УДК 519.21

Д. В. Гусак (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОСНОВНІ ТОТОЖНОСТІ ДЛЯ АДИТИВНИХ НЕПЕРЕРВНО РОЗПОДІЛЕНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

For an additive sequence $\xi(n)$, we establish basic factorization identities and express the distributions of boundary functionals (extremal values of $\xi(n)$, the time and value of the first jump over a fixed level, etc.) in terms of the components of the factorization.

Для адитивної послідовності $\xi(n)$ встановлюються основні факторизаційні тотожності і в термінах компонент факторизації виражаються розподіли граничних функціоналів (екстремальні значення $\xi(n)$, момент і величина першого перестрибу через фіксований рівень та ін).

Вивчення граничних задач для випадкових блукань та процесів з незалежними приростами займає чільне місце в теорії ймовірностей. Список робіт, присвячених цим задачам, можна знайти в монографіях [1–4]. У випадку двовимірного випадкового блукання, визначеного двома послідовностями незалежних однаково розподілених випадкових величин $\eta: \eta_1, \eta_2, \ldots; \ \xi: \xi_1, \xi_2, \ldots$, коли η_k мають довільний неперервний розподіл, А. А. Боровков та Б. А. Рогозін [5] вивчали асимптотичну поведінку деяких сумісних розподілів для функціоналів процесу

$$\xi(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k, \quad \nu(t) = \sup\left\{n: \sigma_n = \sum_{k \le n} \eta_k < t\right\},$$

зокрема поведінку при $t \to \infty$ сумісних розподілів

$$\left\{\sup_{u \le t} \xi(u), \xi(t), \sigma_{\nu(t)+1}\right\}, \quad \left\{\sup_{u \le t} \xi(u), \xi(t), \sigma_{\nu(t)}\right\}.$$

Сумісний розподіл пари $\{\sup_{u \le t} \xi(u), \xi(t)\}$ вивчав Л. Такач [6]. В [7] розглядались адитивні послідовності

$$\xi(n) = S_{\nu(n)} = \sum_{k \le \nu(n)} \xi_k, \quad S_n = \sum_{k \le n} \xi_k,$$

коли η та ξ — цілозначні випадкові величини.

Тут ми розглядаємо випадок, коли $\eta_k > 0$ — цілозначні зі спільною твірною функцією (т. ф.) $g(t) = E t^{\eta}$, ξ_k — неперервно розподілені зі спільною характеристичною функцією (х. ф.) $\varphi(\alpha) = E e^{i\alpha\xi}$ та функцією розподілу $F(x) = P\{\xi < x\}$, $-\infty < x < +\infty$. Послідовність, що визначена сумами

$$S_n = \sum_{k \le n} \xi_k, \quad \sigma_n = \sum_{k \le n} \eta_k, \quad \nu(n) = \max\{k: \sigma_k \le n\},$$
$$\xi(n) = S_{\nu(n)}, \quad \xi(0) = 0, \quad n \ge 0, \tag{1}$$

назвемо адитивною.

Якщо η має геометричний розподіл

$$P\{\eta = k\} = (1 - \rho)\rho^{k-1}, \quad k \ge 1, \quad 0 < \rho < 1, \tag{2}$$

то число відновлень $\nu(n)$ має біноміальний розподіл і $\xi(n)$ називається однорідною адитивною послідовністю.

Якщо ж η має довільний дискретний розподіл, то $\xi(n) = S_{\nu(n)}$ назвемо неоднорідною адитивною послідовністю.

