УДК 517.9

В. І. Фущич, В. М. Бойко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ГАЛІЛЕЙ-ІНВАРІАНТНІ РІВНЯННЯ ТИПУ БЮРГЕРСА ТА КОРТЕВЕГА – ДЕ-ФРІЗА ВИСОКОГО ПОРЯДКУ *

We describe nonlinear Galilei-invariant higher-order equations of Bürgers and Korteweg de Vries types. We study symmetry properties of these equations and construct new nonlinear extensions for the Galilei algebra $AG(1,1)$.

Описані нелінійні галілей-інваріантні рівняння типу Бюргерса та Кортевега – де-Фріза високого порядку. Досліджено симетрійні властивості цих рівнянь. Побудовані нові нелінійні розширення для алгебри Галілея $AG(1,1)$.

Розглянемо нелінійні одновимірні рівняння вигляду

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F(u_{(2)}, u_{(3)}, \dots, u_{(n)}), \tag{1}$$

де $u = u(t,x)$; $u_{(0)} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$; $u_{(n)} = \dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}$; $F(u_{(2)}, u_{(3)}, \dots, u_{(n)})$ — довільна гладка функція, $F \neq \mathrm{const}$.

До класу рівнянь (1) належать широко відомі рівняння гідродинаміки, такі як рівняння простої хвилі, Бюргерса, Кортевега – де-Фріза, Кортевега – де-Фріза – Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{5}$$

Рівняння (2) – (5) широко використовуються для опису реальних хвильових процесів у гідродинаміці, зокрема теорії мілкої води, акустиці [1 – 4]. Дослідженню рівнянь такого типу, зокрема їх симетрійних властивостей, присвячено ряд публікацій [5 – 9].

Розглянемо деякі нові узагальнення рівнянь типу (2) – (5) високого порядку з теоретико-алгебраїчної точки зору. Проведемо їх симетрійну класифікацію, побудуємо деякі класи точних розв'язків.

Спочатку сформулюємо твердження про ліївську симетрію деяких з рівнянь (1). Розглянемо рівняння

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F(u_{(2)}), \tag{6}$$

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F(u_{(3)}), \tag{7}$$

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F(u_{(4)}). \tag{8}$$

Теорема 1. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння* (6) *в залежності від* $F(u_{(2)})$ *є такі алгебри Лі:*

1) $\langle P_0, P_1, G\rangle$, *якщо* $F(u_{(2)})$ — *довільна;*

* Виконана при фінансовій підтримці Міжнародного наукового фонду INTAS і Американського математичного товариства.

2) $\langle P_0, P_1, G, Y_1\rangle$, *якщо* $F(u_{(2)}) = \lambda(u_{(2)})^k$, $k = \text{const}$; $k \neq 0$; $k \neq 1$; $k \neq 1/3$;

3) $\langle P_0, P_1, G, Y_2\rangle$, *якщо* $F(u_{(2)}) = \ln u_{(2)}$;

4) $\langle P_0, P_1, G, D, \Pi\rangle$, *якщо* $F(u_{(2)}) = \lambda u_{(2)}$;

5) $\langle P_0, P_1, G, R_1, R_2, R_3, R_4\rangle$, *якщо* $F(u_{(2)}) = \lambda(u_{(2)})^{1/3}$.

В умовах теореми $\lambda = \text{const}$, $\lambda \neq 0$, *а для базисних елементів алгебри Лі використовуються наступні позначення*:

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x, \quad G = t\partial_x + \partial_u,$$
$$Y_1 = (k+1)t\partial_t + (2-k)x\partial_x + (1-2k)u\partial_u,$$
$$Y_2 = t\partial_t + \left(2x - \frac{3}{2}t^2\right)\partial_x + (u-3t)\partial_u,$$
$$D = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, \quad \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x-tu)\partial_u,$$
$$R_1 = 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u, \quad R_2 = u\partial_x, \quad R_3 = (2tu-x)\partial_x + u\partial_u,$$
$$R_4 = (tu-x)(t\partial_x + \partial_u).$$

Доведення. Зауважимо, що в рівнянні

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = F(u_{(n)}) + C$$

константу C завжди можна покласти рівною нулеві, виконавши заміну змінних

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x - \frac{1}{2}Ct^2, \quad \tilde{u} = u + Ct. \tag{9}$$

Симетрійну класифікацію (6) проводимо в класі диференціальних операторів першого порядку

$$X = \xi^0(t,x,u)\partial_t + \xi^1(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u. \tag{10}$$

Знайшовши друге продовження оператора (10), умову інваріантності для рівняння (6), згідно з підходом Лі [5, 6], запишемо у вигляді

$$\underset{2}{X}(u_{(0)} + uu_{(1)} - F(u_{(2)}))\big|_{u_{(0)} = F(u_{(2)}) - uu_{(1)}} \equiv 0, \tag{11}$$

