УДК 517.91

А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)
В. Е. Слюсарчук (Укр. гос. акад. водн. хоз-ва, Ривнэ)
В. В. Слюсарчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ В ОКРЕСТНОСТИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

We investigate the behavior of discrete dynamical system in a neighborhood of quasiperiodic trajectory for the case of infinite-dimensional Banach space. We find the conditions under which, in a neighborhood of this sort, a system can be reduced to a system with quasiperiodic coefficients.

Досліджується поведінка дискретної динамічної системи в околі квазіперіодичної траєкторії у випадку нескінченновимірного банахового простору. Знайдено умови зведення системи в такому околі до системи з квазіперіодичними коефіцієнтами.

Данная статья распространяет некоторые результаты работы [1] на случай произвольного банахова пространства. В основу методов исследования положены методы дифференциальной топологии и функционального анализа.

Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) = X(x(n)), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $X\colon E \to E$ — C^r-отображение [2 – 4] (E — произвольное бесконечномерное банахово пространство).

Пусть это уравнение имеет инвариантное многообразие M класса C^r ($r \geq 2$), заданное с помощью уравнения

$$x = f(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

где $\mathcal{T}_m$ — m-мерный тор и $f\colon \mathcal{T}_m \to E$ — C^r-отображение (тогда $X(x) \in M$ для всех $x \in M$), и заполненное квазипериодическими траекториями

$$x(n, f(\varphi)) = f(n\omega + \varphi), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m \tag{2}$$

(здесь $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$— частотный базис квазипериодической вектор-функции $f(t\omega)$).

Исследуем поведение траекторий динамической системы (1) в достаточно малой окрестности многообразия M.

1. Построение отображения, расщепляющего систему (1) в окрестности многообразия M. Пусть df_φ — производная гладкого отображения $f\colon \mathcal{T}_m \to E$ в точке φ, а $T(\mathcal{T}_m)_\varphi$ и $TM_{f(\varphi)}$ — касательные пространства к многообразиям $\mathcal{T}_m$ и M соответственно в точках φ и $f(\varphi)$ [2, 4]. Тогда $df_\varphi\colon T(\mathcal{T}_m)_\varphi \to TM_{f(\varphi)}$ — линейное отображение. Ввиду того, что $\mathcal{T}_m$ — m-мерный тор, пространство $T(\mathcal{T}_m)_{f(\varphi)}$ также будет m-мерным для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Потребуем, чтобы для размерности $\dim TM_{f(\varphi)}$ пространства $TM_{f(\varphi)}$ выполнялось аналогичное свойство

$$\dim TM_{f(\varphi)} = m, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{3}$$

В силу конечномерности пространства $TM_{f(\varphi)}$ бесконечномерное банахово пространство E можно представить в виде прямой суммы подпространства $TM_{f(\varphi)}$ и некоторого подпространства E_φ [5]:

$$E = TM_{f(\varphi)} \dotplus E_\varphi.$$

Обозначим через $P(\varphi)$ проектор на E_φ параллельно $TM_{f(\varphi)}$ [6]. Тогда $I - P(\varphi)$ — проектор на $TM_{f(\varphi)}$ параллельно E_φ (I — единичный оператор, действующий в E).

Поскольку отображение f является C^r-отображением, то производная df является C^{r-1}-отображением. Аналогично проекторы $P(\varphi)$ и $I - P(\varphi)$ с учетом (3) также являются C^{r-1}-отображениями.

Определим C^{r-1}-отображение F, которое каждой паре (φ, h) элементов $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и $h \in E_\varphi$ ставит в соответствие вектор $x \in E$:

$$x = f(\varphi) + P(\varphi)h. \tag{4}$$

Это отображение имеет обратное отображение. Точный смысл этого предложения раскрывается следующим утверждением.

Лемма 1. *Пусть* $V_\delta(\mathcal{T}_m) = \{(\varphi, h)\colon \varphi \in \mathcal{T}_m,\ h \in E_\varphi,\ \|h\| < \delta\}$ *и* $U_\delta(M) = \{x \in E\colon \inf_{y \in M}\|x - y\| < \delta\}$. *Тогда найдется такое число* $\varepsilon > 0$, *что* $FV_\varepsilon(\mathcal{T}_m) \supset U_\mu(M)$ *для некоторого числа* $\mu > 0$ *и отображение* $F\colon V_\varepsilon(\mathcal{T}_m) \to FV_\varepsilon(\mathcal{T}_m)$ *является* C^{r-1}-*диффеоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку $r \geq 2$ и F — C^{r-1}-отображение (так как f и P_2 — соответственно C^r- и C^{r-1}-отображения), то можно найти производную $dF_{(\varphi,0)}\colon T(\mathcal{T}_m)_\varphi \times E_\varphi \to E$ отображения F в точке $(\varphi, 0)$ для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Эта производная принимает вид

$$dF_{(\varphi,0)}(\psi, h) = (df_\varphi)\psi + P(\varphi)h,$$

где $\psi \in T(\mathcal{T}_m)_\varphi$ и $h \in E_\varphi$. Из определения $P(\varphi)$ следует, что образ оператора

$$dF_{(\varphi,0)}\colon T(\mathcal{T}_m)_\varphi \times E_\varphi \to E$$

совпадает с банаховым пространством E, а ядро $\ker dF_{(\varphi,0)}$ этого же оператора состоит только из нулевого элемента (из равенства $(df_\varphi)\psi + P(\varphi)h = 0$ вытекает, что $(df_\varphi)\psi \in TM_{f(\varphi)}$ и $P(\varphi)h \in E_\varphi$; поэтому $(df_\varphi)\psi = 0$, $P(\varphi)h = 0$ и, следовательно, $\psi = 0$ и $h = 0$ на основании (3) и того, что $P(\varphi)$ — единичный оператор на E_φ). Тогда на основании теоремы Банаха об обратном операторе [7] оператор $dF_{(\varphi,0)}$ имеет непрерывный обратный

$$(dF_{(\varphi,0)})^{-1}\colon E \to T(\mathcal{T}_m)_\varphi \times E_\varphi.$$

На основании теоремы о неявной функции [8, 9] найдется окрестность $U_\gamma(f(\varphi)) = \{y \in E\colon \|y - f(\varphi)\| < \gamma\}$ точки $f(\varphi)$ многообразия M, что уравнение (4) относительно (φ, h) будет иметь единственное решение (φ, h) для каждого $x \in U_\gamma(f(\varphi))$, а соответствующее отображение

$$F\colon \{(\varphi, h)\colon \varphi \in \mathcal{T}_m,\ h \in E_\varphi,\ x = f(\varphi) + P(\varphi)h,\ x \in U_\gamma(f(\varphi))\} \to U_\gamma(f(\varphi))$$

будет C^{r-1}-диффеоморфизмом.