В однорідному випадку

$$\varphi_n(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} E e^{i\alpha\xi(n)} = \varphi_1^n(\alpha),$$

де

$$\varphi_1(\alpha) = E e^{i\alpha\xi_1'} = (1-\rho)\varphi(\alpha) + \rho,$$

$$\xi_1' = \begin{cases} \xi & \text{з імовірністю } 1-\rho; \\ 0 & \text{з імовірністю } \rho. \end{cases}$$

Якщо ε_t — геометрично розподілена випадкова величина:

$$P\{\varepsilon_t = k\} = (1-t)t^k, \quad k \geq 0, \quad 0 < t < 1,$$

то х. ф. для $\xi(\varepsilon_t)$ має вигляд

$$E e^{i\alpha\xi(\varepsilon_t)} = \frac{1-t}{1-t\varphi_1(\alpha)}. \tag{3}$$

В неоднорідному випадку на основі стохастичного співвідношення

$$\xi(n) \doteq \begin{cases} 0, & \eta > n; \\ \eta + \xi(n-\eta), & \eta \leq n, \end{cases}$$

виводиться аналог (3)

$$\varphi(t, \alpha) = E e^{i\alpha\xi(\varepsilon_t)} = \frac{1-g(t)}{1-\varphi(\alpha)g(t)}. \tag{4}$$

Якщо

$$g(t) = \frac{(1-\rho)t}{1-\rho t},$$

то після підстановки його в (4) одержимо (3) для однорідного випадку.

Якщо $P\{\eta = 1\} = 1$, то одержимо послідовність звичайних сум

$$\xi(n) = S_n = \sum_{k \leq n} \xi_k, \quad E e^{i\alpha S_n} = \varphi^n(\alpha).$$

Введемо позначення основних граничних функціоналів: екстремуми та їх доповнення, момент та величина першого перестрибу й інші:

$$\xi^+(n) = \max_{k \leq n} \xi(k); \quad \overline{\xi}(n) = \xi(n) - \xi^+(n),$$

$$\xi^-(n) = \min_{k \leq n} \xi(k); \quad \overline{\overline{\xi}}(n) = \xi(n) - \xi^-(n),$$

$$\tau^+(z) = \max\{k : \xi(k) > z\},$$

$$\gamma^+(z) = \xi(\tau^+(z) + 0) - z,$$

$$\gamma_+(z) = z - \xi(\tau^+(z) - 0),$$

$$\gamma_z^+ = \xi(\tau^+(z) + 0) - \xi(\tau^+(z) - 0).$$

Для геометрично розподілених $\varepsilon_t > 0$ використовуємо позначення

$$\xi^+(\varepsilon_t), \quad \overline{\xi}(\varepsilon_t), \quad \overline{\overline{\xi}}(\varepsilon_t); \qquad \varphi_\pm(t,\alpha) = E e^{i\alpha\xi^\pm(\varepsilon_t)}. \tag{5}$$

Позначимо через Φ_c клас функцій, що визначаються перетвореннями Фур'є функцій $V(x) \in L_1(-\infty, \infty)$:

$$v(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} V(x)\,dx,$$

$$\Phi_c = \{c + v(\alpha)\} \quad (\operatorname{Im}\alpha = 0,\ c \neq 0).$$

Відповідні підкласи позначимо

$$\Phi_c^\pm = \{c + v_\pm(\alpha)\}, \qquad v_\pm(\alpha) = \pm\int_0^{\pm\infty} e^{i\alpha x} V(x)\,dx.$$

Позначимо знаменник в (4) через $k(t, \alpha)$:

$$k(t,\alpha) = 1 - \varphi(\alpha) g(t) \quad (\varphi(\alpha) = E e^{i\alpha\xi},\ g(t) = E t^\eta),$$

$$k_*(t,\alpha) = \frac{k(t,\alpha)}{k(t,0)} = \frac{k(t,\alpha)}{1 - g(t)} \in \Phi_c, \qquad k_*(t,0) = 1,$$

і скористаємось позначенням операцій проектування

$$\left[c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} V(x)\,dx\right]_+^0 = c + \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} V(x)\,dx,$$

$$\left[c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} V(x)\,dx\right]_\pm = \pm\int_0^{\pm\infty} e^{i\alpha x} V(x)\,dx,$$

$$[c + v(\alpha)]_+^0 + [c + v(\alpha)]_- = c + v(\alpha).$$

Лема 1. *Функція $k_*(t,\alpha)$ допускає факторизацію*

$$k_*(t,\alpha) = k_*^+(t,\alpha) k_*^-(t,\alpha), \quad \operatorname{Im}\alpha = 0,\ 0 < t < 1, \tag{6}$$