де

$$\underset{2}{X} = X + \left\{\eta_\alpha + \eta_u u_\alpha - u_j(\xi^j_\alpha + \xi^j_u u_\alpha)\right\}\partial_{u_\alpha} +$$
$$+ \left\{\eta_{\alpha i} + \eta_{\alpha u}u_i + \eta_{iu}u_\alpha + \eta_{uu}u_i u_\alpha + \eta_u u_{\alpha i} - u_{ji}(\xi^j_\alpha + \xi^j_u u_\alpha) -\right.$$
$$\left. - u_j(\xi^j_{\alpha i} + \xi^j_{\alpha u}u_i + \xi^j_{iu}u_\alpha + \xi^j_{uu}u_\alpha u_i + \xi^j_u u_{\alpha i}) - u_{\alpha j}(\xi^j_i + \xi^j_u u_i)\right\}\partial_{u_{\alpha i}},$$
$$\alpha, i, j = 0; 1.$$

Розписавши умову (11), після розщеплення за похідними u_{01}, u_1 одержимо систему визначальних рівнянь на ξ^0, ξ^1, η, F (через нижні індекси позначено диференціювання по відповідній змінній):

$$\xi^0_1 = 0, \quad \xi^0_u = 0, \quad \xi^1_{uu} = 0, \quad \eta_{uu} = 2\xi^1_{1u}, \tag{12}$$

$$\eta - \xi^1_0 + u(\xi^0_0 - \xi^1_1) - F\xi^1_u - F_{u_{11}}(2\eta_{1u} - \xi^1_{11} - 3u_{11}\xi^1_u) = 0,$$
$$\eta_0 + \eta_u F - \xi^0_0 F + u\eta_1 - F_{u_{11}}\left(\eta_{11} + u_{11}(\eta_u - 2\xi^1_1)\right) = 0. \tag{13}$$

Розв'язок (12) можна записати у вигляді

$$\xi^0 = p(t), \quad \xi^1 = a(t,x)u + b(t,x),$$
$$\eta = a_1(t,x)u^2 + c(t,x)u + d(t,x), \tag{14}$$

де $p(t)$, $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x)$, $d(t,x)$ — гладкі функції, що підлягають визначенню. Підставивши (14) в (13), після розщеплення за степенями u одержуємо систему рівнянь для визначення p, a, b, c, d, F:

$$c + p_0 - a_0 - b_1 = 0, \quad d - b_0 - aF - F_{u_{11}}(2c_1 - b_{11} - 3au_{11}) = 0,$$
$$a_{11} = 0, \quad a_{01} + c_1 = 0, \quad c_0 + 2a_1F + d_1 - c_{11}F_{u_{11}} = 0, \tag{15}$$
$$d_0 + cF - p_0F - F_{u_{11}}(d_{11} + u_{11}(c - 2b_1)) = 0.$$

В залежності від вигляду F розв'язання системи (15) зводиться до одного з наступних випадків:

Випадок I. F — довільна функція. Розщепивши (15) по похідним функції F, одержимо систему

$$a = 0, \quad c_1 = 0, \quad d_0 = 0, \quad c + p_0 - b_1 = 0,$$
$$d - b_0 = 0, \quad c_0 + d_1 = 0, \quad c - p_0 = 0, \quad c - 2b_1 = 0,$$

розв'язок якої визначає випадок 1 теореми 1.

Випадок II. $F_{u_{11}u_{11}} = 0$ $(F \neq \text{const})$. Отже,

$$F = \lambda u_{11} + \lambda_0, \quad \lambda_0, \lambda = \text{const}, \quad \lambda \neq 0. \tag{16}$$

Внаслідок заміни змінних (9) можна покласти $\lambda_0 = 0$. Підставивши (16) в (15), після розщеплення по u_{11} одержуємо

$$a = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_0 + d_1 = 0, \quad p_0 = 2b_1,$$
$$c + p_0 - b_1 = 0, \quad d - b_0 = 0, \quad d_0 = 0. \tag{17}$$

Розв'язок системи (17) визначає вигляд базисних елементів у випадку 4 теореми 1.

Випадок III. $F_{u_{11}u_{11}} \neq 0$. Диференціюючи друге рівняння системи (15) по u_{11}, після спрощення одержуємо

$$2aF_{u_{11}} - F_{u_{11}u_{11}}(2c_1 - b_{11} - 3au_{11}) = 0. \tag{18}$$

Оскільки $F_{u_{11}u_{11}} \neq 0$, то розділивши (18) на $F_{u_{11}u_{11}}$ і продиференціювавши по u_{11}, одержуємо

$$2a\left(\frac{F_{u_{11}}}{F_{u_{11}u_{11}}}\right)_{u_{11}} + 3a = 0 \tag{19}$$

Необхідно розглянути випадки $a = 0$ і $a \neq 0$. Якщо $a = 0$, то з системи (15) одержуємо випадки 2 та 3 теореми. Випадок 5 теореми одержуємо з (19), (15), якщо $a \neq 0$. Теорема доведена.

Теорема 1 уточнює результат, отриманий в [8]. Рівняння Бюргерса (3), як частинний випадок (6), включається у випадок 4 теореми 1.

