УДК 517.944

А. О. Ботюк (Терноп. держ. пед. ун-т)

КВАЗІЛІНІЙНА КРАЙОВА ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА

We study a boundary-value periodic problem for the quasilinear equation $u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x]$. We find conditions under which the theorem on the uniqueness of solution is true.

Вивчається крайова періодична задача для квазілінійного рівняння $u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x]$. Знаходяться умови, за яких справедлива теорема єдиності розв'язку.

Розглянемо таку нелінійну крайову періодичну задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x], \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Нелінійний оператор $F[u, u_t, u_x]$ переводить гладку $(u \in C^{1,1}(\mathbb{R}^2))$ функцію $u(x, t)$ в неперервну скалярну функцію $F[u, u_t, u_x](x, t)$, визначену на $\mathbb{R}^2$.

В роботах [1, 2] нами доведено, що в просторі

$$A = \{h\colon h(x, t) = h(x + 2\pi, t) = -h(-x, t) = -h(x, -t) = = h(x, t+T) = h(\pi - x, t + T/2)\},$$

де $T = 2\pi(2p-1)/q$, $q = 2s - 1$, $p \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, $(2p-1, q) = 1$, лінійна задача

$$u_{tt} - u_{xx} = h(x, t), \tag{4}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \tag{5}$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \tag{6}$$

для кожної неперервної і обмеженої функції $h(x, t) \in A \cap C(\mathbb{R}^2)$ має єдиний розв'язок $u(x, t) \in A \cap C^2(\mathbb{R}^2)$. Більше того, даний розв'язок задається формулою

$$u(x, t) = (Sh)(x, t) = -\frac{1}{4}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} h(\xi, \tau)\, d\tau + $$

$$+ \frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} h(\xi, \tau)\, d\tau = \frac{1}{4}\int_0^\pi Q(\xi)\, d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} h(\xi, \tau)\, d\tau, \tag{7}$$

де $Q(\xi) = 1$, якщо $0 \le \xi \le x$, $Q(\xi) = -1$, якщо $x < \xi \le \pi$.

За аналогією з лінійним випадком розглянемо таку систему інтегральних рівнянь:

$$u(x, t) = \frac{1}{4}\int_0^\pi Q(\xi)\, d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} F[u, u_t, u_x](\xi, \tau)\, d\tau,$$

$$u_t(x, t) = \frac{1}{4}\int_0^\pi Q(\xi)\{F[u, u_t, u_x](\xi, t - x + \xi) + F[u, u_t, u_x](\xi, t + x - \xi)\}\, d\xi, \tag{8}$$

$$u_x(x,t) = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} Q(\xi)\{F[u,u_t,u_x](\xi,t-x+\xi)+F[u,u_t,u_x](\xi,t+x-\xi)\}d\xi.$$

Означення 1. *Розв'язок* $(u, u_t, u_x) \in A \cap C(\mathbb{R}^2)$ *системи інтегральних рівнянь* (8) *будемо називати гладким розв'язком крайової періодичної задачі* (1) – (3) *в просторі* A.

Справедливе наступне твердження.

Лема 1. *Нехай* $h(x,t) \in A \cap C$. *Тоді лінійна задача* (4) – (6) *має єдиний гладкий розв'язок, визначений за формулою* (7), *для якого справедливі оцінки*

$$\|u(x,t)\|_C \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \|h(x,t)\|_C; \qquad \|u_t(x,t)\|_C \le \frac{\pi}{2}\|h(x,t)\|_C;$$
$$\|u_x(x,t)\|_C \le \frac{\pi}{2}\|h(x,t)\|_C, \tag{9}$$

де $\|h(x,t)\|_C = \sup\left\{|h(x,t)|;\ (x,t)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Покажемо, що аналогічний результат можна встановити і для нелінійної задачі (1) – (3). Сформулюємо і доведемо за допомогою теореми 0. 1 з роботи [3] таку теорему.

Теорема 1. *Нехай скалярна функція* $F[u, u_t, u_x](x,t)$ *задовольняє такі умови:*

1) $F[u,u_t,u_x](x,t) = f(x,t,u,u_t,u_x) \in C(\mathbb{R}^5)$; (10)

2) $0 \le \|F[0,0,0](x,t)\|_C = K < \infty$; (11)

3) $|F[u'',u_t'',u_x''](x,t) - F[u',u_t',u_x'](x,t)| \le N_1|u''(x,t)-u'(x,t)| + {}$
$+ N_2|u_t''(x,t)-u_t'(x,t)| + N_3|u_x''(x,t)-u_x'(x,t)|$; (12)

4) $F[0,0,0](x,t) \in A$; (13)

5) $\forall\, u \in A \cap C^{1,1}(\mathbb{R}^2)\quad F[u,u_t,u_x](x,t) \in A \cap C(\mathbb{R}^2)$. (14)

Тоді при виконанні умови

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 N_1 + \frac{\pi}{2}(N_2+N_3) < 1 \tag{15}$$

задача (1) – (3) *має єдиний гладкий розв'язок* $u(x,t) \in A \cap C^{1,1}(\mathbb{R}^2)$.

***Зауваження до теореми* 0.1** з роботи [3]. Якщо відображення T_0 відображає кулю $|x| < \rho$ в себе, то умову теореми 0.1 $M \le \rho(1-\theta)$, $0<\theta<1$, можна відкинути.