Из компактности тора $\mathcal{T}_m$ и непрерывности производной $dF_{(\varphi,0)}$ на $\mathcal{T}_m$ на основании классической теоремы Вейерштрасса [9] следует, что

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \left\|(dF_{(\varphi,0)})^{-1}\right\| < \infty.$$

Поэтому приведенные выше рассуждения справедливы для каждой точки $\varphi \in$

$\in \mathcal{T}_m$ с сохранением числа γ. Это позволяет распространить локальные свойства отображения F о C^{r-1}-диффеоморфизме на все точки многообразия M (см., например, [2]).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *В достаточно малой окрестности многообразия M динамическая система* (1) *относительно новых переменных* $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times E_\varphi$ *принимает вид*

$$(\varphi(n+1), h(n+1)) = F^{-1}XF(\varphi(n), h(n)), \tag{5}$$

где $(\varphi(n), h(n)) \in \mathcal{T}_m \times E_{\varphi(n)}$ *и* $(\varphi(n+1), h(n+1)) \in \mathcal{T}_m \times E_{\varphi(n+1)}$.

Доказательство. Согласно лемме 1 и инвариантности многообразия M относительно C^r-отображения $X: E \to E$ найдутся такие окрестности U и V многообразия M, что отображение $F^{-1}: U \to V$ является C^{r-1}-диффеоморфизмом и $XU \subset V$. Поэтому, если $x(n) \in U$, то $x(n+1) = X(x(n)) \in V$. Тогда

$$F^{-1}x(n+1) = F^{-1}XFF^{-1}x(n). \tag{6}$$

На основании леммы 1 найдутся элементы $(\varphi(n), h(n)) \in \mathcal{T}_m \times E_{\varphi(n)}$ и $(\varphi(n+1), h(n+1)) \in \mathcal{T}_m \times E_{\varphi(n+1)}$ такие, что

$$F^{-1}x(n) = (\varphi(n), h(n)),$$
$$F^{-1}x(n+1) = (\varphi(n+1), h(n+1)).$$

Отсюда и из (6) вытекает соотношение (5).

Лемма 2 доказана.

2. Представление отображения $F^{-1}XF$ в окрестности многообразия $\mathcal{T}_m \times \{0\}$. На основании леммы 1 и инвариантности многообразия M относительно отображения X отображение $F^{-1}XF$ определено в достаточно малой окрестности многообразия $\mathcal{T}_m \times \{0\} \subset \mathcal{T}_m \times E$. Образ элемента $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times E_\varphi$, если $\|h\| < \varepsilon$ и ε — достаточно малое число, при отображении $F^{-1}XF$ есть элемент $(\varphi_1(\varphi, h), h_1(\varphi, h))$ множества $\mathcal{T}_m \times E_{\varphi_1(\varphi, h)}$. Итак, $(\varphi_1(\varphi, h), h_1(\varphi, h)) = F^{-1}XF(\varphi, h)$. Поскольку отображение $F^{-1}XF$ является C^{r-1}-отображением, то отображения φ_1 и h_1 также будут C^{r-1}-отображениями.

Представим $\varphi_1(\varphi, h)$ и $h_1(\varphi, h)$ через F, X, φ и h.

Введем в рассмотрение отображения $Q: \mathcal{T}_m \times E \to \mathcal{T}_m$ и $R: \mathcal{T}_m \times E \to E$ равенствами

$$Q(\varphi, h) = \varphi,$$
$$R(\varphi, h) = h, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \quad h \in E.$$

Тогда

$$Q(\varphi_1(\varphi, h), h_1(\varphi, h)) = \varphi_1(\varphi, h),$$
$$R(\varphi_1(\varphi, h), h_1(\varphi, h)) = h_1(\varphi, h)$$

для всех $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times E_\varphi$. Следовательно,

$$\varphi_1(\varphi, h) = QF^{-1}XF(\varphi, h), \tag{7}$$

$$h_1(\varphi, h) = RF^{-1}XF(\varphi, h). \tag{8}$$

На основании формулы Тейлора [8, с. 93] можно записать, что

$$\varphi_1(\varphi, h) = \varphi_1(\varphi, 0) + (d_h\varphi_1)_{(\varphi, 0)}h + o(h),$$

$$h_1(\varphi, h) = h_1(\varphi, 0) + (d_h h_1)_{(\varphi, 0)}h + o(h)$$

при $h \to 0$. Учитывая (1), (2) и (4), получаем, что

$$F(\varphi, 0) = f(\varphi), \tag{9}$$

$$X(f(\varphi)) = f(\varphi + \omega) \tag{10}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Поэтому

$$F^{-1}f(\varphi + \omega) = (\varphi + \omega, 0) \tag{11}$$

и на основании соотношений (7) и (8)

$$\varphi_1(\varphi, 0) = \varphi + \omega,$$

$$h_1(\varphi, 0) = 0$$

для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Таким образом,

$$\varphi_1(\varphi, h) = \varphi + \omega + (d_h\varphi_1)_{(\varphi, 0)}h + o(h), \tag{12}$$

$$h_1(\varphi, h) = (d_h h_1)_{(\varphi, 0)}h + o(h) \tag{13}$$

при $h \to 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Определим производные $(d_h\varphi_1)_{(\varphi, 0)}$, $(d_h h_1)_{(\varphi, 0)}$.

Использовав цепное правило [4, 8] для нахождения производной и соотношения (9) – (11), (4), получим

$$(d_h\varphi_1)_{(\varphi, 0)} = (d_h QF^{-1}XF)_{(\varphi, 0)} =$$

$$= (dQ)_{F^{-1}XF(\varphi, 0)}(dF^{-1})_{XF(\varphi, 0)}(dX)_{F(\varphi, 0)}(d_h F)_{(\varphi, 0)} =$$

$$= (dQ)_{(\varphi + \omega, 0)}(dF^{-1})_{f(\varphi + \omega)}(dX)_{f(\varphi)}P(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Аналогично

$$(d_h h_1)_{(\varphi, 0)} = (dR)_{(\varphi + \omega, 0)}(dF^{-1})_{f(\varphi + \omega)}(dX)_{f(\varphi)}P(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Заметим, что

$$(dQ)_{(\varphi + \omega, 0)}(dF^{-1})_{f(\varphi + \omega)} = (df)^{-1}_{\varphi + \omega}(I - P(\varphi + \omega)), \tag{14}$$

$$(dR)_{(\varphi + \omega, 0)}(dF^{-1})_{f(\varphi + \omega)} = P(\varphi + \omega). \tag{15}$$

Действительно, поскольку

$$F(\varphi + \omega, h) = f(\varphi + \omega) + P(\varphi + \omega)h$$

для всех $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times E_{\varphi+\omega}$, то

$$(dF)_{(\varphi + \omega, 0)}(\psi, h) = (df)_{\varphi + \omega}\psi + P(\varphi + \omega)h$$

для всех $(\psi, h) \in T(\mathcal{T}_m)_{\varphi+\omega} \times E_{\varphi+\omega}$. Поэтому

$$(dF^{-1})_{f(\varphi + \omega)}x = ((df)^{-1}_{\varphi + \omega}((I - P(\varphi + \omega)))x, P(\varphi + \omega)x) \tag{16}$$

для всех $x \in E$ (отображение $(df)^{-1}_{\varphi + \omega}$ действует из касательного пространства $TM_{f(\varphi + \omega)}$ в касательное пространство $T(\mathcal{T}_m)_{\varphi+\omega}$). Учитывая, что если A — тождественное отображение многообразия N, то $(dA)_x$ — тождественное отображение касательного пространства TN_x (см. [4, с. 188]), приходим к выводу, что

$$(dQ)_{(\varphi+\omega,0)}(\psi,h) = \psi,$$
$$(dR)_{(\varphi+\omega,0)}(\psi,h) = h$$

для всех $(\psi, h)\in T(\mathcal{T}_m)_{\varphi+\omega}\times E_{\varphi+\omega}$. Поэтому на основании соотношения (16) справедливы соотношения (14) и (15).