Слід зазначити, що найбільш широку симетрію в класі рівнянь (6) (7-вимірна алгебра) має рівняння

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda(u_{(2)})^{1/3}. \tag{20}$$

Оператори $\langle P_0, P_1, G, R_1, R_2, R_3, R_4\rangle$, що визначають алгебру інваріантності (20), задовольняють наступні комутаційні співвідношення:

	P_0	P_1	G	R_1	R_2	R_3	R_4
P_0	0	0	P_1	$4P_0$	0	$2R_2$	R_3
P_1	0	0	0	$5P_1$	0	$-P_1$	$-G$
G	$-P_1$	0	0	G	P_1	G	0
R_1	$-4P_0$	$-5P_1$	$-G$	0	$-4R_2$	0	$4R_4$
R_2	0	0	$-P_1$	$4R_2$	0	$-2R_2$	$-R_3$
R_3	$-2R_2$	P_1	$-G$	0	$2R_2$	0	$-2R_4$
R_4	$-R_3$	$-G$	0	$-4R_4$	R_3	$2R_4$	0

Для зручності ми використовуємо таблиці для задання комутаційних співвідношень між базисними елементами алгебри Лі. Так, за допомогою наведеної вище таблиці визначаємо

$$[P_0, R_1] = 4P_0.$$

Наведемо скінченні перетворення, що відповідають операторам G, R_1, R_2, R_3, R_4:

$$G:\ \begin{aligned} t &\to \tilde{t} = t, \\ x &\to \tilde{x} = x + \theta t, \\ u &\to \tilde{u} = u + \theta, \end{aligned} \qquad R_1:\ \begin{aligned} t &\to \tilde{t} = t\exp(4\theta), \\ x &\to \tilde{x} = x\exp(5\theta), \\ u &\to \tilde{u} = u\exp(\theta), \end{aligned}$$

$$R_2:\ \begin{aligned} t &\to \tilde{t} = t, \\ x &\to \tilde{x} = x + \theta u, \\ u &\to \tilde{u} = u, \end{aligned} \qquad R_3:\ \begin{aligned} t &\to \tilde{t} = t, \\ x &\to \tilde{x} = x\exp(-\theta) + tu\exp(\theta), \\ u &\to \tilde{u} = u\exp(\theta), \end{aligned}$$

$$R_4:\ \begin{aligned} t &\to \tilde{t} = t, \\ x &\to \tilde{x} = x + \theta t(ut - x), \\ u &\to \tilde{u} = u + \theta(ut - x), \end{aligned}$$

θ — груповий параметр.

Наведемо точний розв'язок (20) (нижче вказується оператор, анзац, редуковане рівняння та отриманий внаслідок редукції та інтегрування редукованого рівняння розв'язок):

оператор: $R_3 = (2tu - x)\partial_x + u\partial_u$,

анзац: $xu - tu^2 = \varphi(t)$,

редуковане рівняння: $\varphi' = \lambda(2\varphi)^{1/3}$,

розв'язок:

$$xu - tu^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\lambda t + C\right)^{3/2} \tag{21}$$

Формула (21) задає сім'ю точних розв'язків рівняння (20) у неявному вигляді.

Теорема 2. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння* (7) *в залежності від* $F(u_{(3)})$ *є такі алгебри Лі*:

1) $\langle P_0, P_1, G\rangle$, *якщо* $F(u_{(3)})$ — *довільна*;

2) $\langle P_0, P_1, G, Y_3\rangle$, *якщо* $F(u_{(3)}) = \lambda(u_{(3)})^k$, $k = \mathrm{const}$; $k \neq 0$; $k \neq \dfrac{3}{4}$;

3) $\langle P_0, P_1, G, Y_4\rangle$, *якщо* $F(u_{(3)}) = \ln u_{(3)}$;

4) $\langle P_0, P_1, G, D, \Pi\rangle$, *якщо* $F(u_{(3)}) = \lambda(u_{(3)})^{3/4}$.

В умовах теореми $\lambda = \text{const}$, $\lambda \neq 0$,

$$Y_3 = (2k+1)\,t\,\partial_t + (2-k)\,x\,\partial_x + (1-3k)\,u\,\partial_u,$$

$$Y_4 = t\,\partial_t + \left(2x - \frac{5}{2}t^2\right)\partial_x + (u-5t)\,\partial_u.$$

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1. Рівняння Кортевега – де-Фріза (4), як частинний випадок (7), включається у випадок 2 теореми 2 при $k = 1$.

Теорема 3. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння* (8) *в залежності від* $F(u_{(4)})$ *є такі алгебри Лі:*

1) $\langle P_0, P_1, G \rangle$, *якщо* $F(u_{(4)})$ — *довільна*;

2) $\langle P_0, P_1, G, Y_5 \rangle$, *якщо* $F(u_{(4)}) = \lambda (u_{(4)})^k$, $k = \text{const}$; $k \neq 0$; $k \neq \frac{3}{5}$;

3) $\langle P_0, P_1, G, Y_6 \rangle$, *якщо* $F(u_{(4)}) = \ln u_{(4)}$;

4) $\langle P_0, P_1, G, D, \Pi \rangle$, *якщо* $F(u_{(4)}) = \lambda (u_{(4)})^{3/5}$

В умовах теореми $\lambda = \text{const}$, $\lambda \neq 0$,

$$Y_5 = (3k+1)\,t\,\partial_t + (2-k)\,x\,\partial_x + (1-4k)\,u\,\partial_u,$$

$$Y_6 = t\,\partial_t + \left(2x - \frac{7}{2}t^2\right)\partial_x + (u-7t)\,\partial_u.$$

Доведення теореми 3 аналогічне доведенню теореми 1. Теореми 1 – 3 дають повну симетрійну класифікацію рівнянь (6) – (8). На основі теорем 1 – 3 сформулюємо деякі узагальнення стосовно симетрії рівняння (1).