***Зауваження* 1.** Замість вимоги, щоб скалярна функція $F[u, u_t, u_x](x,t)$ була визначена для $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ і всіх (u, u_t, u_x), достатньо припустити, щоб вона була визначена для $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, $\|u\|_C \le M$, $\|u_t\|_C \le 2M/\pi$, $\|u_x\|_C \le 2M/\pi$, де M задовольняє умову

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 K \le M\left(1-\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 N_1 + \frac{\pi}{2}(N_2+N_3)\right)\right), \quad K = \|F[0,0,0](x,t)\|_C, \tag{16}$$

або

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 M_1 \le M, \tag{17}$$

де $M_1 = \| F[u, u_t, u_x](x, t)\|_C$ для $\|u\|_C \le M$, $\|u_t\|_C \le 2M/\pi$, $\|u_x\|_C \le 2M/\pi$.

Доведення. Нехай D — банаховий простір функцій $h(x, t) \in A \cap \cap C^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ з нормою

$$\| h(x, t)\|_{C^{1,1}} = \max\left(\| h(x, t)\|_C, \frac{\pi}{2}\| h_t(x, t)\|_C, \frac{\pi}{2}\| h_x(x, t)\|_C \right). \tag{18}$$

Розглянемо в кулі $\| h(x, t)\|_{C^{1,1}} \le M$ з D деяку функцію $h(x, t)$. Нехай буде $u(x, t)$ — єдиний розв'язок рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = F[h, h_t, h_x], \tag{19}$$

який задовольняє умови (2) та (3).

Означимо в кулі $\| h(x, t)\|_{C^{1,1}} \le M$ з D оператор T_0, поклавши $T_0[h](x, t) = u(x, t)$. Якщо $u^0(x, t) = T_0[0](x, t)$ і виконується умова (11), то з нерівностей (9) при $h(x, t) = F[0, 0, 0](x, t)$ одержуємо

$$\left\| u^0 \right\|_C \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 K, \quad \frac{\pi}{2}\left\| u_t^0 \right\| \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 K, \quad \frac{\pi}{2}\left\| u_x^0 \right\| \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 K. \tag{20}$$

Значить, норма функції $u^0(x, t) = T_0[0](x, t) \in D$ задовольняє нерівність

$$\| T_0[0](x, t)\|_{C^{1,1}} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 K. \tag{21}$$

Тепер, якщо $u_1 = T_0[h_1]$, $u_2 = T_0[h_2]$, то згідно з (12) та (20) маємо

$$| u_1(x, t) - u_2(x, t) | \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \big(N_1 \| h_1(x, t) - h_2(x, t)\|_C +$$

$$+ N_2 \| h_{1t}(x, t) - h_{2t}(x, t)\|_C + N_3 \| h_{1x}(x, t) - h_{2x}(x, t)\|_C \big);$$

$$| u_{1t}(x, t) - u_{2t}(x, t) | \le \frac{\pi}{2}\big(N_1 \| h_1(x, t) - h_2(x, t)\|_C +$$

$$+ N_2 \| h_{1t}(x, t) - h_{2t}(x, t)\|_C + N_3 \| h_{1x}(x, t) - h_{2x}(x, t)\|_C \big);$$

$$| u_{1x}(x, t) - u_{2x}(x, t) | \le \frac{\pi}{2}\big(N_1 \| h_1(x, t) - h_2(x, t)\|_C +$$

$$+ N_2 \| h_{1t}(x, t) - h_{2t}(x, t)\|_C + N_3 \| h_{1x}(x, t) - h_{2x}(x, t)\|_C \big).$$

Якщо дві останні нерівності помножити на $\pi/2$, а

$$N_2(\pi/2)^2 \| h_{1t}(x, t) - h_{2t}(x, t)\|_C \text{ та } N_3(\pi/2)^2 \| h_{1x}(x, t) - h_{2x}(x, t)\|_C$$

переписати відповідно у вигляді

$$\left(N_2 \frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2} \| h_{1t}(x, t) - h_{2t}(x, t)\|_C \text{ та } \left(N_3 \frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2} \| h_{1x}(x, t) - h_{2x}(x, t)\|_C,$$

то одержимо

$$\| T_0[h_1] - T_0[h_2]\|_{C^{1,1}} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 N_1 + \frac{\pi}{2}(N_2 + N_3) \| h_1(x, t) - h_2(x, t)\|_{C^{1,1}}.$$

Тепер з рівностей (15), (16) та (21) бачимо, що виконуються всі умови теореми 0.1 з [3], тобто теорема 1 доведена.

Аналогічно, якщо

$$M_1 = \| F[u, u_t, u_x](x, t) \|_C$$

для

$$\|u\|_C \le M, \quad \|u_t\|_C \le 2M/\pi, \quad \|u_x\|_C \le 2M/\pi,$$

то частина співвідношень (20), які відносяться до $u_t(x, t)$ та $u_x(x, t)$, показує, що якщо $\|h(x, t)\|_{C^{1,1}} \le M$, то $u(x, t) = T_0[h](x, t)$ задовольняє нерівність

$$\|u(x, t)\|_{C^{1,1}} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 M.$$

Отже, якщо справедлива нерівність (17), то T_0 відображає кулю $\|h(x, t)\|_{C^{1,1}} \le$ $\le M$ саму в себе, а це означає внаслідок (15), що виконуються всі умови зауваження до теореми 0.1. Таким чином, теорему 1 з врахуванням зауваження 1 повністю доведено.

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. *Хома Л. Г., Хома Н. Г., Ботюк А. О.* Існування просторів Вейводи–Штедри // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**. – № 2. – С. 302–308.
3. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

Одержано 03.03.97