Итак, учитывая соотношения (12), (13) и следующие за ними соотношения, убеждаемся в том, что имеет место такое утверждение о представлении отображения $F^{-1}XF$.

Теорема 1. *Найдется такое число* $\varepsilon > 0$, *что для всех* $(\varphi, h)\in \mathcal{T}_m\times E_\varphi$, *для которых* $\|h\|<\varepsilon$,

$$F^{-1}XF(\varphi,h) = \big(\varphi+\omega+(df)^{-1}_{\varphi+\omega}(I-P(\varphi+\omega))(dX)_{f(\varphi)}P(\varphi)h+\alpha(\varphi,h),$$
$$P(\varphi+\omega)(dX)_{f(\varphi)}P(\varphi)h+\beta(\varphi,h)\big),$$

где $\alpha(\varphi,h)$ *и* $\beta(\varphi,h)$ — C^{r-1}-*отображения, удовлетворяющие соотношению*

$$\sup_{(\varphi,h)\in\mathcal{T}_m\times E_\varphi,\|h\|<\varepsilon}(\|\alpha(\varphi,h)\|+\|\beta(\varphi,h)\|) = o(\varepsilon) \tag{17}$$

при $\varepsilon\to 0$.

***Замечание* 1.** Соотношение (17) вытекает из соотношений (12), (13), компактности множества $\mathcal{T}_m$ и непрерывности C^{r-1}-отображений

$$\alpha(\varphi,h) = \varphi_1(\varphi,h)-\varphi-\omega-(d_h\varphi_1)_{(\varphi,0)}h,$$
$$\beta(\varphi,h) = h_1(\varphi,h)-(d_hh_1)_{(\varphi,0)}h$$

в некоторой окрестности множества $\mathcal{T}_m\times\{0\}$.

Отображение $F^{-1}XF$ можно также представить по-другому.

Теорема 2. *Найдется такое число* $\varepsilon>0$, *что на множестве* $G_\varepsilon=\{(\varphi, h)\in\mathcal{T}_m\times E_\varphi:\|h\|<\varepsilon\}$ *отображение* $F^{-1}XF$ *представляется в виде*

$$F^{-1}XF(\varphi,h) = (\varphi+\omega+A(\varphi,h)h, B(\varphi,h)h),$$

где $A(\varphi,h)$ *и* $B(\varphi,h)$ — *линейные ограниченные (при фиксированных* $(\varphi, h)\in G_\varepsilon$*) отображения, действующие из* E_φ *соответственно в* $\mathbb{R}^m$ *и* E *и являющиеся* C^{r-1}-*отображениями.*

Доказательство. Поскольку для достаточно малого ε отображение $F^{-1}XF$ определено на G_ε,

$$F^{-1}XF(\varphi,h) = (\varphi_1(\varphi,h),h_1(\varphi,h)),$$
$$\varphi_1(\varphi,h) = QF^{-1}XF(\varphi,h),$$
$$h_1(\varphi,h) = RF^{-1}XF(\varphi,h),$$
$$\varphi_1(\varphi,h) = \varphi+\omega+(\varphi_1(\varphi,h)-\varphi_1(\varphi,0)),$$
$$h_1(\varphi,h) = h_1(\varphi,h)-h_1(\varphi,0)$$

(см. доказательство теоремы 1) и

$$\varphi_1(\varphi, h) - \varphi_1(\varphi, 0) = \left(\int_0^1 (d_h\varphi_1)_{(\varphi,\, th)}\, dt \right) h,$$

$$h_1(\varphi, h) - h_1(\varphi, 0) = \left(\int_0^1 (d_h h_1)_{(\varphi,\, th)}\, dt \right) h,$$

то фигурирующие в теореме отображения $A(\varphi, h)$ и $B(\varphi, h)$ определяются равенствами

$$A(\varphi, h) = \int_0^1 (d_h\varphi_1)_{(\varphi,\, th)}\, dt, \tag{18}$$

$$B(\varphi, h) = \int_0^1 (d_h h_1)_{(\varphi,\, th)}\, dt. \tag{19}$$

Линейность и ограниченность этих отображений при фиксированных $(\varphi, h) \in G_\varepsilon$ вытекают из равенств (18), (19) и принадлежности отображений φ_1 и h_1 классу C^{r-1}. Эти отображения являются C^{r-1}-отображениями, поскольку аналогичные свойства имеют отображения

$$(d_h\varphi_1)_{(\varphi,\, th)} = (d_h\, QF^{-1}XF)_{(\varphi,\, th)} =$$
$$= (dQ)_{F^{-1}XF(\varphi,\, th)}(dF^{-1})_{XF(\varphi,\, th)}(dX)_{F(\varphi,\, th)}(dF)_{(\varphi,\, th)} =$$
$$= (dQ)_{F^{-1}X(f(\varphi)+P(\varphi)th)}(dF^{-1})_{X(f(\varphi)+P(\varphi)th)}(dX)_{f(\varphi)+P(\varphi)th}P(\varphi),$$
$$(d_h h_1)_{(\varphi,\, th)} = (d_h\, RF^{-1}XF)_{(\varphi,\, th)} =$$
$$= (dR)_{F^{-1}X(f(\varphi)+P(\varphi)th)}(dF^{-1})_{X(f(\varphi)+P(\varphi)th)}(dX)_{f(\varphi)+P(\varphi)th}P(\varphi)$$

для всех $t \in [0, 1]$.

Теорема 2 доказана.

3. Основные теоремы о расщеплении системы (1) в окрестности многообразия M. Из леммы 2 и теоремы 1 вытекает, что имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *В достаточно малой окрестности многообразия M система* (1) *относительно переменных $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times E_\varphi$ представляется в виде*

$$\begin{cases} \varphi(n+1) = \varphi(n) + \omega + \Phi(\varphi(n))h(n) + \Phi_1(\varphi(n), h(n)), \\ h(n+1) = H(\varphi(n))h(n) + H_1(\varphi(n), h(n)), \qquad n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{20}$$

где $\Phi(\varphi)\colon E_\varphi \to T(\mathcal{T}_m)_{\varphi+\omega}$, $H(\varphi)\colon E_\varphi \to E_{\varphi+\omega}$ $(\varphi \in \mathcal{T}_m)$ — линейные отображения, определенные равенствами

$$\Phi(\varphi) = (df)^{-1}_{\varphi+\omega}(I - P(\varphi+\omega))(dX)_{f(\varphi)}P(\varphi),$$
$$H(\varphi) = P(\varphi+\omega)(dX)_{f(\varphi)}P(\varphi),$$

$\Phi_1(\varphi, h)$ и $H_1(\varphi, h)$ — в общем случае нелинейные отображения, удовлетворяющие соотношению

$$\sup_{(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times E_\varphi,\, \|h\| < \varepsilon} (\|\Phi_1(\varphi, h)\| + \|H_1(\varphi, h)\|) = o(\varepsilon) \tag{21}$$

при $\varepsilon \to 0$, и отображения Φ, Φ_1, H, H_1 являются C^{r-1}-отображениями.

