УДК 539.12

В. М. Симулик (Ин-т электронной физики НАН Украины, Ужгород)

ТЕОРЕМА О СТРУКТУРЕ ПОЛНОГО НАБОРА КОНФОРМНОПОДОБНЫХ СЕРИЙ СОХРАНЯЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИН ДЛЯ БЕЗМАССОВЫХ ПОЛЕЙ

We formulate a convenient general method for constructing a complete set of conformal-like series of conservation laws of nth order. As examples, we give all the conformal-like series which are generated by symmetric tensors of the third and fourth ranks.

Сформульовано зручну загальну методику побудови повного набору конформноподібних серій законів збереження n-го порядку. Як приклади наведено всі конформноподібні серії, які породжуються симетричними тензорами третього і четвертого рангів.

Введение. Работа посвящена выработке удобного ненетеровского способа получения в ковариантной форме всех конформноподобных серий сохраняющихся величин для произвольных безмассовых полей, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям в частных производных.

Термин „конформноподобная серия сохраняющихся величин" возник в результате обобщения и систематизации дополнительных сохраняющихся величин для уравнений математической физики, описывающих безмассовые поля. Напомним, что обычные конформные серии сохраняющихся величин хорошо и давно известны в современной математической физике. Первая такая серия сохраняющихся величин получена Э. Бессель-Хагеном [1] для свободного электромагнитного поля как следствие инвариантности уравнений для этого поля в терминах потенциалов относительно преобразований из 15-параметрической конформной группы $C(1,3)$ (кратко: $C(1,3)$-преобразований). С тех пор конформные серии законов сохранения получены для всех остальных безмассовых полей (см., например, обзор в [2–4]).

Первая конформноподобная серия сохраняющихся величин для электромагнитного поля получена в работах [5–7]. Вначале в [5] рассмотрен дополнительный (по отношению к известному тензору энергии-импульса) сохраняющийся тензор для электромагнитного поля, названный „zilch"-тензором. Затем в [6, 7] построена конформноподобная серия сохраняющихся величин для электромагнитного поля. В ней роль, которую в обычной серии [1] играет тензор энергии-импульса, выполняет zilch-тензор из [5]. В наших работах [8–14], а также [4] найдены еще три конформноподобные серии сохраняющихся величин для свободного электромагнитного поля, а в [15] (см. также [4, 10]) найдены конформноподобные серии и для безмассового спинорного поля, удовлетворяющего уравнению Дирака. Поскольку явный вид, структура и способ построения таких серий законов сохранения через порождающий тензор такие же, как и в обычной конформной серии законов сохранения [1], то в [4, 13, 14] такие серии предложено называть конформноподобными.

Ниже, продолжая и обобщая наши исследования [4, 8–15], приводится общая методика построения полного набора таких конформноподобных серий законов сохранения для произвольного безмассового поля.

1. Метод построения конформноподобных серий законов сохранения для произвольного безмассового поля.

Определение. *Под законом сохранения n-го порядка в дифференциальной форме для некоторого M-компонентного поля* $\varphi = (\varphi^m(x))$ *понимается билинейная комбинация компонент* φ^m, *содержащая производные функций* φ^m *(от одной из функций в билинейной форме) до n-го порядка включительно, т. е. конструкция вида*

$$\theta^{\mu}(x) = a^{\mu}_{mn}\varphi^m(x)\varphi^n(x) + b^{\mu\nu}_{mn}\varphi^m(x)\partial_{\nu}\varphi^n(x) +$$

$$+\, c_{mn}^{\mu\rho\sigma}\varphi^m(x)\partial_\rho\partial_\sigma\varphi^n(x)+\ldots+c_{mn}^{\mu\rho_1\cdot\ldots\cdot\rho_N}\varphi^m(x)\partial_{\rho_1}\cdot\ldots\cdot\partial_{\rho_N}\varphi^n(x)\ ; \tag{1}$$

$$x\equiv(x^\mu),\qquad m,n=1,2,\ldots,M,\qquad \mu,\rho,\sigma=0,1,2,3,$$

которая имеет свойства

$$\partial_\mu\theta^\mu = 0 \Rightarrow \int d^3x\theta^0(x)\equiv\theta(t) = \text{const} \tag{2}$$

