із них, що породжені двома елементами.

Ассоциативная алгебра R без единицы называется радикальной, если она совпадает со своим радикалом Джекобсона. Это, в частности, означает, что множество элементов алгебры R образует группу относительно операции $a \circ b = a + b + ab$ (a, b из R). Эта группа называется присоединенной группой алгебры R и обозначается через R^0. Очевидно, что каждая подалгебра в R является подгруппой в R^0. Простые примеры, приведенные в [1, с. 12–13], показывают, что обратное утверждение может выполняться только в некоторых исключительных случаях. Цель данной статьи — выделить эти случаи, т. е. описать те радикальные алгебры над некоторым полем F, для которых указанное утверждение имеет место. Легко видеть, что в этой ситуации поле F конечно и имеет простой порядок p, будем обозначать его далее через F_p. Более того, так как согласно [2] каждая радикальная алгебра с циклической присоединенной группой является либо алгеброй порядка p с нулевым умножением, либо степенной алгеброй $\langle a \mid a^3 = 0 \rangle$ над полем F_2, то рассматриваемые алгебры будут либо алгебрами над полем F_p с нечетным p, удовлетворяющими тождеству $x^2 = 0$, либо алгебрами над полем F_2, удовлетворяющими тождеству $x^3 = 0$. Наша первая теорема характеризует умножение в таких алгебрах. Как обычно, если n — целое положительное число, то R^n обозначает подалгебру в R, порожденную всевозможными произведениями n элементов из R. Очевидно, R^n — идеал в R.

Теорема 1. *Пусть R — радикальная алгебра над полем F_p. В алгебре R каждая подгруппа присоединенной группы R^0 является подалгеброй тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) $p > 2$, $R^3 = 0$ *и для любых двух элементов* a, b *из* R *справедливо* $ab = -ba$;

2) $p = 2$, $R^3 = 0$ *и для любых двух элементов* a, b *из* R *произведение* ab *является линейной комбинацией над* F_2 *элементов* a^2, b^2 *и* $(a+b)^2$.

Приведенная теорема будет доказана с помощью следующей теоремы, дающей полную классификацию тех из рассматриваемых алгебр над полем F_2, которые порождаются двумя элементами.

Теорема 2. *Пусть R — радикальная алгебра над F_2, порожденная двумя элементами, и $R^2 \neq 0$. В алгебре R каждая подгруппа присоединенной группы R^0 является подалгеброй тогда и только тогда, когда с точностью до изоморфизма R — одна из 14 алгебр, содержащихся в следующем списке алгебр над*

F_2, заданных своими порождающими элементами и определяющими соотношениями:

1. *Алгебра с циклической присоединенной группой порядка* 4:

$$A_1 = \langle a \mid a^3 = 0 \rangle.$$

2. *Алгебры с присоединенной группой типа* (4, 2):

$$A_2 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = ab = ba = 0 \rangle,$$

$$A_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 0,\ ab = ba = a^2 \rangle.$$

3. *Алгебры с присоединенной группой типа* (4, 4):

$$A_4 = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = ab = ba = 0 \rangle,$$

$$A_5 = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = a^2 b = 0,\ ab = ba = a^2 + b^2 \rangle.$$

4. *Алгебра с присоединенной группой диэдра порядка* 8:

$$A_6 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = ab = 0,\ ba = a^2 \rangle.$$

5. *Алгебра с присоединенной группой кватернионов:*

$$A_7 = \langle a, b \mid a^3 = ba = 0,\ ab = a^2 = b^2 \rangle.$$

6. *Алгебры с присоединенной группой* $\langle u, v \mid u^4 = v^4 = 1,\ [u, v] = u^2 \rangle$:

$$A_8 = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = ab = 0,\ ba = b^2 \rangle,$$

$$A_9 = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = 0,\ ab = a^2,\ ba = a^2 + b^2 \rangle.$$

7. *Алгебры с присоединенной группой* $\langle u, v, w \mid u^4 = v^4 = w^2 = [u, w] = [v, w] = 1,\ [u, v] = w \rangle$:

$$A_{10} = \langle a, b \mid a^3 = a^2 b = b^2 = ba = 0 \rangle,$$

$$A_{11} = \langle a, b \mid a^3 = ba^2 = b^2 = ab = 0 \rangle,$$

$$A_{12} = \langle a, b \mid a^3 = ba^2 = b^2 = 0,\ ab = a^2 \rangle.$$

8. *Алгебры с присоединенной группой* $\langle u, v, w \mid u^4 = v^4 = w^2 = [u, w] = [v, w] = 1,\ [u, v] = w \rangle$:

$$A_{13} = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = ba^2 = b^2 a = ab = 0 \rangle,$$

$$A_{14} = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = ba^2 = b^2 a = ab^2 = 0,\ ab = a^2 + b^2 \rangle.$$

В приведенных ниже леммах классифицированы $\mathfrak{P}$-алгебры с двумя образующими, что составляет содержание теоремы 2.