де

$$k_*^\pm(t,\alpha) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} E[t^{\sigma_n}(1 - e^{i\alpha S_n}), \pm S_n > 0]\right\}.$$

Доведення випливає з співвідношень

$$k(t,\alpha) = \exp\{\ln[1 - g(t)\varphi(\alpha)]\} = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E[g(t)\varphi(\alpha)]^n\right\} =$$

$$= k_+(t,\alpha) k_0(t) k_-(t,\alpha), \qquad \operatorname{Im}\alpha = 0,$$

$$k_\pm(t,\alpha) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E[t^{\sigma_n} e^{i\alpha S_n}, \pm S_n > 0]\right\},$$

$$k_0(t) = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E[t^{\sigma_n}, S_n = 0]\right\}.$$

Теорема 1. *Х. ф.* $\varphi(t,\alpha)$ *допускає факторизацію*

$$\varphi(t,\alpha) = \varphi_+(t,\alpha)\varphi_-(t,\alpha), \qquad \operatorname{Im}\alpha = 0, \tag{7}$$

$$\varphi_\pm(t,\alpha) = E\,e^{i\alpha\xi^\pm(\varepsilon_t)} = \left[k_*^+(t,\alpha)\right]^{-1} \in \Phi_c^+. \tag{8}$$

Доведення. Із стохастичного зображення

$$\tau^+(z) \doteq \begin{cases} \eta, & \xi > z; \\ \eta + \tau^+(z-\xi), & \xi \le z, \end{cases}$$

виводиться рівняння для

$$B_+(t,z) = E\left[t^{\tau^+(z)}, \tau^+(z) < \infty\right] = P\{\xi^+(\varepsilon_t) > z\},$$

яке після відповідних перетворень набуває вигляду

$$\varphi(t,\alpha)\left(1 - \varphi(\alpha)g(t)\right) = g_c^-(t,\alpha), \quad g_c^-(t,\alpha) \in \Phi_c^-. \tag{9}$$

Пристосовуючи результати М. Г. Крейна з [8] до рівняння (9) та використовуючи факторизаційну тотожність (6), знаходимо розв'язок для (9) у вигляді

$$\varphi_+(t,\alpha) = \frac{k_+(t,0)}{k_+(t,\alpha)} = \left[k_*^+(t,\alpha)\right]^{-1} \in \Phi_c^+.$$

Аналогічно встановлюється рівняння для $B_-(t,z) = P\{\xi^-(\varepsilon_t) < z\}$ і після відповідних перетворень знаходимо

$$\varphi_-(t,\alpha) = \frac{k_-(t,0)}{k_-(t,\alpha)} = \left[k_*^-(t,\alpha)\right]^{-1} \in \Phi_c^-.$$

На підставі одержаних співвідношень (8) із (6) виводимо (7), яке вважатимемо першою основною факторизаційною тотожністю, через компоненти якої визначаються х. ф. екстремумів: $\varphi_\pm(t,\alpha) = E\,e^{i\alpha\xi^\pm(\varepsilon_t)}$.

В однорідному випадку $(g(t) = (1-\rho)t/(1-\rho t))$ компоненти факторизації в (6) мають вигляд

$$k_*^\pm(t,\alpha) = \exp\left\{\sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{n} E(1 - e^{i\alpha S_n^1}),\ \pm S_n^1 > 0\right\}. \tag{10}$$

Отже, компоненти $\varphi_\pm(t,\alpha)$ з (7) виражаються в термінах (10), де залежність від η зводиться до залежності лише від параметра ρ, що має ймовірнісну інтерпретацію

$$\xi_k' = \begin{cases} \xi_k & \text{з імовірністю } 1-\rho; \\ 0 & \text{з імовірністю } \rho. \end{cases}$$

Введемо ще одну показниково розподілену випадкову величину θ_μ, $\mu > 0$, $P\{\theta_\mu > t\} = e^{-\mu t}$, і доведемо другу факторизаційну тотожність, пов'язану з сумісним розподілом $\{\tau^+(z), \gamma^+(z)\}$. Надалі припускаємо, що $E\xi$ та $D\xi$ обмежені.