Аналогичное утверждение вытекает из леммы 2 и теоремы 2.

Теорема 4. *В достаточно малой окрестности многообразия M система* (1) *относительно переменных $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times E_\varphi$ представляется в виде*

$$\begin{cases} \varphi(n+1) = \varphi(n) + \omega + A(\varphi(n), h(n))h(n), \\ h(n+1) = B(\varphi(n), h(n))h(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{22}$$

где $A(\varphi, h)$ и $B(\varphi, h)$ — линейные ограниченные отображения (при фиксированных $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $h \in E_\varphi$ и достаточно малом h по норме), действующие из E_φ соответственно в $\mathbb{R}^m$ и E и являющиеся C^{r-1}-отображениями.

***Замечание* 2.** Очевидно, что

$$A(\varphi, h)h = \Phi(\varphi)h + \Phi_1(\varphi, h),$$
$$B(\varphi, h)h = H(\varphi)h + H_1(\varphi, h)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и $h \in \{x \in E_\varphi : \|x\| < \varepsilon\}$ (ε — достаточно малое число).

4. Одно вспомогательное операторное уравнение. Исследуем одно уравнение, которое позволит упростить уравнения (20) и (22).

Рассмотрим уравнение

$$Y(\varphi, h) = A(\varphi, h) + Y(\varphi + \omega + A(\varphi, h)h, B(\varphi, h)h)B(\varphi, h), \tag{23}$$

где $A(\varphi, h)$ и $B(\varphi, h)$ — линейные при фиксированных $(\varphi, h) \in \{(\psi, \delta) \in \mathcal{T}_m \times E_\varphi : \|\delta\| < \varepsilon\}$ (ε — достаточно малое число) C^{r-1}-отображения, действующие из E_φ соответственно в $\mathbb{R}^m$ и E и рассмотренные в теоремах 2 и 4, а $Y(\varphi, h)$ — искомое решение уравнения, также представляющее собой для каждых фиксированных $(\varphi, h) \in G_\varepsilon$ линейное отображение, действующее из E_φ в $\mathbb{R}^m$.

Лемма 3. *Если*

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \left\| P(\varphi + \omega)(dX)_{f(\varphi)} P(\varphi) \right\| < 1, \tag{24}$$

то найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что уравнение (23) *имеет единственное, определенное на G_{ε_0} решение $V(\varphi, h)$ класса C^0, которое для каждых фиксированных $(\varphi, h) \in G_{\varepsilon_0}$ является линейным отображением, действующим из E_φ в $\mathbb{R}^m$. Это решение представляется в виде*

$$V(\varphi, h) = A(\varphi_0, h_0) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A(\varphi_n, h_n) B(\varphi_{n-1}, h_{n-1}) B(\varphi_{n-2}, h_{n-2}) \ldots B(\varphi_1, h_1) B(\varphi_0, h_0), \tag{25}$$

где

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \omega + A(\varphi_{n-1}, h_{n-1})h_{n-1}, \tag{26}$$
$$h_n = B(\varphi_{n-1}, h_{n-1})h_{n-1}, \quad n \geq 1, \tag{27}$$

и

$$\varphi_0 = \varphi, \quad h_0 = h.$$

При достаточно малых ε и $\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \sum_{k=0}^{r-1} \left\| (d^k B)_{(\varphi, 0)} \right\|$ решение $V(\varphi, h)$ является C^{r-1}-отображением.

Доказательство. Поскольку на основании теоремы 3 и доказательства теоремы 2

$$B(\varphi, h) = B(\varphi, 0) + \int_0^1 \left[(d_h h_1)_{(\varphi, th)} - (d_h h_1)_{(\varphi, 0)} \right] dt,$$

где

$$B(\varphi, 0) = P(\varphi + \omega)(dX)_{f(\varphi)} P(\varphi),$$

производная $(d_h h_1)_{(\varphi, h)}$ равномерно непрерывна на множестве $\mathcal{T}_m \times \{0\}$ в силу компактности множества $\mathcal{T}_m$ и, следовательно,

$$\lim_{h \to 0} \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \left\| \int_0^1 \left[(d_h h_1)_{(\varphi, th)} - (d_h h_1)_{(\varphi, 0)} \right] dt \right\| = 0,$$

то согласно (24) найдется число $\varepsilon_0 > 0$, что оператор-функции $A(\varphi, h)$ и $B(\varphi, h)$ будут непрерывными на замыкании $\overline{G_{\varepsilon_0}}$ множества G_{ε_0} и

$$q = \sup_{(\varphi, h) \in \overline{G_{\varepsilon_0}}} \| B(\varphi, h) \| < 1. \tag{28}$$

Отсюда и соотношения (27) получаем, что $\| h_n \| \leq q^n \| h \|$ для всех $n \geq 1$, если $\| h \| \leq \varepsilon_0$. Поэтому в силу (26) и (27) $(\varphi_n, h_n) \in \overline{G_{\varepsilon_0}}$ для всех $n \geq 1$, если $(\varphi, h) \in \overline{G_{\varepsilon_0}}$. Тогда на основании (28) операторный ряд, с помощью которого определяется оператор-функция (25), мажорируется числовым рядом

$$M + Mq + Mq^2 + \ldots + Mq^n + \ldots,$$

где

$$M = \sup_{(\varphi, h) \in \overline{G_{\varepsilon_0}}} \| A(\varphi, h) \| < \infty. \tag{29}$$

Конечность величины $\sup_{(\varphi, h) \in \overline{G_{\varepsilon_0}}} \| A(\varphi, h) \|$ вытекает из того, что

$$A(\varphi, h) = A(\varphi, 0) + \int_0^1 \left[(d_h \varphi_1)_{(\varphi, th)} - (d_h \varphi_1)_{(\varphi, 0)} \right] dt,$$

где

$$A(\varphi, 0) = (d f)^{-1}_{\varphi + \omega} (I - P(\varphi + \omega))(dX)_{f(\varphi)} P(\varphi)$$

(см. теорему 3 и доказательство теоремы 2), что в силу непрерывной зависимости оператор-функции $A(\varphi, 0)$ на компактном множестве $\mathcal{T}_m$ выполняется соотношение $\sup_{\varphi \in \mathfrak{T}_m} \| A(\varphi, 0) \| < \infty$ и что

$$\lim_{h \to 0} \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \left\| \int_0^1 \left[(d_h \varphi_1)_{(\varphi, th)} - (d_h \varphi_1)_{(\varphi, 0)} \right] dt \right\| = 0$$

на основании равномерной непрерывности на компактном множестве $\mathcal{T}_m \times \{0\}$ производной $(d_h \varphi_1)_{(\varphi, h)}$.