Обозначения $A_1 - A_{14}$ закрепляются за соответствующими алгебрами до конца работы. Остальные обозначения и определения, используемые в работе, в основном общеприняты и большей частью вводятся по мере необходимости. Заметим, что хотя алгебры и группы, задаваемые порождающими элементами и определяющими соотношениями, записываются одинаково, из контекста всегда будет ясно, о чем идет речь. Напомним, что алгебра R нильпотентна, если $R^n = 0$ для некоторого $n > 1$, и называется нуль-алгеброй, если $R^2 = 0$. Нильпотентные алгебры над полем F_2, не являющиеся нуль-алгебрами, у которых подгруппы их присоединенных групп являются подалгебрами, мы будем называть коротко $\mathfrak{P}$-алгебрами. Очевидно, что подалгебры и фактор-алгебры $\mathfrak{P}$-алгебр являются либо $\mathfrak{P}$-алгебрами, либо нуль-алгебрами. Кроме того, как уже отмечалось выше, в каждой $\mathfrak{P}$-алгебре выполняется тождество $x^3 = 0$.

Эти факты используются далее постоянно и без соответствующих оговорок.

1. Доказательство теоремы 2.

Лемма 1. *Пусть R — коммутативная $\mathfrak{P}$-алгебра с двумя образующими. Тогда R изоморфна одной из алгебр $A_1 - A_5$. В частности, $R^3 = 0$ и для любых двух элементов a, b из R произведение ab совпадает с одним из элементов $0, a^2, b^2$ или $a^2 + b^2$.*

Доказательство. Так как каждая абелева группа, порожденная двумя элементами, метациклическая, то лемма есть простое следствие классификации нильпотентных алгебр с метациклической присоединенной группой, приведенной в [3].

Лемма 2. *Пусть R — некоммутативная $\mathfrak{P}$-алгебра, порождаемая двумя элементами a и b. Если $R^3 = 0$, то одно из произведений ab или ba совпадает с одним из элементов $0, a^2, b^2$ или $a^2 + b^2$. Более того, в этом случае алгебра R изоморфна одной из алгебр $A_6 - A_{14}$.*

Доказательство. Положим $c = ab + ba$. Тогда $cR = Rc = 0$ и потому подалгебра $\langle c \rangle$, порожденная элементом c, имеет порядок 2 и является идеалом в R. Фактор-алгебра $R/\langle c \rangle$ коммутативна и является либо нуль-алгеброй, либо $\mathfrak{P}$-алгеброй. Поэтому если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — образы элементов a и b в этой фактор-алгебре, то согласно лемме 1 произведение $\overline{a}\,\overline{b}$ содержится в подалгебре $\langle \overline{a}^2 \rangle + \langle \overline{b}^2 \rangle$. Следовательно, произведение ab лежит в подалгебре $\langle a^2 \rangle + \langle b^2 \rangle + \langle c \rangle$, и так как $\langle c \rangle = \{0, ab + ba\}$, то мы получаем первое утверждение леммы. Далее, если присоединенная группа R^0 алгебры R метациклическая, то в силу [3] алгебра R изоморфна одной из алгебр $A_6 - A_9$.

Пусть R^0 — неметациклическая группа. Ясно, что $\langle c \rangle$ — коммутант группы R^0 и согласно лемме 1 фактор-группа $R^0/\langle c \rangle$ является группой типа (4, 2) или (4, 4). Поэтому с точностью до перестановки элементов a и b группа R^0 есть полупрямое произведение $R^0 = \langle a \rangle \ltimes (\langle b \rangle \times \langle c \rangle)$ циклической подгруппы $\langle a \rangle$ порядка 4 с нормальной абелевой подгруппой $\langle b \rangle \times \langle c \rangle$ типа (2, 2) или (4, 2). Непосредственно проверяется, что в первом случае алгебра R изоморфна одной из алгебр $A_{10} - A_{12}$, а во втором — одной из алгебр A_{13} или A_{14}. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть R — алгебра над F_2, в которой выполняется тождество $x^3 = 0$. Тогда для любых элементов a, b и c из R справедливы соотношения:*

$$abc = cba, \quad \text{если} \quad ac = ca; \tag{1}$$

$$ba^2b = a^2b^2 + b^2a^2; \tag{2}$$

$$a^2b^2 = (ba)^2. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 + ba^2 + b^2a + aba + bab. \tag{4}$$