***Зауваження* 1.** Легко переконатися, що рівняння (1) при довільній функції $F(u_{(2)}, u_{(3)}, \ldots, u_{(n)})$ інваріантне відносно алгебри Галілея, яка визначається операторами P_0, P_1, G.

Проведемо тепер симетрійний аналіз наступного рівняння з класу (1):

$$u_{(0)} + u u_{(1)} = F(u_{(n)}). \tag{22}$$

Теорема 4. *Для довільного натурального* $n \geq 2$ *максимальною алгеброю інваріантності рівняння*

$$u_{(0)} + u u_{(1)} = \ln u_{(n)} \tag{23}$$

є 4-вимірна алгебра $\langle P_0, P_1, G, A_1 \rangle$, *де*

$$A_1 = t\,\partial_t + \left(2x - \frac{2n-1}{2}t^2\right)\partial_x + (u-(2n-1)\,t)\,\partial_u.$$

Теорема 5. *Для довільного натурального* $n \geq 2$ *максимальною алгеброю інваріантності рівняння*

$$u_{(0)} + u u_{(1)} = \lambda (u_{(n)})^k \tag{24}$$

є 4-вимірна алгебра $\langle P_0, P_1, G, A_2 \rangle$, *де*

$$A_2 = ((n-1)k+1)\,t\,\partial_t + (2-k)\,x\,\partial_x + (1-nk)\,u\,\partial_u,$$

k, λ — *дійсні константи*, $k \neq 0$, $k \neq \frac{3}{n+1}$, $\lambda \neq 0$, *при* $n = 2$ *додаткова умова* $k \neq 1/3$ (*див. випадок* 5 *теореми* 1).

Теорема 6. *Для довільного натурального* $n \geq 2$ *максимальною алгеброю інваріантності рівняння*

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda(u_{(n)})^{3/(n+1)}, \quad \lambda = \text{const}, \quad \lambda \neq 0, \tag{25}$$

є 5-вимірна алгебра

$$\langle P_0, P_1, G, D, \Pi \rangle. \tag{26}$$

***Зауваження* 2.** Якщо в (25) $n = 1$, то одержуємо рівняння

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \lambda(u_{(1)})^{3/2}. \tag{27}$$

Теорема 7. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння* (27) *є* 4*-вимірна алгебра* $\langle P_0, P_1, G, D \rangle$.

Доведення теорем 4 – 7 проводиться за допомогою алгоритму Лі.

***Зауваження* 3.** Досить цікавим є той факт, що (26) визначає алгебру інваріантності рівняння (25) для будь-якого натурального $n \geq 2$.

В таблиці наведено комутаційні співвідношення для операторів (26) :

	P_0	P_1	G	D	Π
P_0	0	0	P_1	$2P_0$	D
P_1	0	0	0	P_1	G
G	$-P_1$	0	0	$-G$	0
D	$-2P_0$	$-P_1$	G	0	2Π
Π	$-D$	$-G$	0	-2Π	0

***Зауваження* 4.** Оператори (26) визначають зображення узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1, 1)$ [5].

Скінченні групові перетворення, що відповідають операторам D, Π в зображенні (26), мають вигляд

$$\begin{aligned} D:\quad & t \to \tilde{t} = t\exp(2\theta), & \Pi:\quad & t \to \tilde{t} = \frac{t}{1-\theta t}, \\ & x \to \tilde{x} = x\exp(\theta), & & x \to \tilde{x} = \frac{x}{1-\theta t}, \\ & u \to \tilde{u} = u\exp(-\theta), & & u \to \tilde{u} = u + (x - ut)\theta, \end{aligned}$$

θ — груповий параметр.

Дослідимо інваріантність рівняння (1) відносно зображення (26). Вірне наступне твердження.

Теорема 8. *Рівняння* (1) *інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея* $AG_2(1, 1)$ (26) *тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = u_{(2)}F(\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_n), \tag{28}$$

де Φ — *довільна гладка функція,*

$$\omega_k = \frac{1}{u_{(2)}}(u_{(k)})^{3/(k+1)}, \quad u_{(k)} = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \quad k = 3, \ldots, n.$$

Доведення. Інваріантність рівняння (1) відносно групи Галілея очевидна. Вияснимо, при яких $F(u_{(2)}, u_{(3)}, \ldots, u_{(n)})$ рівняння (1) інваріантне відносно перетворень, що визначаються операторами D, Π. Використаємо алгоритм Лі. Подіявши n-м продовженням оператора Π на рівняння (1), одержимо

$$(x - tu)u_{(1)} + (-u - 3tu_{(0)} - u_{(1)}x) + (1 - 2tu_{(1)})u +$$
$$+ 3tu_{(2)}F_{u_{(2)}} + 4tu_{(3)}F_{u_{(3)}} + \ldots + (n+1)tu_{(n)}F_{u_{(n)}} = 0.$$

Врахувавши (1), після деяких спрощень одержимо на F лінійне неоднорідне рівняння в частинних похідних першого порядку

$$3u_{(2)}F_{u_{(2)}} + 4u_{(3)}F_{u_{(3)}} + \dots + (n+1)\,u_{(n)}F_{u_{(n)}} = 3F. \tag{29}$$

Загальний розв'язок (29) можна записати у вигляді

$$F = u_{(2)}\Phi(\omega_3, \omega_4, \dots, \omega_n), \tag{30}$$

де Φ — довільна гладка функція,

$$\omega_k = \frac{1}{u_{(2)}}(u_{(k)})^{3/(k+1)}, \quad u_{(k)} = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \quad k = 3, \dots, n.$$

Отже, якщо $F(u_{(2)}, u_{(3)}, \dots, u_{(n)})$ визначається згідно із співвідношеннями (30), то рівняння (1) буде інваріантним відносно оператора Π. А з співвідношення $[P_0, \Pi] = D$ випливає інваріантність рівняння (28) відносно оператора D. Теорема доведена.