Следовательно, сумма операторного ряда (см. (25)), который определяет отображение $V(\varphi, h)$, является непрерывной на G_{ε_0}. Простой подстановкой этого отображения в уравнение (23) (с учетом (26) и (27)) убеждаемся в том, что это отображение — решение исследуемого уравнения.

Заметим, что на основании (28) существование решений уравнения (23) может быть установлено с помощью принципа сжатых отображений [7, 8]. Поэтому представленное в виде (25) решение уравнения (23) единственное.

Теперь рассмотрим задачу о принадлежности решения $V(\varphi, h)$ классу C^{r-1}.

Поскольку изложение решения этой задачи занимает много места, то ограничимся рассмотрением идейной стороны ее решения.

Рассмотрим банахово пространство $\mathcal{L}$ $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых на G_{ε_0} (ε_0 — достаточно малое положительное число) функций $Z(\varphi, h)$ со значениями в пространстве $L(E_\varphi, \mathbb{R}^m)$ линейных непрерывных операторов, действующих из E_φ в $\mathbb{R}^m$, с нормой

$$\|z\|_{\mathcal{L}} = \sup_{(\varphi, h)\in G_{\varepsilon_0}} \left(\|Z(\varphi, h)\|_{L_1} + \left\|(dZ)_{(\varphi, h)}\right\|_{L_2} + \ldots + \left\|(d^{r-1}Z)_{(\varphi, h)}\right\|_{L_r}\right),$$

где

$$L_1 = L(E_\varphi, \mathbb{R}^m), \quad L_2 = L(E_\varphi, L_1), \ldots, \; L_r = L(E_\varphi, L_{r-1}).$$

Далее рассмотрим линейный непрерывный оператор $\mathcal{D}\colon \mathcal{L}\to\mathcal{L}$, определенный равенством

$$(\mathcal{D}Z)(\varphi, h) = A(\varphi, h) + Z(\varphi_1(\varphi, h), h_1(\varphi, h))B(\varphi, h),$$

где

$$\varphi_1(\varphi, h) = \varphi + \omega + A(\varphi, h)h \quad \text{и} \quad h_1(\varphi, h) = B(\varphi, h)h.$$

Учитывая соотношения

$$(d^k\mathcal{D}Z)_{(\varphi, h)} = (d^kA)_{(\varphi, h)} + \sum_{l=0}^{k} C_k^l\left(d^lZ(\varphi_1, h_1)\right)_{(\varphi, h)}(d^{k-1-l}B)_{(\varphi, h)}$$

($Z\in\mathcal{L}$, $k=\overline{1, r-1}$), вытекающие из правил дифференцирования операторных функций и формулы Лейбница, и ограниченность величин

$$\alpha_l = \sup_{(\varphi, h)\in G_{\varepsilon_0}} \left(\left\|(d^lA)_{(\varphi, h)}\right\| + \left\|(d^lB)_{(\varphi, h)}\right\| + \left\|(d^l\varphi_1)_{(\varphi, h)}\right\| + \left\|(d^lh_1)_{(\varphi, h)}\right\|\right),$$

$$l=\overline{1, r-1},$$

в чем можно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям, проведенным в начале доказательства леммы, приходим к выводу, что

$$\|\mathcal{D}Z_1 - \mathcal{D}Z_2\|_{\mathcal{L}} \le q\|Z_1 - Z_2\|_{\mathcal{L}} \tag{30}$$

для всех $Z_i\in\mathcal{L}$ ($i=\overline{1, 2}$), где коэффициент q представляется в виде

$$q = Q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}) \sup_{\varphi\in\mathcal{T}_m} \sum_{k=1}^{r-1}\left\|(d^kB)_{(\varphi, 0)}\right\| \tag{31}$$

(здесь $Q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1})$ — некоторая непрерывная неотрицательная на $\mathbb{R}^{r-1}$ функция).

Из (30) и (31) вытекает, что отображение $\mathcal{D}\colon \mathcal{L}\to\mathcal{L}$ является отображением сжатия, если величина

$$\beta = \sup_{\varphi\in\mathcal{T}_m} \sum_{k=1}^{r-1}\left\|(d^kB)_{(\varphi, 0)}\right\|$$

достаточно мала. При выполнении этого условия отображение $\mathcal{D}$ имеет единственную неподвижную точку $V(\varphi, h)\in\mathcal{L}$, которая, очевидно, — решение уравнения (23).

Обоснование леммы 3 завершено.

5. C^{r-1}-отображение S, упрощающее систему (22) в окрестности многообразия $\mathcal{T}_m \times \{0\}$. Введем в рассмотрение отображение S, которое каждую точку $(\varphi, h) \in (\mathcal{T}_m \times E_\varphi) \cap G_{\varepsilon_0}$ при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ переводит в некоторую точку $(\psi, \delta) \in (\mathcal{T}_m \times E_\psi) \cap G_{\varepsilon_1}$, где ε_1 — некоторое положительное число, зависящее от ε_0. Это отображение определим с помощью равенств

$$\begin{cases} \psi = \varphi + V(\varphi, h)h, \\ \delta = P(\varphi + V(\varphi, h)h)h, \end{cases} \tag{32}$$

где $V(\varphi, h)$ — отображение из леммы 3, а $P(\psi)$ — проектор, рассмотренный в п. 1.

Лемма 4. *При достаточно малых $\varepsilon_0 > 0$ и $\sup_{\varphi \in \mathfrak{T}_m} \sum_{k=0}^{r-1} \|(d^k B)_{(\varphi, 0)}\|$ отображение $S\colon G_{\varepsilon_0} \to S\, G_{\varepsilon_0}$ является C^{r-1}-диффеоморфизмом. При этом обратное отображение S^{-1} представляется в виде*

$$\begin{cases} \varphi = \psi + U_1(\psi, \delta)\delta, \\ h = \delta + U_2(\psi, \delta)\delta, \end{cases} \tag{33}$$

где $U_1(\psi, \delta)$ и $U_2(\psi, \delta)$ — линейные непрерывные при фиксированных $(\psi, \delta) \in \in G_{\varepsilon_0}$ отображения, действующие из E_φ соответственно в $\mathbb{R}^m$ и E, являющиеся C^{r-1}-отображениями.

Доказательство. Заметим, что отображение $S\colon G_{\varepsilon_0} \to S\, G_{\varepsilon_0}$ при достаточно малом ε_0 является C^{r-1}-отображением в силу леммы 3 и того, что проектор $P(\varphi + V(\varphi, h)h)$, как композиция двух C^{r-1}-отображений, также является C^{r-1}-отображением. Покажем, что отображение S имеет непрерывное обратное отображение.

Для этого сначала представим второе из равенств системы (32) в виде

$$\delta = h + W(\varphi, h)h, \tag{34}$$

где

$$W(\varphi, h) = P(\varphi + V(\varphi, h)h) - P(\varphi). \tag{35}$$

Линейное отображение $W(\varphi, h)$ $((\varphi, h) \in G_{\varepsilon_0})$ является C^{r-1}-отображением.