Если $ac = ca$, то $(a+c)^2 = a^2 + c^2$. Поэтому

$$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + (b+c)^3 + abc + cba.$$

Принимая во внимание тождество $x^3 = 0$, отсюда получаем $abc + cba = 0$; таким образом, имеет место (1). Далее, заменяя в (4) элемент a на a^2 и учитывая это же тождество, имеем

$$0 = (a^2+b)^3 = a^2b^2+b^2a^2+ba^2b,$$

т. е. выполняется (2). Наконец, из равенства

$$0 = (a+b)^3a = aba^2+ab^2a+a^2ba+b^2a^2+(ba)^2$$

и соотношения (1) выводим

$$ab^2a+b^2a^2+(ba)^2 = 0,$$

откуда с учетом соотношения (2) получаем (3). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть R — $\mathfrak{P}$-алгебра, порожденная двумя элементами. Тогда* $R^4=0$.

Доказательство. Пусть a и b — порождающие элементы алгебры R. Чтобы доказать равенство $R^4=0$, достаточно показать, что любое слово длины 4 от букв a и b равно 0 в R. Так как в R выполняется тождество $x^3=0$, то $a^3=b^3=0$ и согласно лемме 3 в R выполняются соотношения (1)–(3). В частности, имеем $aba^2=a^2ba$ и $bab^2=b^2ab$. Поэтому с точностью до перестановки букв a и b слова длины 4 в R исчерпываются следующими: a^2b^2, a^2ba, ab^2a и $(ab)^2$. Убедимся, что каждый из этих элементов вместе с его двойником, получаемым перестановкой букв a и b, равен 0. В силу соотношений (2) и (3) для этого достаточно лишь убедиться, что $a^2b^2=b^2a^2=a^2ba= =b^2ab=0$. Доказательство последнего утверждения разобьем на ряд шагов.

(i) Одно из произведений a^2b^2 или b^2a^2 равно 0.

Действительно, если S — подалгебра в R, порожденная элементами a^2 и b^2, то в силу (1) $a^2b^2a^2=a^3b^2a=0$ и, аналогично, $b^2a^2b^2=0$, что влечет $S^3=0$. Поэтому в силу леммы 2 одно из произведений a^2b^2 или b^2a^2 совпадает с одним из элементов 0, a^4, b^4 или a^4+b^4 и потому равно 0.

(ii) $a^2ba=b^2ab=0$.

Пусть S — подалгебра в R, порожденная элементами a и aba. Так как $a(aba)=a^2ba=aba^2=(aba)a$, то подалгебра S коммутативна. Поэтому согласно лемме 1 произведение a^2ba совпадает с одним из элементов 0, a^2, $(aba)^2$ или $a^2+(aba)^2$. Однако в силу (2) имеем $(aba)^2 = a(ba^2b)a = =a(a^2b^2+b^2a^2)a=a^3b^2a+ab^2a^3=0$. Далее, если $a^2ba=a^2$, то $a^2=0$. Поэтому $a^2ba=0$. Меняя местами a и b, получаем также $b^2ab=0$.

(iii) $a^2b^2=b^2a^2=0$.

В силу соотношений (1) и (ii) подалгебра, порожденная элементами $a+b$ и $aba+bab$, коммутативна. Действительно, так как $aba^2=a^2ba=0$ и $bab^2= =b^2ab=0$, то

$$(a+b)(aba+bab) = a^2ba+(ab)^2+(ba)^2+b^2ab =$$

$$= (ab)^2+(ba)^2 = (aba+bab)(a+b).$$

Поэтому по лемме 1 произведение $(a+b)(aba+bab)=(ab)^2+(ba)^2$ совпадает с одним из элементов 0, $(a+b)^2$, $(aba+bab)^2$ или $(a+b)^2+(aba+ +bab)^2$. Теперь в силу (ii) и выполнимости тождества $x^3=0$ имеем