До класу рівнянь (28) належить рівняння Бюргерса (3) (при $\Phi = \text{const}$) та рівняння (25). Рівняння (28) включає, як частинний випадок, наступне рівняння, яке можна трактувати як узагальнення рівняння Бюргерса та використовувати для опису хвильових процесів:

$$u_{(0)} + uu_{(1)} = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k (u_{(k)})^{3/(k+1)}, \tag{31}$$

де λ_k — довільні дійсні константи.

В таблиці наведені нееквівалентні одновимірні підалгебри для алгебри (26) та відповідні анзаци.

	Анзац
P_1	$u = \varphi(t)$
G	$u = \varphi(t) + xt^{-1}$
$P_0 = \alpha G,\ \alpha \in \mathbf{R}$	$u = \varphi\left(x - \frac{\alpha}{2}t^2\right) + \alpha t$
D	$u = t^{-1/2}\varphi(xt^{-1/2})$
$P_0 + \Pi$	$u = (t^2+1)^{-1/2}\varphi\left(\frac{x}{(t^2+1)^{1/2}}\right) + \frac{tx}{t^2+1}$

Розглянемо зображення узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ (26). Ми опишемо всі рівняння другого порядку, що інваріантні відносно

алгебри Галілея $AG(1,1) = \langle P_0, P_1, G\rangle$,

розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1) = \langle P_0, P_1, G, D\rangle$,

узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1) = \langle P_0, P_1, G, D, \Pi\rangle$.

Справедливі наступні твердження.

Теорема 9. *Рівняння другого порядку інваріантне відносно алгебри Галілея $AG(1,1)$ тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\Phi(u_1; u_{11}; u_0 + uu_1; u_{00}u_{11} - (u_{01})^2; u_{01} + uu_{11}) = 0, \tag{32}$$

де Φ— довільна функція.

Теорема 10. *Рівняння другого порядку інваріантне відносно розширеної алгебри Галілея* $AG_1(1,1)$ *тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\Phi\left(\frac{(u_{11})^2}{(u_1)^3};\ \frac{u_0+uu_1}{u_{11}};\ \frac{u_{11}u_{00}-(u_{01})^2}{(u_1)^4};\ \frac{u_{01}+uu_{11}}{(u_1)^2}\right) = 0, \tag{33}$$

де Φ — *довільна функція.*

Теорема 11. *Рівняння другого порядку інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея* $AG_2(1,1)$ *тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\Phi\left(\frac{(u_{00}u_{11}-(u_{01})^2+4u_0u_1u_{11}+2uu_{11}(u_1)^2-2u_{01}(u_1)^2-(u_1)^4)^3}{(u_{11})^8};\right.$$
$$\left.\frac{u_0+uu_1}{u_{11}};\ \frac{(u_{01}+uu_{11}+(u_1)^2)^3}{(u_{11})^4}\right) = 0, \tag{34}$$

де Φ — *довільна функція.*

Співвідношення (32)–(34) дають повний опис галілей-інваріантних рівнянь другого порядку (зображення алгебри Галілея та її розширень визначаються базисними операторами (26)).

На завершення наведемо результат симетрійної класифікації одного нелінійного рівняння гідродинамічного типу. В роботах [10, 11] запропоновано наступне узагальнення рівняння Нав'є–Стокса:

$$\lambda_1 L\bar{v} + \lambda_2 L(L\bar{v}) = F(\bar{v}^2)\,\bar{v} + \lambda_4 \nabla p, \tag{35}$$

де

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v^l \frac{\partial}{\partial x_l} + \lambda_3 \Delta, \quad l = 1, 2, 3,$$

$\bar{v} = (v^1, v^2, v^3)$, $v^l = v^l(t, \bar{x})$, $p = p(t, \bar{x})$, ∇ — градієнт, Δ — оператор Лапласа, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 — довільні дійсні параметри, $F(\bar{v}^2)$ — довільна гладка функція. В одновимірному скалярному випадку (при $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$) рівняння (35) має вигляд

$$\lambda_1 Lu + \lambda_2 L(Lu) = F(u), \tag{36}$$

де $u = u(t, x)$, $L \equiv \partial_t + u\partial_x$.