Теорема 2. *При умові* $E|\xi(1)| < \infty$ *справедливі такі співвідношення:*

$$E\left[e^{-\upsilon(\xi^+(\varepsilon_u)-z)}, \xi^+(\varepsilon_u) > z\right] = E\,e^{-\upsilon\xi^+(\varepsilon_u)} E\left[u^{\tau^+(z)} e^{-u\gamma^+(z)}, \tau^+(z) < \infty\right], \tag{11}$$

$$E\left[u^{\tau^+(\theta_\mu)} e^{-\upsilon\gamma^+(\theta_\mu)}, \tau^+(\theta_\mu) < \infty\right] = \frac{\mu}{\mu - \upsilon}\left[1 - Ee^{-\mu\xi^+(\varepsilon_u)} \frac{1}{Ee^{-\upsilon\xi^+(\varepsilon_u)}}\right]. \tag{12}$$

Доведення. На основі стохастичного зображення

$$\tau^+(x+z) \doteq \begin{cases} \tau^+(z), & \gamma^+(z) \geq x; \\ \tau^+(z) + \tau^+(x - \gamma^+(z)), & \gamma^+(z) < x, \end{cases}$$

легко виводиться рівняння для $B_+(u, x) = P\{\xi^+(\varepsilon_u) > x\}$:

$$B_+(u, x+z) = B_+(u, z) - E[u^{\tau^+(z)}, \gamma^+(z) < x] +$$

$$+ \int_0^\infty P\{\xi^+(\varepsilon_u) < x - y\} E[u^{\tau^+(z)}, \gamma^+(z) \in dy].$$

Після відповідних перетворень з цього рівняння виводиться співвідношення (11), з якого випливає формула (12). Для $\upsilon = 0$ знаходимо

$$E[u^{\tau^+(\theta_\mu)}, \tau^+(\theta_\mu) < \infty] = 1 - E e^{-\mu \xi^+(\varepsilon_u)}.$$

Співвідношення (12) називаємо другою факторизаційною тотожністю.

Наслідок. *Сумісна твірна функція для* $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ *має вигляд*

$$E[u^{\tau^+(0)} e^{-\upsilon \gamma^+(0)}, \tau^+(0) < \infty] = 1 - P_+^0(u) \; (E e^{-\upsilon \xi^+(\varepsilon_u)})^{-1}, \tag{13}$$

$$P_+^0(u) = P\{\xi^+(\varepsilon_u) = 0\}.$$

Доведення випливає з (12) після граничного переходу $\mu \to \infty$.

Розглянемо сумісний розподіл

$$P_z(n, x) = P\{\xi(u) < z + x;\; \xi^+(u) < x\}, \quad z \geq 0,\; x < 0,$$

$$P_z(n, x) = P_z(n, 0), \quad x \geq 0,\; z > 0.$$

З раніше використаних стохастичних зображень для $\xi(n)$ та $\tau^+(z)$ виводимо рівняння

$$P_z(n, x) = P\{\eta > n,\; 0 < z + x\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} g_k \int_{-\infty}^{z} P_{z-y}(n-k, x)\, dF(y), \quad g_k = P\{\eta = k\}.$$

Після твірного перетворення одержимо

$$\tilde{P}_z(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\xi(\varepsilon_t) < z + x;\; \xi^+(\varepsilon_t) < z\} =$$

$$= (1 - g(t))\, \delta(0 < z + x) + g(t) \int_{-\infty}^{z} \tilde{P}_{z-y}(t, x)\, dF(y), \quad x \leq 0. \tag{14}$$

Введемо інтегральні перетворення на півосі

$$P(t, w, z) = \int_{-\infty}^{0} e^{wx}\, d\tilde{P}_z(t, x),$$

$$\tilde{P}(t, w, \alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha z} E\left[e^{w(\xi(\varepsilon_t) - z)}, \xi^+(\varepsilon_t) < z\right]$$

і доведемо твердження.