$$(aba+bab)^2 = ab(a^2ba)+(ab)^3+(ba)^3+ba(b^2ab) = 0.$$

Далее, учитывая соотношение (3), получаем $(ab)^2+(ba)^2=a^2b^2+b^2a^2$. Поэтому элемент $a^2b^2+b^2a^2$ совпадает либо с 0, либо с $(a+b)^2$. В первом случае из утверждения (i) выводим $a^2b^2 = b^2a^2 = 0$. Если же $a^2b^2 + b^2a^2 = (a + b)^2$, то $a(a+b)^2 = 0 = (a+b)^2b$ и потому во втором случае имеем $aba = bab$. С учетом (3) отсюда снова получаем $b^2a^2 = (ab)^2 = bab^2 = 0$ и $a^2b^2 = (ba)^2 = aba^2 = 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть R — $\mathfrak{P}$-алгебра, порожденная элементами a и b, и пусть $b^2 = 0$. Тогда $R^3 = 0$.*

Доказательство. Во первых, в силу (4) и выполнимости в R тождества $x^3 = 0$ имеем $0 = (a+b)^3 = a^2b + aba + ba^2 + bab$. Далее, если S — подалгебра в R, порожденная элементами a^2 и b, то в силу леммы 4 $S^3 = 0$ и потому согласно лемме 2 одно из произведений a^2b или ba^2 равно 0. Эти же рассуждения, примененные к подалгебре, порожденной элементами b и $ab + ba$, дают равенство $bab = 0$. Поэтому либо $a^2b = 0$ и $aba + ba^2 = 0$, либо $ba^2 = 0$ и $aba + a^2b = 0$. Пусть, например, имеет место первый случай. Тогда $a(ba) = (ba)a$ и потому подалгебра, порожденная элементами a и ba, коммутативна. Следовательно, согласно лемме 1 произведение ba^2 совпадает с одним из элементов 0, a^2, $(ba)^2$ или $a^2 + (ba)^2$. Но в силу леммы 4 $R^4 = 0$ и потому $(ba)^2 = 0$. Кроме того, из равенства $ba^2 = a^2$ следует $a^2 = 0$. Поэтому возможно лишь $ba^2 = 0$ и, таким образом, имеем $a^2b = aba = ba^2 = bab = 0$, что влечет $R^3 = 0$. Во втором случае $(ab)a = a(ab)$ и рассуждения аналогичны. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть R — $\mathfrak{P}$-алгебра с двумя образующими. Тогда $R^3 = 0$.*

Доказательство. Пусть, напротив, $R^3 \neq 0$. Тогда в силу леммы 1 алгебра R некоммутативна и, следовательно, согласно [1, лемма 2.3.1] размерность фактор-алгебры R/R^2 равна 2. Рассмотрим далее фактор-алгебру $\overline{R} = R/R^3$. Ясно, что прообразы в R элементов, порождающих $\overline{R}$, порождают алгебру R. Поэтому согласно леммам 1 и 2 порождающие элементы a и b алгебры R можно выбрать так, чтобы в фактор-алгебре $\overline{R} = \langle \overline{a}, \overline{b} \rangle$ для их образов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ выполнялись соотношения одной из алгебр $A_2 - A_{14}$. Учитывая, что согласно лемме 4 $R^4 = 0$ и в R выполняется тождество $x^3 = 0$, имеем также $a^3 = b^3 = aR^3 = bR^3 = R^3a = R^3b = 0$.

Предположим сперва, что фактор-алгебра $\overline{R}$ коммутативна и, следовательно, изоморфна одной из алгебр $A_2 - A_5$. Если $\overline{R}$ изоморфна A_2 или A_4 и, значит, $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{a} = 0$, то ab и ba лежат в R^3. Если же $\overline{R}$ изоморфна A_3, т. е. $\overline{b}^2 = 0$ и $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{a} = \overline{a}^2$, то элементы $b^2, ab + a^2$ и $ba + a^2$ содержатся в R^3. В каждом из случаев имеем $a^2b = ab^2 = b^2a = ba^2 = aba = bab = 0$, что влечет $R^3 = 0$. Противоречие. Таким образом, единственно возможен случай, когда фактор-алгебра $\overline{R}$ изоморфна алгебре A_5. Тогда $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{a} = \overline{a}^2 + \overline{b}^2$ и, следовательно, элементы $ab + ba$, $ab + a^2 + b^2$ и $ba + a^2 + b^2$ лежат в R^3. Поэтому $aba = b^2a = ba^2 = bab = a^2b = ab^2$. Далее, если S — подалгебра в R, порожденная элементами a^2 и b, то в силу леммы 4 $S^3 = 0$ и потому по лемме 2 произведение $a^2b = ba^2$ содержится в подалгебре $\langle b^2 \rangle$. Как легко видеть, отсюда вытекает, что одно из произведений a^2b или ab^2 равно 0 и, таким образом, $R^3 = 0$. Снова противоречие.