У тому випадку, коли $\lambda_2 = 0$ та $F(u) = 0$, рівняння (36) — рівняння простої хвилі. Якщо $\lambda_2 \neq 0$, то рівняння (36) можна переписати у вигляді

$$L(Lu) + \lambda Lu = F(u), \quad \lambda = \text{const}, \tag{37}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = F(u).$$

Очевидно, що при довільній $F(u)$ рівняння (37) інваріантне відносно двовимірної алгебри трансляцій, яка визначається операторами

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x. \tag{38}$$

Проведемо симетрійну класифікацію рівняння (37), тобто опишемо функції $F(u)$, при яких рівняння (37) допускає більш широкі алгебри Лі, ніж двовимірна алгебра трансляцій (38). Наведемо деякі класи точних розв'язків рівняння (37), що задаються неявно. Зрозуміло, що для дослідження симетрії рівняння (37) принципово різними будуть випадки $\lambda = 0$ та $\lambda \neq 0$. Якщо $\lambda \neq 0$, то завжди можна вважати $\lambda \equiv 1$ (існує заміна змінних), тому ми розглянемо випадки $\lambda = 0$ та $\lambda = 1$.

I. Розглянемо рівняння (37) у випадку $\lambda = 0$, тобто рівняння

$$L(Lu) = F(u). \tag{39}$$

Випадок 1.1. $F(u)$ — довільна неперервно диференційовна функція. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (39) у цьому випадку є двовимірна алгебра трансляцій (38).

Випадок 1.2. $F(u) = a\exp(bu)$, a, b — const, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $b \equiv 1$ (існує заміна змінних). Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) = a\exp(u). \tag{40}$$

є 3-вимірна алгебра з базисними операторами

$$P_0, \quad P_1, \quad Y = t\partial_t + (x - 2t)\partial_x - 2\partial_u. \tag{41}$$

Слід відмітити, що Y в (41) можна представити як лінійну комбінацію операторів дилатації та Галілея

$$Y = (t\partial_t + x\partial_x) - 2(t\partial_x + \partial_u) = D - 2G.$$

Оператори D та G комутують, тому перетворення, що відповідають Y, можна інтерпретувати як деяку композицію дилатаційних та галілеївських перетворень, тобто як композицію розтягу по t і x і перетворень Галілея, хоча розширена алгебра Галілея не є алгеброю інваріантності рівняння (40). Аналогічні результати справедливі і для інших випадків рівняння (37).

Випадок 1.3. $F(u) = a(u+b)^p$, a, b, p — const, $a \neq 0$, $p \neq 0$, $p \neq 1$. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) = a(u+b)^p$$

є 3-вимірна алгебра з базисними операторами

$$P_0, \quad P_1, \quad R = t\partial_t + \left(\frac{p-3}{p-1}x - \frac{2b}{p-1}t\right)\partial_x - \frac{2}{p-1}(u+b)\partial_u.$$

Випадок 1.4. $F(u) = au + b$, a, b — const, $a \neq 0$. Внаслідок заміни змінних завжди можна покласти $a \equiv 1$ або $a \equiv -1$. Розглянемо ці випадки.

a) Алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) = u + b$$

є 7-вимірна алгебра з базисними операторами

$$P_0, \quad P_1, \quad Y_1 = (x + bt)\partial_x + (u+b)\partial_u,$$

$$Y_2 = \operatorname{ch} t\,\partial_x + \operatorname{sh} t\,\partial_u, \qquad Y_3 = \operatorname{sh} t\,\partial_x + \operatorname{ch} t\,\partial_u,$$

$$Y_4 = \operatorname{ch} t\,\partial_t + (x+bt)\operatorname{sh} t\,\partial_x + ((x+bt)\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t)\partial_u,$$

$$Y_4 = \operatorname{sh} t\,\partial_t + (x+bt)\operatorname{ch} t\,\partial_x + ((x+bt)\operatorname{sh} t + b\operatorname{ch} t)\partial_u.$$

b) Алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) = -u + b$$

є 7-вимірна алгебра з базисними операторами

$$P_0, \quad P_1, \quad R_1 = (x - bt)\partial_x + (u - b)\partial_u,$$

$$R_2 = \cos t\,\partial_x - \sin t\,\partial_u, \qquad R_3 = \sin t\,\partial_x + \cos t\,\partial_u,$$

$$R_4 = -\cos t\,\partial_t + (x-bt)\sin t\,\partial_x + \big((x-bt)\cos t - b\sin t\big)\partial_u,$$

$$R_5 = \sin t\,\partial_t + (x-bt)\cos t\,\partial_x - \big((x-bt)\sin t + b\cos t\big)\partial_u.$$

Випадок 1.5. $F(u)=a$, $a=\mathrm{const}$. У випадку $a\neq 0$ (існує заміна змінних) не обмежуючи загальності можна покласти $a\equiv 1$. Тому окремо розглянемо випадки $a=0$ та $a=1$.

a) Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) = 0$$

є 10-вимірна алгебра з базисними операторами

$$\begin{gathered} P_0,\quad P_1,\quad G = t\partial_x + \partial_u,\quad D = t\partial_t + x\partial_x,\quad D_1 = x\partial_x + u\partial_u,\\ A_1 = \frac{1}{2}t^2\partial_t + tx\partial_x + x\partial_u,\quad A_2 = \frac{1}{2}t^2\partial_x + t\partial_u,\\ A_3 = u\partial_t + \frac{1}{2}u^2\partial_x,\quad A_4 = (tu-x)\partial_t + \frac{1}{2}tu^2\partial_x + \frac{1}{2}u^2\partial_u,\\ A_5 = (t^2u-2tx)\,\partial_t + \left(\frac{1}{2}t^2u^2 - 2x^2\right)\partial_x + (tu^2-2xu)\,\partial_u. \end{gathered} \tag{42}$$

b) Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) = 1$$

є 10-вимірна алгебра з базисними операторами

$$P_0,\quad P_1,\quad G = t\partial_x + \partial_u,\quad A_2 = \frac{1}{2}t^2\partial_x + t\partial_u,\quad B_1 = t\partial_t + 3x\partial_x + 2u\partial_u,$$

$$\begin{gathered} B_2 = \left(x - \frac{1}{6}t^3\right)\partial_x + \left(u - \frac{1}{2}t^2\right)\partial_u,\\ B_3 = \frac{1}{2}t^2\partial_t + \left(tx + \frac{1}{12}t^4\right)\partial_x + \left(x + \frac{1}{3}t^3\right)\partial_u,\\ B_4 = \left(u - \frac{1}{2}t^2\right)\partial_t + \left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{8}t^4\right)\partial_x + \left(tu - \frac{1}{2}t^3\right)\partial_u,\\ B_5 = \left(tu - x - \frac{1}{3}t^3\right)\partial_t + \left(\frac{1}{2}tu^2 - \frac{1}{2}t^2x - \frac{1}{24}t^5\right)\partial_x + \\ + \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}t^2u - tx - \frac{5}{24}t^4\right)\partial_u, \end{gathered} \tag{43}$$

$$\begin{gathered} B_6 = \left(t^2u - 2tx - \frac{1}{6}t^4\right)\partial_t + \left(\frac{1}{2}t^2u^2 - 2x^2 - \frac{1}{3}t^3x - \frac{1}{72}t^6\right)\partial_x + \\ + \left(tu^2 - 2xu + \frac{1}{3}t^3u - t^2x - \frac{1}{12}t^5\right)\partial_u. \end{gathered}$$

Слід відзначити, що підалгебри $\langle P_0, P_1, G\rangle$, $\langle A_1, -A_2, G\rangle$ та $\langle P_0, P_1, G\rangle$, $\langle B_3, -A_2, G\rangle$ в зображеннях (42) і (43) відповідно визначають два різних нееквівалентних зображення алгебри Галілея $AG(1,1)$.

II. Розглянемо рівняння (37) у випадку $\lambda\neq 0$ (вважаємо, що $\lambda\equiv 1$).

Випадок 2.1. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) + Lu = F(u),$$

якщо $F(u)$ — довільна функція, є 2-вимірна алгебра (38).

Випадок 2.2. $F(u) = au^3 - \frac{2}{9}u$, $a = \text{const}$, $a \neq 0$. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) + Lu = au^3 - \frac{2}{9}u$$

є 3-вимірна алгебра з базисними операторами

$$P_0, \quad P_1, \quad Z = \exp\left(\frac{1}{3}t\right)\left(\partial_t - \frac{1}{3}u\partial_u\right).$$

Випадок 2.3. $F(u) = au + b$, a, b — const, $a \neq 0$. Алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) + Lu = au + b$$

є 5-вимірна алгебра з базисними операторами

$$P_0, \quad P_1, \quad Z = \left(x + \frac{b}{a}t\right)\partial_x + \left(u + \frac{b}{a}\right)\partial_u,$$

а два інші оператори в залежності від значення константи a мають вигляд:

a) $a = -\frac{1}{4}$:

$$Z_2 = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\left(\partial_x - \frac{1}{2}\partial_u\right), \quad Z_3 = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\left(t\partial_x + \left(1 - \frac{1}{2}t\right)\partial_u\right);$$

b) $a > -\frac{1}{4}$, $a \neq 0$:

$$Z_4 = \exp(\alpha t)(\partial_x + \alpha\partial_u), \quad Z_5 = \exp(\beta t)(\partial_x + \beta\partial_u),$$

де

$$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{4a+1}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 + \sqrt{4a+1}}{2};$$

a) $a < -\frac{1}{4}$:

$$Z_6 = \exp(\gamma t)(\sin\delta t\,\partial_x + (\gamma\sin\delta t + \delta\cos\delta t)\partial_u),$$

$$Z_7 = \exp(\gamma t)(\cos\delta t\,\partial_x + (\gamma\cos\delta t - \delta\sin\delta t)\partial_u),$$

де

$$\gamma = -\frac{1}{2}; \quad \delta = \frac{\sqrt{-(4a+1)}}{2}.$$

Випадок 2.4. $F(u) = a$, $a = \text{const}$. Алгеброю інваріантності рівняння

$$L(Lu) + Lu = a$$

є 5-вимірна алгебра з базисними операторами

$$P_0, \quad P_1, \quad G = t\partial_x + \partial_u,$$

$$Q_1 = \left(x - \frac{a}{2}t^2\right)\partial_x + (u - at)\partial_u, \quad Q_2 = \exp(-t)(\partial_x - \partial_u).$$

Таким чином, проведена симетрійна класифікація рівняння (37) (описані максимальні алгебри інваріантності за виключенням випадків 1.4, 2.3, 2.4). Отримані нові, суттєво нелінійні, зображення алгебр Лі, зокрема нелінійні розширення алгебри Галілея $AG(1,1)$ (див. (42), (43)). Більш детальніше результати симетрійної класифікації рівняння (37) наведені в [12, 13].