Теорема 3. *Сумісний розподіл пари* $\{\xi(\varepsilon_t), \xi^+(\varepsilon_t)\}$ *визначається співвідношенням*

$$\tilde{P}(t, w, \alpha) = \frac{1}{w - i\alpha} E e^{i\alpha\xi^+(\varepsilon_t)} E e^{w\xi^-(\varepsilon_t)}, \tag{15}$$

а пари $\{\xi^+(\varepsilon_t), \overline{\xi}(\varepsilon_t)\}$ — *співвідношенням*

$$E e^{i\alpha\xi^+(\varepsilon_t) + w\overline{\xi}(\varepsilon_t)} = E e^{i\alpha\xi^+(\varepsilon_t)} E e^{w\xi^-(\varepsilon_t)}. \tag{16}$$

Доведення. Після інтегрального перетворення відносно z рівняння (14) набуває вигляду

$$\tilde{P}(t, w, \alpha) = \frac{1 - g(t)}{w - i\alpha} + g(t)\{\varphi(\alpha)\tilde{P}(t, w, \alpha) - [\varphi(\alpha)\tilde{P}(t, w, \alpha)]_-\}.$$

Застосовуючи факторизаційну тотожність (7), знаходимо

$$\tilde{P}(t, w, \alpha) = \varphi_+(t, \alpha)\left[\varphi_-(t, \alpha)\frac{1}{w - i\alpha}\right]_+,$$

звідки випливає (15). Беручи до уваги, що

$$\tilde{P}(t, w, \alpha) = \frac{1}{w - i\alpha} E e^{i\alpha\xi^+(\varepsilon_t) + w\overline{\xi}(\varepsilon_t)},$$

з (15) знаходимо, що співвідношення (16) справедливе.

Аналогічно можна довести, що

$$E e^{i\alpha\overline{\overline{\xi}}(\varepsilon_t) + w\xi^-(\varepsilon_t)} = E e^{i\alpha\xi^+(\varepsilon_t)} E e^{w\xi^-(\varepsilon_t)}. \tag{17}$$

Порівнюючи (16) і (17), знаходимо, що $\xi^+(\varepsilon_t)$ та $\overline{\overline{\xi}}(\varepsilon_t)$ ($\xi^-(\varepsilon_t)$ та $\overline{\xi}(\varepsilon_t)$) мають ідентичні розподіли.

Для функціоналу

$$T_+(n) = \inf\{k : \xi(k) = \xi^+(k)\},$$

що визначає момент першого досягнення максимуму, справедлива наступна теорема.

Теорема 4. *Сумісний розподіл* $\{\xi(n), \overline{\xi}(n), T_+(n)\}$ *визначається співвідношенням*

$$E\left[e^{i\alpha\xi(\varepsilon_t) + i\beta\overline{\xi}(\varepsilon_t)} u^{T_+(\varepsilon_t)}\right] = \frac{P_+^0(t)}{P_+^0(tu)} E e^{i\alpha\xi^+(\varepsilon_{tu})} E e^{i(\alpha+\beta)\overline{\xi}(\varepsilon_t)}. \tag{18}$$

При $\alpha = -\beta = iv$

$$E[u^{T_+(\varepsilon_t)} e^{-v\xi^+(\varepsilon_t)}] = \frac{P_+^0(t)}{P_+^0(tu)} e^{-v\xi^+(\varepsilon_{ut})}. \tag{19}$$

Доведення основане на рівнянні

$$T_t(\alpha, \beta, u) \overset{\text{def}}{=} E e^{i\alpha\xi(\varepsilon_t) + i\beta\overline{\xi}(\varepsilon_t)} u^{T_+(\varepsilon_t)} =$$

$$= E[e^{i(\alpha+\beta)\xi(\varepsilon_t)}, \xi^+(\varepsilon_t) = 0] + T_t(\alpha, \beta, u) E[e^{i\alpha\gamma^+(0)}(tu)^{\tau^+(0)}],$$