(законом сохранения 0-го порядка называют первое слагаемое в (1), *1-го порядка — второе слагаемое и т. д.). Из-за свойства* (2) *величину* (1) *называют также сохраняющимся током* ($\theta(t)$ *— соответствующая току* θ^μ *интегральная сохраняющаяся величина). Коэффициенты* a_{mn}^μ, $b_{mn}^{\mu\nu}$, $c_{mn}^{\mu\rho\sigma}$, $\tilde{c}_{mn}^{\mu\rho_1\cdot\ldots\cdot\rho_N}$ *в* (1) *могут быть как числами, так и функциями координат* $x\in R^4$ *точек пространства-времени.*

Теорема 1. *Пусть* $\varphi=(\varphi^m(x))$ *— произвольное* M*-компонентное безмассовое поле, удовлетворяющее некоторому полевому уравнению. Если некоторый тензор* $G^{(\mu\nu)}(\varphi)$ *(имеющий и другие тензорные индексы) удовлетворяет условиям*

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0,\qquad G^{\mu\nu} = G^{\nu\mu},\qquad G^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\equiv G_\mu^\mu = 0, \tag{3}$$

где $g=(g^{\mu\nu})=\operatorname{diag}(1,-1,-1,-1)$ *— метрический тензор, то тогда все токи* θ^μ*, выраженные через* $G^{\mu\nu}$ *по формулам*

$$\begin{gathered}P^{(\mu)\nu} = G^{\mu\nu},\qquad J^{(\mu)\alpha\beta}\equiv x^\alpha P^{(\mu)\beta}-x^\beta P^{(\mu)\alpha},\\ D^{(\mu)}\equiv x_\nu P^{(\mu)\nu},\qquad K^{(\mu)\alpha}\equiv 2x^\alpha D^{(\mu)}-x^2P^{(\mu)\alpha},\end{gathered} \tag{4}$$

сохраняются (обозначением (μ) *отмечаем токовый для величин* P, J, D, K *индекс, т. е. индекс, по которому справедливо свойство* (2)).

Доказательство. Справедливость теоремы (т. е. верность утверждения (4)) доказывается непосредственной проверкой выполнения свойства (2) для величин $\theta^\mu=(J^{(\mu)\alpha\beta}, D^{(\mu)}, K^{(\mu)\alpha})$ (4) при условиях (3).

Теорема 2. *Если некоторый тензор* $n+m$*-го ранга* $G^{(\mu_1\mu_2\ldots\mu_n)\ldots\mu_{n+m}}$ *по группе индексов* $(\mu_1\mu_2\ldots\mu_n)$ *удовлетворяет всем условиям из* (3), *то, используя формулы* (4), *из него можно построить набор конфомноподобных серий. Первая серия строится непосредственно по* (4). *Затем на основе каждого из ее элементов* $J^{(\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1})}$, $D^{(\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1})}$, $K^{(\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1})}$ *по формулам* (4) *строятся три дополнительные серии, в которых в качестве порождающего тензора* G *поочередно используется каждый из трех тензоров* $J^{(\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1})\ldots}$, $D^{(\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1})\ldots}$, $K^{(\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-1})\ldots}$. *Элементы* $J^{\mathrm{I-III}(\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-2})\ldots}$, $D^{\mathrm{I-III}(\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-2})\ldots}$, $K^{\mathrm{I-III}(\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n-2})\ldots}$ *трех дополнительных серий в свою очередь могут по формулам* (4) *порождать еще 9 дополнительных конформноподобных серий и так далее, пока у элементов возникающих серий сохраняющихся величин остаются удовлетворяющие свойствам* (3) *индексы. Количество таких конформноподобных серий зависит от числа* n *удовлетворяющих условиям* (3) *индексов* $(\mu_1\mu_2\ldots\mu_n)$, *или от ранга тензора* G, *если других индексов (кроме этих) у него нет. Каждое последующее количество* X^n *конформноподобных серий получается из предыдущего* Y *по формуле*

$$X^n = 3Y+1, \tag{5}$$

где n — указанное число (или ранг тензора G, если других индексов с другими свойствами у него нет).

Доказательство. Теорема доказывается непосредственной проверкой справедливости формул (4) в силу условий (3) для всех построенных по теореме конформноподобных серий. Закономерность (5) несложно заметить: из тензоров нулевого и первого ранга серии (4) не строятся (т. е. $X^{0,1} = 0$), для тензора 2-го ранга имеем одну конформную серию, для тензора 3-го ранга — 4 конформноподобные серии, для тензора 4-го ранга — 13 конформноподобных серий, для 5-го ранга — 40 и т. д.

2. Полные наборы конформноподобных серий законов сохранения для порождающих тензоров третьего и четвертого рангов.

Применение и полезность теорем проиллюстрируем на примерах.