У випадку, коли рівняння (37) має вигляд

$$L(Lu) + \lambda Lu = a, \quad a,\ \lambda = \mathrm{const}, \tag{44}$$

заміна змінних

$$t = \tau, \quad x = \omega + u\tau, \quad u = u \tag{45}$$

дає можливість побудови загального розв'язку (44) (детальніше див. [14]). Внаслідок заміни змінних (45)

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} \to \partial_\tau,$$

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} \to \frac{u_\tau}{1+\tau u_\omega}.$$

Рівняння (44) після виконання заміни матиме вигляд

$$\partial_\tau\left(\frac{u_\tau}{1+\tau u_\omega}\right) + \lambda\left(\frac{u_\tau}{1+\tau u_\omega}\right) = a. \tag{46}$$

Один раз проінтегрувавши рівняння (46) (необхідно врахувати випадки λ, $a = 0$, або $a \neq 0$), одержимо лінійне неоднорідне рівняння в частинних похідних першого порядку. Знайшовши перші інтеграли відповідної системи рівнянь характеристик і виконавши обернену заміну змінних, знайдемо розв'язки (44).

***Зауваження* 5.** Розв'язком рівняння $1 + \tau u_\omega = 0$ в змінних (t, x, u) є $x = f(t)$, де $f(t)$ — довільна функція, тому (44) в цьому особливому випадку еквівалентне звичайному диференціальному рівнянню.

Наведемо деякі класи побудованих нами розв'язків для (44):

1) $L(Lu) = 0$:

1.1) $x - ut + \dfrac{C}{2}t^2 = \varphi(u - Ct)$;

1.2) $u \pm \ln(x - ut \mp t) = \varphi(t^2 - (x - ut)^2)$;

1.3) $u + \dfrac{t(x-ut)^3}{t^2(x-ut)^2 - 1} = \varphi\left(t^2 - \dfrac{1}{(x-u\ldots}\right)$;

1.4) $u = \varphi\left(\dfrac{x-ut}{\exp(t^2)}\right) - \dfrac{x-ut}{\exp(t^2)}\displaystyle\int \exp(t^2)\,dt$;

2) $L(Lu) = a$:

$$x - ut + \frac{a}{3}t^3 + \frac{C}{2}t^2 = \varphi\left(u - \frac{a}{2}t^2 - Ct\right);$$

3) $L(Lu) + Lu = a$:

$$x - ut + C(t+1)\exp(-t) + \frac{a}{2}t^2 = \varphi(u + C\exp(-t) - at),$$

$C = \mathrm{const}$, φ — довільна функція.

***Зауваження* 6.** Вище наведені класи неявних розв'язків з однією довільною функцією. В загальному випадку розв'язки можна задавати в параметричній формі.

Отже, в статті побудовані нові нелінійні галілей-інваріантні узагальнення рівнянь Бюргерса та Кортевега – де-Фріза високого порядку. Описані одновимірні рівняння другого порядку, які інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея. Проведена симетрійна класифікація нелінійного одновимірного рівняння $L(Lu) + \lambda Lu = F(u)$, $L = \partial_t + u\partial_x$, одержано нові нелінійні розширення алгебри Галілея. Для $F(u) = \text{const}$ побудовані деякі класи неявних розв'язків.

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 624 с.
2. *Красильников В. А., Крылов В. А.* Введение в физическую акустику. – М.: Наука, 1984. – 400 с.
3. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. – М.: Наука, 1975. – 320 с.
4. *Sachdev P. L.* Nonlinear diffusive waves. – Cambridge: Cambridge Univ. press, 1987. – 246 p.
5. *Fushchych W., Shtelen W., Serov N.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Klüwer Acad. Publ., 1993. – 436 p.
6. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 581 с.
7. *Фущич В. І., Миронюк П. Й.* Умовна симетрія і точні розв'язки рівняння нелінійної акустики // Допов. АН УРСР. – 1991. – № 6. – С. 23–29.
8. *Serov N. I., Fushchych B. W.* On the new nonlinear equation with unique symmetry // Dopov. Nat. Akad. Nauk Ukrainy. – 1994. – № 9. – P. 49–50.
9. *Sionoid P. N., Cates A. T.* The generalized Burgers and Zabolotskaya – Khokhlov equations: transformations, exact solutions and qualitative properties // Proc. Royal Soc., Math. and Phys. – 1994. – **447**, № 1930. – P. 253–270.
10. *Fushchych W. I.* New nonlinear equation for electromagnetic field having the velocity different from *c* // Dopov. Akad. Nauk Ukrainy. – 1992. – № 1. – P. 24–27.
11. *Fushchych W. I.* Symmetry analysis, in: "Symmetry analysis of equations of mathematical physics". – Kiev: Inst. Math., 1992. – P. 5–6.
12. *Fushchych W. I., Boyko V. M.* Symmetry classification of the one-dimensional second order equation of hydrodynamical type. – 11 p. – (Preprint / Linköping University, Sweden; LiTH–MATH–R–95–19).
13. *Boyko V.* Symmetry classification of the one-dimensional second order equation of a hydrodynamical type // J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – **2**, № 3–4. – P. 418–424.
14. *Фущич В. І., Бойко В. М.* Пониження порядку та загальні розв'язки деяких класів рівнянь математичної фізики // Допов. НАН України. – 1996. – № 9. – С. 43–48.

Одержано 27.05.96