На основании (25), (28) и (29) можно считать, что

$$\sup_{(\varphi, h) \in G_{\varepsilon_0}} \|V(\varphi, h)\| < \infty. \tag{36}$$

Тогда согласно компактности множества $\mathcal{T}_m$, непрерывности $P(\varphi)$ на $\mathcal{T}_m$ и соотношению (35)

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|P(\varphi)\| < \infty \tag{37}$$

и

$$\sup_{(\varphi, h) \in G_{\varepsilon_0}} \|W(\varphi, h)\| = o(\varepsilon_0) \text{ при } \varepsilon_0 \to 0. \tag{38}$$

Применим оператор $P(\varphi)$ к обеим частям равенства (34). Учитывая, что $h \in E_\varphi$, получаем

$$P(\varphi)\delta = (P(\varphi) + P(\varphi)W(\varphi, h))h. \tag{39}$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать в силу (37) и (38), что число ε_0 выбрано настолько малым, что

$$\sup_{(\varphi, h) \in G_{\varepsilon_0}} \| P(\varphi) W(\varphi, h) \| < 1. \tag{40}$$

Последнее соотношение гарантирует для линейного непрерывного оператора $(P(\varphi) + P(\varphi)W(\varphi, h)) : E_\varphi \to E_\varphi$ (оператор $P(\varphi)$ играет роль единичного оператора в пространстве E_φ) при всех фиксированных $(\varphi, h) \in G_{\varepsilon_0}$ существование непрерывного обратного $(P(\varphi) + P(\varphi)W(\varphi, h))^{-1}$ (см., например, [10, с. 212]). Поэтому на основании (39)

$$h = (P(\varphi) + P(\varphi)W(\varphi, h))^{-1} P(\varphi)\delta. \tag{41}$$

Заметим, что отображение $(P(\varphi) + P(\varphi)W(\varphi, h))^{-1} P(\varphi)$ является C^{r-1}-отображением, причем согласно (40)

$$\sup_{(\varphi, h) \in G_{\varepsilon_0}} \left\| (P(\varphi) + P(\varphi)W(\varphi, h))^{-1} P(\varphi) \right\| < \infty. \tag{42}$$

Учитывая (34) и (41), представляем систему соотношений (32) в виде

$$\begin{cases} \psi = \varphi + V_1(\varphi, h)\delta, \\ \delta = h + W_1(\varphi, h)\delta, \end{cases} \tag{43}$$

где линейные при фиксированных $(\varphi, h) \in G_{\varepsilon_0}$ отображения

$$V_1(\varphi, h) = V(\varphi, h)(P(\varphi) + P(\varphi)W(\varphi, h))^{-1} P(\varphi),$$
$$W_1(\varphi, h) = W(\varphi, h)(P(\varphi) + P(\varphi)W(\varphi, h))^{-1} P(\varphi)$$

являются C^{r-1}-отображениями. Для этих отображений

$$\sup_{(\varphi, h) \in G_{\varepsilon_0}} (\| V_1(\varphi, h) \| + \| W_1(\varphi, h) \|) < \infty \tag{44}$$

в силу (36), (37) и (42).

После проведенной подготовительной работы покажем, что отображение S имеет непрерывное обратное отображение. Найдем производную $(dS)_{(\varphi, 0)}$. Из (32) и (34) следует, что

$$(dS)_{(\varphi, 0)}(\eta, \xi) = (\eta + V(\varphi, 0)\xi, \xi)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и $(\eta, \xi) \in (T\mathcal{T}_m)_\varphi \times E_\varphi$. Отсюда следует, что производная $(dS)_{(\varphi, 0)}$ имеет непрерывное обратное отображение $(dS)^{-1}_{(\varphi, 0)}$ и

$$(dS)^{-1}_{(\varphi, 0)}(\eta, \xi) = (\eta - V(\varphi, 0)\xi, \xi) \tag{45}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и $(\eta, \xi) \in (T\mathcal{T}_m)_\varphi \times E_\varphi$, причем $\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \left\| (dS)^{-1}_{(\varphi, 0)} \right\| < \infty$ на основании (36). Тогда на основании общей теоремы о неявной функции [8, с. 103], компактности множества $\{ (dS)^{-1}_{(\varphi, 0)} : \varphi \in \mathcal{T}_m \}$ (в силу непрерывной зависимости производной $(dS)^{-1}_{(\varphi, 0)}$ от φ на компактном множестве $\mathcal{T}_m$) и соотношений (36) – (38) вытекает, что при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ отображение $S : G_{\varepsilon_0} \to S\, G_{\varepsilon_0}$ имеет непрерывное обратное отображение S^{-1}. Поскольку отображение S является C^{r-1}-отображением, то аналогичное свойство имеет отображение S^{-1}.

Итак, отображение $S\colon G_{\varepsilon_0} \to S\, G_{\varepsilon_0}$ является C^{r-1}-диффеоморфизмом (при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$).

Следовательно, систему (32) можно разрешить относительно φ и h для всех $(\psi, \delta) \in S\, G_{\varepsilon_0}$. Пусть $\varphi = \varphi(\psi, \delta)$, $h = h(\psi, \delta)$ — решения этой системы. Тогда в силу принадлежности S^{-1} классу C^{r-1}-отображения $\varphi(\psi, \delta)$ и $h(\psi, \delta)$ будут C^{r-1}-отображениями. Используя эти отображения и систему (43), приходим к выводу, что отображения $U_1(\psi, \delta)$ и $U_2(\psi, \delta)$ (см. (33)) представляются в виде

$$U_1(\psi, \delta) = V_1(\varphi(\psi, \delta), h(\psi, \delta)), \tag{46}$$

$$U_2(\psi, \delta) = W_1(\varphi(\psi, \delta), h(\psi, \delta)) \tag{47}$$

и имеют свойства, указанные в утверждении леммы 4.

Лемма 4 доказана.

Теперь используем леммы 3 и 4 для упрощения системы разностных уравнений (22).

Теорема 5. *При достаточно малых* $\varepsilon_0 > 0$ *и*

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \sum_{k=0}^{r-1} \left\| (d^k B)_{(\varphi, 0)} \right\|$$

с помощью замены (32) *система* (22) *в окрестности* G_{ε_0} *многообразия* $\mathcal{T}_m \times \times \{0\}$ *переходит в систему*

$$\begin{cases} \psi(n+1) = \psi(n) + \omega, \\ \delta(n+1) = C(\psi(n), \delta(n))\delta(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{48}$$

где $C(\psi, \delta)$ — *линейное для каждых* $(\psi, \delta) \in G_{\varepsilon_0}$ *непрерывное отображение, действующее из* E_ψ *в* $E_{\psi+\omega}$, *являющееся* C^{r-1}*-отображением и удовлетворяющее соотношению*

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \left\| C(\psi, \delta) - P(\psi + \omega)(dX)_{f(\psi)} P(\psi) \right\| = o(\delta) \text{ при } \delta \to 0. \tag{49}$$

Доказательство. Из леммы 3 и ее доказательства следует, что решение $(\varphi(n), h(n))$ системы (22) удовлетворяет соотношению

$$V(\varphi(n), h(n))h(n) = A(\varphi(n), h(n))h(n) +$$
$$+ V(\varphi(n) + \omega + A(\varphi(n), h(n))h(n), B(\varphi(n), h(n))h(n))B(\varphi(n), h(n))h(n)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$, для которых $\|h(n)\| < \varepsilon_0$. Поэтому первое из уравнений системы (22), если учесть, что на основании (32)

$$\psi(n) = \varphi(n) + V(\varphi(n), h(n))h(n),$$
$$\psi(n+1) = \varphi(n+1) +$$
$$+ V(\varphi(n) + \omega + A(\varphi(n), h(n))h(n), B(\varphi(n), h(n))h(n))B(\varphi(n), h(n))h(n),$$

перейдет в первое уравнение системы (48).