яке виводиться з очевидних стохастичних співвідношень

$$\xi(n) \doteq \gamma^+(0) + \xi(n - \tau^+(0)),$$

$$\xi^+(n) \doteq \gamma^+(0)+\xi^+(n-\tau^+(0)),$$

$$T_+(n) \doteq \tau^+(0)+T_+(n-\tau^+(0)).$$

З (19) для $v=0$ знаходимо

$$E\,u^{T_+(\varepsilon_t)} = \frac{\varphi_+(t, i\infty)}{\varphi_+(tu, i\infty)} = \frac{P_+^0(t)}{P_+^0(tu)}. \tag{20}$$

Щодо двовимірного випадкового блукання спочатку розглянемо пару

$$\left\{\xi(n)=S_{\nu(n)},\ \eta(n)=\sum_{k\le\nu(n)}\eta_k\right\}$$

і відповідну трійку функціоналів

$$\{\,\overline{\xi}(n), \xi^+(n), \eta\,(n)\}$$

з сумісною т. ф.

$$a(u, v, t, \alpha) = E\left[e^{u\overline{\xi}(\varepsilon_t)+i\alpha\xi^+(\varepsilon_t)}v^{\eta(\varepsilon_t)}\right].$$

Теорема 5. *При умові* $E|\xi(1)|<\infty$

$$a(u, v, t, \alpha) = E v^{\eta(\varepsilon_t)} E\, e^{i\alpha\xi^+(\varepsilon_t)} E\, e^{u\xi^-(\varepsilon_t)}. \tag{21}$$

Доведення. Для сумісного розподілу

$$A_n(z, x, v) = E[v^{\eta(n)}, \xi(n)<z+x, \xi^+(n)<z]$$

на основі відповідних стохастичних зображень виводиться рівняння

$$A_n(z, x, v) = P\{\eta>n,\ z+x>0\}+$$

$$+\ g(vt)\int_{-\infty}^{z}\sum_{k\le n} g_k v^k A_{n-k}(z-y, x, v)\,dF(y). \tag{22}$$

Позначимо

$$a_t(z, x, v) = E[v^{\eta(\varepsilon_t)}, \xi(\varepsilon_t)<x+z, \xi^+(\varepsilon_t)<z]\,,$$

$$\tilde{a}_t(z, u, v) = E[v^{\eta(\varepsilon_t)}e^{u(\xi(\varepsilon_t)-z)}, \xi^+(\varepsilon_t)<z]\,,$$

$$A(u, v, t, \alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha z}\tilde{a}_t(z, u, v)\,dz.$$

Після відповідних перетворень з (22) одержимо рівняння

$$a_t(z, x, v) = (1-g(t))\delta(x+z>0)+$$

$$+\ g(vt)\int_{-\infty}^{z} a_t(z-y, x, v)\,dF(y), \quad z>0,$$

яке можна продовжити відносно z на всю пряму $(-\infty<z<\infty)$:

$$a_t(z, x, v) - g(vt)\int_{-\infty}^{z} a_t(z-y, x, v)\,dF(y) =$$

$$= (1-g(t))\delta(x+z>0) + C_z^-(t,x,v),$$

$$a_t(z,x,v) = 0 \text{ при } z<0, \qquad C_z^-(t,x,v) = 0 \text{ при } z>0.$$

Для $\tilde{a}_t$ після інтегрального перетворення відносно x це рівняння набуває вигляду

$$\tilde{a}_t(z,u,v) - g(vt)\int_{-\infty}^{z}\tilde{a}_t(z-y,u,v)\,dF(y) = (1-g(t))e^{-uz} + \tilde{C}_z^-(t,u,v).$$

А після перетворення Фур'є відносно z і застосування проективно-факторизаційних процедур одержуємо співвідношення

$$A(u,v,t,\alpha) = Ev^{\eta(\varepsilon_t)}\varphi_+(vt,\alpha)\varphi_-(vt-iu)(u-i\alpha)^{-1},$$

з якого випливає формула (21).