Рассмотрим вначале в качестве G (3) тензор 2-го ранга (симметричный тензор энергии-импульса для безмассовых полей). Тогда по правилу (4) получается основная конформная серия законов сохранения для произвольного безмассового поля (15 линейно независимых величин: энергия, импульс, момент количества движения, законы сохранения движения центра энергии, дилатации и собственно конформности). Явный вид серии совпадает с (4).

Рассмотрим далее в качестве $G(3)$ тензор третьего ранга $Z^{\mu\nu\alpha}$, удовлетворяющий всем свойствам (3) по всем индексам, а именно:

$$\partial_\mu Z^{\mu\nu\rho} = \partial_\nu Z^{\mu\nu\rho} = \partial_\rho Z^{\mu\nu\rho} = 0,$$

$$Z^{\mu\nu\rho} = Z^{\nu\mu\rho} = Z^{\mu\rho\nu} = Z^{\rho\mu\nu} = Z^{\nu\rho\mu} = Z^{\rho\nu\mu}, \tag{6}$$

$$g_{\mu\nu} Z^{\mu\nu\rho} \equiv Z^{\mu\rho}_{\mu} = Z^{\mu\nu}_{\nu} = Z^{\rho\nu}_{\rho} = 0.$$

Согласно теореме 2 получаем 4 конформноподобные серии:

$$P^{(\mu\nu)\rho} \equiv Z^{\mu\nu\rho}, \quad D^{(\mu\nu)} \equiv x_\rho P^{(\mu\nu)\rho} = x_\rho Z^{\mu\nu\rho},$$

$$M^{(\mu\nu)\rho\sigma} \equiv x^\rho P^{(\mu\nu)\sigma} - x^\sigma P^{(\mu\nu)\rho} = x^\rho Z^{\mu\nu\sigma} - x^\sigma Z^{\mu\nu\rho}, \tag{7}$$

$$K^{(\mu\nu)\rho} \equiv 2x^\rho D^{(\mu\nu)} - x^2 P^{(\mu\nu)\rho} = 2x^\rho x_\sigma Z^{\mu\nu\sigma} - x^2 Z^{\mu\nu\rho};$$

$$\tilde{P}^{(\mu)\rho} \equiv D^{(\mu\rho)} = x_\nu Z^{\mu\nu\rho}, \quad \tilde{D}^{(\mu)} \equiv x_\rho \tilde{P}^{(\mu)\rho} = x_\nu x_\rho Z^{\mu\nu\rho},$$

$$\tilde{M}^{(\mu)\rho\sigma} \equiv x^\rho \tilde{P}^{(\mu)\sigma} - x^\sigma \tilde{P}^{(\mu)\rho} = x_\nu (x^\rho Z^{\mu\nu\sigma} - x^\sigma Z^{\mu\nu\rho}), \tag{8}$$

$$\tilde{K}^{(\mu)\rho} \equiv 2x^\rho D^{(\mu)} - x^2 \tilde{P}^{(\mu)\rho} = x_\nu (2x^\rho x_\sigma Z^{\mu\nu\sigma} - x^2 Z^{\mu\nu\rho});$$

$$P^{(\mu)\alpha\beta\rho} \equiv M^{(\mu\rho)\alpha\beta} = x^\alpha Z^{\mu\rho\beta} - x^\beta Z^{\mu\rho\alpha},$$

$$D^{(\mu)\alpha\beta} \equiv x_\rho P^{(\mu)\alpha\beta\rho} = x_\rho (x^\alpha Z^{\mu\rho\beta} - x^\beta Z^{\mu\rho\alpha}),$$

$$M^{(\mu)\alpha\beta\rho\sigma} \equiv x^\rho P^{(\mu)\alpha\beta\sigma} - x^\sigma P^{(\mu)\alpha\beta\rho} = x^\alpha x^\rho Z^{\mu\beta\sigma} - x^\beta x^\rho Z^{\mu\alpha\sigma} -$$

$$- x^\alpha x^\sigma Z^{\mu\beta\rho} + x^\beta x^\sigma Z^{\mu\alpha\rho}, \tag{9}$$

$$K^{(\mu)\alpha\beta\rho} \equiv 2x^\rho D^{(\mu)\alpha\beta} - x^2 P^{(\mu)\alpha\beta\rho} = 2x^\rho x_\nu (x^\alpha Z^{\mu\nu\beta} - x^\beta Z^{\mu\nu\alpha}) -$$