Используя последовательно (32), (22) и (33), а также равенство $\psi(n+1) = \psi(n) + \omega$, получаем

$$\delta(n+1) = P(\psi(n+1))h(n+1) = P(\psi(n) + \omega)B(\varphi(n), h(n))h(n) =$$
$$= P(\psi(n) + \omega)B(\psi(n) + U_1(\psi(n), \delta(n))\delta(n), \delta(n) + U_2(\psi(n), \delta(n))\delta(n)) \times$$
$$\times (I + U_2(\psi(n), \delta(n)))\delta(n).$$

Следовательно, замена (32) переводит систему (22) в окрестности G_{ε_0} многообразия $\mathcal{T}_m \times \{0\}$ в систему (46), где

$$C(\psi, \delta) = P(\psi+\omega) B(\psi + U_1(\psi, \delta)\delta, \delta + U_2(\psi, \delta)\delta)(I + U_2(\psi, \delta)). \tag{50}$$

Из последнего соотношения и леммы 4 вытекает, что отображение $C(\psi, \delta)$ при фиксированных $(\psi, \delta) \in \mathcal{T}_m \times \{0\}$ (δ — достаточно мало) является линейным, непрерывным и действует из E_ψ в $E_{\psi+\omega}$. Поскольку отображения P, B, U_1 и U_2 являются C^{r-1}-отображениями, то на основании (50) аналогичное свойство имеет отображение $C(\psi, \delta)$.

Обоснуем выполнение соотношения (49). Из доказательства леммы 4 и соотношений (44) – (46) вытекает, что

$$\sup_{(\psi, \delta) \in G_{\varepsilon_0}} \left(\| U_1(\psi, \delta) \| + \| U_2(\psi, \delta) \| \right) < \infty.$$

Отсюда и из равномерной непрерывности $B(\psi, 0)$ по ψ на компактном множестве $\mathcal{T}_m$ следует, что

$$\sup_{(\psi, \delta) \in G_\varepsilon} \| B(\psi + U_1(\psi, \delta)\delta, \delta + U_2(\psi, \delta)\delta) - B(\psi, 0) \| = o(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \to 0$. Учитывая (50), равенства $P^2(\psi+\omega) = P(\psi+\omega)$, $B(\psi, 0) = P(\psi+\omega)(dX)_{f(\psi)} P(\psi)$ (см. теорему 3 и замечание 2) и соотношение $\sup_{(\psi, \delta) \in G_\varepsilon} \| U_2(\psi, \delta) \| = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, вытекающее из (38), (47) и определения $W_1(\varphi, h)$ (см. доказательство леммы 4), убеждаемся в справедливости соотношения (49).

Теорема 5 доказана.

***Замечание* 3.** Поскольку $P(\psi)\delta = \delta$, если $\delta \in E_\psi$, то $C(\psi, \delta) = C(\psi, P(\psi)\delta)$ для всех $(\psi, \delta) \in G_{\varepsilon_0}$. Поэтому система (48) представляется в виде

$$\begin{cases} \psi(n+1) = \psi(n) + \omega, \\ \delta(n+1) = C(\psi(n), P(\psi(n))\delta(n))\delta(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{51}$$

В этой системе на основании соотношений (50), (46), (47), (35), (25), (26), (27), (18), (19) и 2π-периодичности функции $f(\psi) = f(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ по каждой из переменных ψ_k $\left(k = \overline{1, n}\right)$ оператор-функция $C(\psi, P(\psi)\delta) = C(\psi_1, \dots, \psi_n, P(\psi_2, \dots, \psi_n)\delta)$ также будет 2π-периодической по каждой из переменных ψ_k $\left(k = \overline{1, n}\right)$ для всех достаточно малых по норме $\delta \in E$.

6. Асимптотическое поведение траекторий системы (1) вблизи многообразия *M*. Ограничения на отображения X и f, позволившие перейти от системы (1) к системе (48), также дают возможность исследовать асимптотическое поведение траекторий динамической системы (1) вблизи многообразия M.

Теорема 6. *Пусть выполняется соотношение* (24) *и величина*

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \sum_{k=0}^{r-1} \left\| (d^k B)_{(\varphi, 0)} \right\|$$

достаточно мала. Тогда многообразие M — аттрактор системы (1).

Доказательство. На основании теоремы 5 и соотношения (24) найдется число $\varepsilon_0 > 0$, для которого

$$q = \sup_{(\psi, \delta) \in G_{\varepsilon_0}} \| C(\psi, \delta) \| < 1. \tag{52}$$

Также найдется число $\varepsilon_1 > 0$, что в окрестности $U_{\varepsilon_1}(M) = \{x \in E : \inf_{y \in M}\|x - y\| < \varepsilon_1\}$ многообразия M будет определено отображение

$$SF^{-1} \colon U_{\varepsilon_1}(M) \to SF^{-1}U_{\varepsilon_1}(M) \quad (SF^{-1}U_{\varepsilon_1}(M) \subset G_{\varepsilon_0}),$$

являющееся C^{r-1}-диффеоморфизмом на основании лемм 1 и 4. Это отображение сводит изучение поведения траекторий системы (1) в окрестности $U_{\varepsilon_1}(M)$ к изучению поведения траекторий системы (48) в окрестности $SF^{-1}U_{\varepsilon_1}(M) \subset \subset G_{\varepsilon_0}$. Поэтому для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что множество $\mathcal{T}_m \times \{0\}$ — есть аттрактор [11, с. 414] системы (48).

Рассмотрим порождаемое правой частью системы (48) отображение

$$g(\psi, \delta) = (\psi + \omega, C(\psi, \delta)\delta),$$

определенное на G_{ε_0}. На основании (52) $g^n G_{\varepsilon_0} \subset g^{n-1} G_{\varepsilon_0}$ и $g^n G_{\varepsilon_0} \subset G_{\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_n = q\varepsilon_0$ и $n \in \mathbb{N}$. Поскольку также $\mathcal{T}_m \times \{0\} \subset g^n G_{\varepsilon_0}$ для $n \in \mathbb{N}$, что следует из определения отображения g, то

$$\bigcap_{n \geq 1} g^n G_{\varepsilon_0} = \mathcal{T}_m \times \{0\}.$$

Следовательно, $\mathcal{T}_m \times \{0\}$ — аттрактор системы (48).