Позначимо положення суми $\sigma_{(\cdot)}$ після виходу через рівень n через $\eta_*(n) = \sigma_{\nu(n)+1}$ ($\eta(n) = \sigma_{\nu(n)}$ визначає положення $\sigma_{(\cdot)}$ до виходу). Тоді можна довести наступну теорему.

Теорема 6. *При умові*

$$Ee^{i\alpha\xi(\varepsilon_t)}v^{\eta(\varepsilon_t)} = \frac{1-g(t)}{1-g(vt)\varphi(\alpha)}, \tag{23}$$

$$Ee^{i\alpha\xi(\varepsilon_t)}v^{\eta_*(\varepsilon_t)} = \frac{g(v)-g(vt)}{1-g(vt)\varphi(\alpha)}. \tag{24}$$

В однорідному випадку

$$Ee^{i\alpha\xi(\varepsilon_t)}v^{\eta(\varepsilon_t)} = \frac{1-t}{1-t\rho}\,\frac{1-vt\rho}{1-vt\varphi_1(\alpha)}, \tag{25}$$

$$Ee^{i\alpha\xi(\varepsilon_t)}v^{\eta_*(\varepsilon_t)} = \frac{v(1-t)(1-\rho)}{(1-\rho v)(1-vt\varphi_1(\alpha))}. \tag{26}$$

Доведення основане на очевидних стохастичних співвідношеннях

$$\eta(n) \doteq \begin{cases} 0, & \eta>n; \\ \eta+\eta(n-\eta), & \eta\le n, \end{cases} \qquad \eta_*(n) \doteq \begin{cases} \eta, & \eta>n; \\ \eta+\eta_*(n-\eta), & \eta\le n. \end{cases}$$

Для однорідного випадку формули (25) та (26) випливають з (23) та (24) після підстановки

$$g(t) = \frac{(1-\rho)t}{1-\rho t}.$$

Щоб одержати сумісні розподіли трійок

$$\{\overline{\xi}(n),\xi^+(n),\eta(n)\}, \quad \{\xi(n),\xi^+(n),\eta(n)\},$$
$$\{\overline{\xi}(n),\xi^+(n),\eta_*(n)\}, \quad \{\xi(n),\xi^+(n),\eta_*(n)\},$$

необхідно довести рівняння для їхніх т. ф. Виявляється, що ці рівняння мають спільну ядрову функцію

$$k(t,v,\alpha) = 1-g(tv)\varphi(\alpha),$$

факторизація якої виражається в термінах компонент (див. (6)). Саме тому аналогічно до (21) доводиться, що

$$E v^{\eta_*(\varepsilon_t)} e^{u\bar{\xi}(\varepsilon_t)+i\alpha\xi^+(\varepsilon_t)} = E v^{\eta_*(\varepsilon_t)} E e^{i\alpha\xi^+(\varepsilon_{tv})} E e^{u\xi^-(\varepsilon_{tv})}. \tag{27}$$

Аналогічно доводиться, що

$$E v^{\eta(\varepsilon_t)} e^{i\alpha\xi(\varepsilon_t)} e^{i\beta\xi^+(\varepsilon_t)} = E v^{\eta(\varepsilon_t)} E e^{i(\alpha+\beta)\xi^+(\varepsilon_{tv})} E e^{i\alpha\xi^-(\varepsilon_{tv})}, \tag{28}$$

$$E v^{\eta_*(\varepsilon_t)} e^{i\alpha\xi(\varepsilon_t)+i\beta\xi^+(\varepsilon_t)} = E v^{\eta_*(\varepsilon_t)} E e^{i(\alpha+\beta)\xi^+(\varepsilon_{tv})} E e^{i\alpha\xi^-(\varepsilon_{tv})}. \tag{29}$$