Предположим теперь, что фактор-алгебра $\overline{R}$ некоммутативна. Если $\overline{R}$ изоморфна одной из алгебр $A_6 - A_{11}$ или A_{13}, то, как и выше, легко проверяется, что в этом случае $R^3 = 0$, и мы приходим к противоречию. Пусть алгебра $\overline{R}$ изоморфна алгебре A_{12} и, в частности, в $\overline{R}$ выполняются соотношения $\overline{b}^2 = 0$ и $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{a}^2$. Тогда в алгебре R имеют место включения $b^2 \in R^3$ и $ab + a^2 \in R^3$, из которых вытекают равенства $ab^2 = b^2a = aba = a^2b = 0$ и $bab = ba^2$. Поэтому подалгебра $\langle b^2 \rangle$ — идеал в R и $ba^2 \neq 0$, поскольку иначе $R^3 = 0$. Так как фактор-алгебра $R/\langle b^2 \rangle$ порождается образами в ней элементов a и b, то согласно лемме 5 $(R/\langle b^2 \rangle)^3 = 0$, откуда $R^3 = \langle b^2 \rangle$. Таким образом, либо $ab = a^2$, $ba^2 = b^2$, либо $ab = a^2 + b^2$, $ba^2 = b^2$. Положим $u = a^2 + b$, $v = a^2 + ba$ и рассмотрим подалгебру $S = \langle u, v \rangle$. Из леммы 4 следует, что $S^3 = 0$ и потому согласно лемме 2 одно из произведений uv или vu есть линейная комбинация элементов u^2 и v^2. Однако $u^2 = b^2 + ba^2 + a^2b = 0$ и, очевидно, $v^2 = 0$. С другой стороны, легко проверяется, что $uv = vu = b^2 \neq 0$. Противоречие. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда фактор-алгебра $\overline{R}$ изоморфна алгебре A_{14} и, значит, в ней выполняется соотношение $\overline{b}\,\overline{a} = \overline{a}^2 + \overline{b}^2$. Ясно, что тогда в R имеет место включение $ba + a^2 + b^2 \in R^3$, следствием которого являются равенства

$$aba + ab^2 = bab + a^2b = ba^2 + b^2a = 0. \tag{5}$$

Если S — подалгебра в R, порожденная элементами a и ab, то $S^3 = 0$ и потому в силу леммы 2 одно из произведений aba или a^2b содержится в подалгебре $\langle a^2 \rangle$. Предположим, что $aba \notin \langle a^2 \rangle$. Тогда включение $a^2b \in \langle a^2 \rangle$ влечет равенство $a^2b = 0$. Если в качестве S взять подалгебру, порожденную элементами a и b^2, то по той же причине одно из произведений ab^2 или b^2a лежит в $\langle a^2 \rangle$. Так как в силу (5) $ab^2 = aba \notin \langle a^2 \rangle$, то $ba^2 = b^2a \in \langle a^2 \rangle$ и потому $ba^2 = 0$. Следовательно, $\langle a^2 \rangle$ — идеал в R и согласно лемме 5 имеем $(R/\langle a^2 \rangle)^3 = 0$, откуда $R^3 = \langle a^2 \rangle$, что противоречит изоморфизму $\overline{R}$ с A_{14}. Таким образом, $aba \in \langle a^2 \rangle$.