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 6. *Тогда можно указать достаточно малое положительное число* δ *такое, что каждое решение* $x(n)$ *разностного уравнения* (1), *для которого* $x(0) \in U_\delta(M)$, *является устойчивым по Ляпунову.*

Доказательство. Пусть ε_1 — число, рассмотренное в доказательстве теоремы 6. В качестве δ возьмем такое число, чтобы

$$x(n) \in U_{\varepsilon_1}(M) \text{ для всех } n \geq 0. \tag{53}$$

Это возможно, так как M — аттрактор. Поскольку отображение SF^{-1} определено на $U_{\varepsilon_1}(M)$, то в силу (53) $SF^{-1}x(n)$ — решение системы (48). А поскольку отображение $SF^{-1} \colon U_{\varepsilon_1}(M) \to SF^{-1}U_{\varepsilon_1}(M)$ является диффеоморфизмом, то для доказательства устойчивости решения $x(n)$ системы (1) достаточно доказать устойчивость решения $SF^{-1}x(n)$ системы (48).

Решение $SF^{-1}x(n)$ представим в виде $(\psi(n), \delta(n))$. Поскольку $(\psi(n), \delta(n)) \in G_{\varepsilon_0}$ для всех $n \geq 0$ в силу доказательства теоремы 6, то $\|\delta(0)\| < \varepsilon_0$. Рассмотрим произвольное положительное число $\varepsilon < \varepsilon_1 - \|\delta(0)\|$ и покажем, что найдется число $\gamma \in (0, \varepsilon/2)$, что для каждого решения $(\psi_1(n), \delta_1(n))$ системы (48), для которого

$$\|\psi(0) - \psi_1(0)\| + \|\delta(0) - \delta_1(0)\| < \gamma, \tag{54}$$

будет выполняться соотношение

$$\|\psi(n) - \psi_1(n)\| + \|\delta(n) - \delta_1(n)\| < \varepsilon, \quad n \geq 1. \tag{55}$$

Из первого уравнения системы (48) следует, что

$$\|\psi(n) - \psi_1(n)\| = \|\psi(0) - \psi_1(0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq 1. \tag{56}$$

Пусть n_0 — такое натуральное число, что

$$\varepsilon_0 q^{n_0} < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{57}$$

где q — то же самое число, что и в соотношении (52). Поскольку $\|\delta(n)\| \leq \leq q^n \varepsilon_0$, $\|\delta_1(n)\| \leq q^n \varepsilon_0$ для всех $n \geq 1$ (на основании (52) и второго уравнения системы (48)) и

$$\|\delta(n) - \delta_1(n)\| \leq \|\delta(n)\| + \|\delta_1(n)\|, \quad n \geq 1,$$

то на основании (56) и (57)

$$\|\psi(n) - \psi_1(n)\| + \|\delta(n) - \delta_1(n)\| < \varepsilon \tag{58}$$

для всех $n \geq n_0$. Из непрерывной зависимости $C(\psi, \delta)$ от ψ и δ (см. второе уравнение системы (48)) следует, что можно подобрать число $\gamma > 0$ настолько малым, чтобы соотношение (54) гарантировало выполнение неравенства $\|\delta(n) - \delta_1(n)\| < \varepsilon/2$ для всех $n \in \{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}$. Тогда согласно (56)

$$\|\psi(n) - \psi_1(n)\| + \|\delta(n) - \delta_1(n)\| < \varepsilon \tag{59}$$

для всех $n \in \{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}$.

Итак, на основании неравенств (58) и (59) выполняется неравенство (55), если выполняется неравенство (54) с достаточно малым γ. Из произвольности выбора $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 - \|\delta(0)\|)$ вытекает устойчивость решения $SF^{-1}x(n)$ системы (48).

Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть*:

1) $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_m\omega_m \neq 0 \pmod{2\pi}$ *для всех* $k_i \in \mathbb{N} \bigcap \{0\}$, $i = \overline{1, m}$, *для которых* $k_1 + k_2 + \ldots + k_m \neq 0$;

2) *выполняются условия теоремы* 6.

Тогда для каждого решения $x(n)$ *уравнения* (1), *для которого имеем* $\lim_{n\to\infty} \inf_{y \in M} \|x(n) - y\| = 0$, *выполняется соотношение*

$$\bigcap_{l=1}^{\infty} \overline{\{x(n) \colon n \geq l\}} = M.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что для достаточно большого $p \in \mathbb{N}$

$$\bigcap_{l=p}^{\infty} \overline{\left\{SF^{-1}x(n) \colon n \geq l\right\}} = \mathcal{T}_m \times \{0\}. \tag{60}$$

Здесь p выбирается достаточно большим, так как отображение SF^{-1} определено на достаточно малой окрестности многообразия M. Рассмотрим множества $H_l = \{(\xi(n), 0) : n \geq l\}$, $l \geq p$, где $\xi(n)$ — такое решение первого уравнения системы (48), что

$$SF^{-1}x(n) = (\xi(n), \delta(n)) \quad \text{для всех} \quad n \geq r.$$

В силу первого условия теоремы и теоремы Кронекера [12, с. 41]

$$\overline{H_l} = \mathcal{T}_m \times \{0\}. \tag{61}$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty}\|\delta(n)\| = 0$, так как M — аттрактор на основании второго условия теоремы, то расстояние Хаусдорфа [13, с. 223] между множествами $\overline{H_l}$

и $\overline{\left\{SF^{-1}x(n)\colon n\geq l\right\}}$ при $l\to\infty$ будет стремиться к 0. Отсюда, из независимости $\overline{H_l}$ от l (на основании (61)) и включений

$$\overline{\left\{SF^{-1}x(n)\colon n\geq l+k\right\}}\supset\overline{\left\{SF^{-1}x(n)\colon n\geq l+k+1\right\}},\qquad k\in\mathbb{N}$$

следует соотношение

$$\mathcal{T}_m\times\{0\}\subset\overline{\left\{SF^{-1}x(n)\colon n\geq l\right\}}\ \text{ для всех }\ l\geq p.$$

Поэтому имеет место соотношение (60) и, следовательно, справедливо утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Заметим, что приведенные выше утверждения являются дополнением к результатам, содержащимся в [1, 14 – 16].

1. *Самойленко А. М.* Исследование дискретной динамической системы в окрестности квазипериодической траектории // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 12. – С. 1702–1711.
2. *Хирш М.* Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979. – 280 с.
3. *Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Шерман П. Б.* Топологические методы в теории нелинейных фредгольмовых операторов. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1978. – 79 с.
4. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. – М.: Мир, 1972. – 279 с.
5. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
8. *Зорич В. А.* Математический анализ: В 2-х т. – М.: Наука, 1984. – Т. 2. – 640 с.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2-х т. – М.: Наука, 1966. – Т. 1. – 608 с.
10. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.
11. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984. – 528 с.
12. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 205 с.
13. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 595 с.
14. *Самойленко А. М.* Исследование динамической системы в окрестности квазипериодической траектории. – Киев, 1990. – 43 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 90.35).
15. *Самойленко А. М.* Динамические системы в $\mathcal{T}_m\times E^n$ // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1283–1298.
16. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 212 с.

Получено 12.05.97