$$- x^2 (x^\alpha Z^{\mu\beta\rho} - x^\beta Z^{\mu\alpha\rho});$$

$$P^{(\mu)\alpha\rho} \equiv K^{(\mu\rho)\alpha} = 2x^{\alpha}x_{\nu}Z^{\mu\nu\rho} - x^2 Z^{\mu\alpha\rho},$$

$$D^{(\mu)\alpha} \equiv x_{\rho}P^{(\mu)\alpha\rho} = x_{\rho}(2x^{\alpha}x_{\nu}Z^{\mu\nu\rho} - x^2 Z^{\mu\alpha\rho}),$$

$$M^{(\mu)\alpha\rho\sigma} \equiv x^{\rho}P^{(\mu)\alpha\sigma} - x^{\sigma}P^{(\mu)\alpha\rho} = 2x^{\alpha}x_{\nu}(x^{\rho}Z^{\mu\nu\sigma} - x^{\sigma}Z^{\mu\nu\rho}) -$$

$$- x^2(x^{\rho}Z^{\mu\alpha\sigma} - x^{\sigma}Z^{\mu\alpha\rho}), \tag{10}$$

$$K^{(\mu)\alpha\rho} \equiv 2x^{\rho}D^{(\mu)\alpha} - x^2 P^{(\mu)\alpha\rho} = 4x^{\alpha}x^{\rho}x_{\sigma}x_{\nu}Z^{\mu\nu\sigma} -$$

$$- 2x^2 x_{\nu}(x^{\rho}Z^{\mu\nu\alpha} + x^{\alpha}Z^{\mu\nu\rho}) + (x^2)^2 Z^{\mu\alpha\rho}.$$

Заметим, что вначале по формулам (4) получаем серию (7), элементы этой серии D, M, K в свою очередь удовлетворяют условиям (3) по группам индексов. Затем, используя в качестве порождающего тензора G величины D, M, K из (7), строим согласно теореме 2 соответствующие им три дополнительные серии (8)–(10). Возможностей использования других тензоров и дальнейшего применения теоремы 2 нет.

Итак, для тензора 3-го ранга, удовлетворяющего свойствам (3) (или (6)), получены 4 конформноподобные серии (7)–(10), т. е. по формуле (5) получили $X^3 = 4 = 3 \times 1 + 1$ при $Y = 1$.

Рассмотрим тензор 4-го ранга $A^{\mu\nu\rho\sigma}$, удовлетворяющий свойствам (3) или (6) по всем четырем индексам. По аналогии с изложенным выше получаем для него 13 конформноподобных серий сохраняющихся величин, которые находим из элементов основной серии

$$P^{(\mu\nu\alpha)\beta} \equiv A^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad D^{(\mu\nu\alpha)} \equiv x_{\beta}P^{(\mu\nu\alpha)\beta} = x_{\beta}A^{\mu\nu\alpha\beta},$$

$$M^{(\mu\nu\alpha)\rho\sigma} \equiv x^{\rho}P^{(\mu\nu\alpha)\sigma} - x^{\sigma}P^{(\mu\nu\alpha)\rho} = x^{\rho}A^{\mu\nu\alpha\sigma} - x^{\sigma}A^{\mu\nu\alpha\rho}, \tag{11}$$

$$K^{(\mu\nu\alpha)\beta} \equiv 2x^{\beta}D^{(\mu\nu\alpha)} - x^2 P^{(\mu\nu\alpha)\beta} = 2x^{\beta}x_{\rho}A^{\mu\nu\alpha\rho} - x^2 A^{\mu\nu\alpha\beta}$$

и, далее, из элементов трех следующих из (11) серий.

Приведенный пример с тензором 4-го ранга полностью иллюстрирует все аспекты применения теоремы 2. Из формулы (5) в этом случае следует $X^4 = 13 = 3 \times 4 + 1$ при $Y = 4$.

3. Некоторые выводы. Предложенные теоремы дают удобную, значительно менее громоздкую по сравнению с другими способами методику построения полных наборов конформноподобных серий сохраняющихся величин для произвольных безмассовых полей.

Полный набор дополнительных конформноподобных серий сохраняющихся величин n-го порядка строится по правилу (4) на основе использования в качестве порождающего серии тензора G последовательно всех элементов полного набора нетривиальных тензоров всех рангов, до n-го включительно, удовлетворяющих свойствам (3) для данного конкретного поля и соответствующего полевого уравнения.