Если $aba = a^2$ и, значит, $a^2 \in R^3$, то $\langle a^2 \rangle$ — идеал в R, и мы возвращаемся к ситуации, рассмотренной выше. Поэтому $aba = 0$, откуда в силу (5) $ab^2 = 0$. Пусть S — подалгебра в R, порожденная элементами a и $ab + ba$. Тогда $S^3 = 0$ и согласно лемме 2 одно из произведений $a(ab + ba) = a^2b$ или $(ab + ba)a = ba^2$ лежит в подалгебре $\langle a^2 \rangle$. Предположим, что $a^2b \in \langle a^2 \rangle$. Тогда $a^2b = 0$, что в силу (5) дает $bab = 0$. Следовательно, если $c = a + b$, то $ac^2 = c^2a = bc^2 = c^2b = 0$ и потому $\langle c^2 \rangle$ — идеал в R. Как уже было показано ранее, это влечет равенство $R^3 = \langle c^2 \rangle$, из которого следует, что в фактор-алгебре $\overline{R}$ выполняется соотношение $(\overline{a} + \overline{b})^2 = 0$, противоречащее изоморфизму $\overline{R}$ с алгеброй A_{14}. Таким образом, $ba^2 \in \langle a^2 \rangle$. Но тогда $ba^2 = 0$, откуда в силу (5) $b^2a = 0$. Вспоминая, что $ab^2 = 0$, заключаем, что $\langle b^2 \rangle$ — идеал в R, и мы снова находимся в ситуации, когда $R^3 = \langle b^2 \rangle$ и потому фактор-алгебра $\overline{R}$ не может быть изоморфна алгебре A_{14}. Заключительное противоречие. Лемма доказана. Ясно, что теорема 2 получается как результат объединения лемм 1, 2 и 6.

2. Доказательство теоремы 1. *Необходимость.* Пусть R — радикальная алгебра над F_p, у которой каждая подгруппа присоединенной группы R^0 является подалгеброй.

Если $p > 2$, то, как отмечалось во введении, в R выполняется тождество $x^2 = 0$ и потому для любых элементов a, b из R имеем $0 = (a+b)^2 = ab + ba$, т. е. $ab = -ba$. Отсюда, если $c \in R$, то $abc = -c(ab) = acb = -abc$ и, следовательно, $abc = 0$. Поэтому $R^3 = 0$ и, таким образом, выполняется утверждение 1) теоремы.

Пусть $p = 2$ и a, b — произвольные элементы из R. Если S — подалгебра в R, порожденная элементами a и b, то согласно лемме 6 $S^3 = 0$ и, в частности, $a^2 b = ba^2 = 0$. Далее, в силу теоремы 2 подалгебра S изоморфна одной из алгебр $A_1 - A_{14}$, и согласно лемме 2 одно из произведений ab или ba есть линейная комбинация над F_2 элементов a^2 и b^2. Так как $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba$, то произведение ab есть линейная комбинация элементов a^2, b^2 и $(a+b)^2$, следовательно, для любого элемента c из R имеем $abc = 0$. Поэтому $R^3 = 0$ и, таким образом, выполняется утверждение 2 теоремы.

Достаточность. Пусть R — радикальная алгебра над полем F_p, для которой выполняется одно из утверждений 1 или 2 теоремы. Чтобы доказать, что каждая подгруппа присоединенной группы R^0 является подалгеброй в R, достаточно показать, что для любых двух элементов a, b из R их сумма $a + b$ лежит в подгруппе из R^0, порожденной элементами a и b. Для этого обозначим n-ю присоединенную степень элемента a, т. е. присоединенное произведение $a \circ \ldots \circ a$, в котором элемент a встречается n раз, через $a^{(n)}$. Если выполняется утверждение 1 и, значит, $p > 2$, то положим $c = a^{(p-1)} \circ b^{(p-1)} \circ a \circ b$ и $n = (p-1)/2$. Легко проверяется, что тогда $a + b = c^{(n)} \circ a \circ b$. Предположим теперь, что имеет место утверждение 2. Тогда одно из произведений ab или ba есть линейная комбинация над F_2 элементов a^2 и b^2. Пусть, например, это будет ab. Очевидно, что $ab = 0$ влечет $a + b = a \circ b$, и непосредственно проверяется, что если $ab = a^2$, то $a + b = a^{(3)} \circ b$, если $ab = b^2$, то $a + b = a \circ b^{(3)}$ и, наконец, если $ab = a^2 + b^2$, то $a + b = a^{(3)} \circ b^{(3)}$. Теорема доказана.

1. *Kruse R. L., Price D. T.* Nilpotent rings. – N. Y.: Gordon and Breach, 1969. – 128 p.
2. *Eldridge K. E., Fischer I.* Artinian rings with a cyclic quasi-regular group // Duke Math. J. – 1969. – **36**. – P. 43–47.
3. *Горлов В. О.* Конечные нильпотентные алгебры с метациклической квазирегулярной группой // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1426–1431.

Получено 29.05.96