Полный набор линейно независимых законов сохранения можно получить, исследовав все связи и тождества, справедливые для полученных токов θ^{μ} в зависимости от конкретного исследуемого поля и полевого уравнения для него, и выделив линейно независимые сохраняющиеся величины. В приведенном здесь общем виде конформноподобных серий можно сделать лишь первый шаг в выделении линейно независимых сохраняющихся величин, а именно, убрать повторяющиеся величины. Например, в сериях (7)–(10) повторяющимися величинами являются:

$$\tilde{P}^{(\mu)\rho} = D^{(\mu\rho)}, \quad P^{(\mu)\alpha\beta\rho} = M^{(\mu\rho)\alpha\beta}, \quad P^{(\mu)\alpha\rho} = K^{(\mu\rho)\alpha}.$$

Вопрос о полном наборе линейно независимых сохраняющихся величин для любого конкретного поля требует привлечения конкретного полевого уравнения и его следствий. Этот вопрос не может быть решен в общем виде для произвольных полей, поэтому выходит за рамки данной работы.

Применение сформулированных здесь теорем к электромагнитному полю в терминах напряженностей, удовлетворяющему уравнениям Максвелла, см. в [12–14]. Там же приведен конкретный пример одного из тензоров 3-го ранга, который может быть использован в качестве фигурирующего в сериях (7)–(10) тензора $Z^{\mu\nu\alpha}$. Таким тензором оказался zilch-тензор для электромагнитного поля в полностью симметрической форме.

Практическое использование исследуемых вопросов возможно в задачах о законах сохранения для гравитационного и глюонного полей. Что касается законов сохранения для безмассового спинорного поля, то применять эти теоремы можно либо посредством симметризации возникающих для спинорного поля выражений, либо обобщением приведенных здесь теорем ма случай антисимметричных порождающих тензоров.

Автор выражает благодарность И. Ю. Кривскому за полезные обсуждения.

1. *Bessel-Hagen E.* Uber die Erhaltungssatze der Electrodynamic // Math. Ann. – 1921. – **84**. – S. 258–276.
2. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. – 280 с.
3. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.
4. *Кривский И. Ю., Симулик В. М.* Основы квантовой электродинамики в терминах напряженностей. – Киев: Наук. думка, 1992. – 288 с.
5. *Lipkin D. M.* Existence of a new conservation law in electromagnetic theory // J. Math. Phys. – 1964. – **5**, N 5. – P. 696–700.
6. *Fradkin P. M.* Conserved quantities associated with symmetry transformations of relativistic free particle equations of motion // Ibid. – 1965. – **6**, N 6. – P. 879–890.
7. *Fairlie D. B.* Conservation laws and invariance principles // Nuovo Cim. – 1965. – **37**, N 3. – P. 897–904.
8. *Кривский И. Ю., Симулик В. М.* Нетеровский анализ „zilch"-законов сохранения и их обобщений для электромагнитного поля. I. Привлечение различных формулировок принципа наименьшего действия // Теорет. и мат. физика. – 1989. – **80**, № 2. – С. 274–286.
9. *Кривский И. Ю., Симулик В. М.* Нетеровский анализ „zilch"-законов сохранения и их обобщений для электромагнитного поля. II. Привлечение пуанкаре-инвариантной формулировки принципа наименьшего действия // Там же. – № 3. – С. 340–352.
10. *Симулик В. М.* Связь симметрийных свойств уравнений Дирака и Максвелла и законы сохранения // Там же. – 1991. – **87**, № 1. – С. 76–85.
11. *Симулик В. М., Кривский И. Ю.* Тензоры третьего ранга для электромагнитного поля и серии сохраняющихся величин // Укр. физ. журн. – 1991. – **36**, № 11. – С. 1607–1613.
12. *Кривский И. Ю., Симулик В. М., Торич З. З.* Общее исследование законов сохранения первого порядка для электромагнитного поля. – Киев, 1993. – 45 с. – (Препр. / АН України. Ін-т теоретичної фізики; ИТФ-93-31Р).
13. *Кривский И. Ю., Симулик В. М., Торич З. З.* О полном наборе законов сохранения первого порядка для электромагнитного поля // Докл. АН Украины. Сер. А. – 1993. – № 10. – С. 91–97.
14. *Krivsky I. Yu., Simulik V. M., Torich Z. Z.* A covariant form for the complete set of first-order electromagnetic conservation laws / Phys. Lett. B. – 1994. – **320**, N 1–2. – P. 96–98.
15. Фущич В. И., *Кривский И. Ю., Симулик В. М.* Нелиевские симметрии и нетеровский анализ законов сохранения для уравнения Дирака. – Киев, 1989. – 39 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; ИМ 89.49).

Получено 27.01.97