Зауважимо, що при умові

$$E|\xi(1)| < \infty, \quad E\xi < 0, \quad D\xi < \infty \tag{30}$$

невироджені розподіли абсолютних максимумів для $\xi(n)$ та S_n збігаються:

$$\xi^+ = \sup_{n<\infty} \xi(n), \qquad S^+ = \sup_{n<\infty} S_n \,(S^+ \doteq \xi^+),$$

бо згідно з (6) та (7)

$$E e^{i\alpha\xi^+} = E e^{i\alpha S^+} =$$

$$= \lim_{t\to 1} \left[k_*^+(t,\alpha)\right]^{-1} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E\left[(e^{i\alpha S_n} - 1), S_n > 0\right]\right\}. \tag{31}$$

При умові (30) із (12) можна одержати граничний розподіл перестрибу $\gamma^+ = \lim_{x\to+\infty}\gamma^+(x)$ через нескінченно віддалений рівень шляхом граничного переходу $(\mu \to 0, u \to 1)$ в еквівалентному до (12) співвідношенні

$$\frac{1}{\mu} E\left[e^{-v\gamma^+(\theta_\mu)}\left(1 - e^{-\mu\xi^+(\varepsilon_u)}\right)\right] = \frac{1}{\mu - v}\left[1 - E e^{-\mu\xi^+(\varepsilon_u)}\left(E e^{-v\xi^+(\varepsilon_u)}\right)^{-1}\right].$$

Після граничного переходу знаходимо

$$E\left[\xi^+ e^{-v\gamma^+}\right] = \left[1 - E e^{-v\xi^+}\right] \quad \left(v E e^{-v\xi^+}\right)^{-1}, \tag{32}$$

при цьому

$$\lim_{t\to 1} P\{\xi^+(\varepsilon_t) = 0\} = P\{\xi^+ = 0\} = \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{S_n > 0\}\right\}. \tag{33}$$

Кілька слів про деякі частинні випадки.

1. $E[e^{i\alpha\xi}, \xi > 0] = a p_+ (a - i\alpha)^{-1}, \quad a > 0, \; p_+ > 0.$

В цьому випадку з (7) можна вивести, що

$$\varphi_+(t,\alpha) = p_+^0(t) \frac{a - i\alpha}{a p_+^0(t) - i\alpha} \quad \left(p_+^0(t) = P\{\xi^+(\varepsilon_t) = 0\}\right). \tag{34}$$

Тоді з (12) випливає

$$E\left[e^{-v\gamma^+(\theta_\mu)} u^{\tau^+(\theta_\mu)}, \tau^+(\theta_\mu) < \infty\right] = \frac{\mu}{a+v} \frac{a(1 - p_+^0(u))}{a p_+^0(u) + \mu}, \tag{35}$$

$$E\left[e^{-v\gamma^+(\theta_\mu)}, \tau^+(\theta_\mu) < \infty\right] = \frac{\mu}{a+v} \frac{a(1 - p_+^0(1))}{a p_+^0(1) + \mu}. \tag{36}$$

При цьому $p_+^0(1) = 0$, якщо $E\xi \geq 0$, $p_+^0(1) > 0$, якщо $E\xi < 0$. Тоді з (34) для $\xi^+(\varepsilon_t)$ після обернення одержимо співвідношення

$$P\{\xi^+(\varepsilon_t) > x\} = (1 - p_+^0(t))\, e^{-xap_+^0(t)}, \quad x > 0. \tag{37}$$

2. $E[e^{i\alpha\xi}, \xi < 0] = p_- b(b + i\alpha)^{-1}, \quad b > 0, \ p_- > 0.$
В цьому випадку аналогічно до (34) доводиться, що

$$\varphi_-(t, \alpha) = p_-^0(t)(b + i\alpha)(b\, p_-^0(t) + i\alpha) \quad (p_-^0(t) = P\{\xi^-(\varepsilon_t) = 0\}), \tag{38}$$

отже,

$$P\{\xi^-(\varepsilon_t) < x\} = q_-^0(t) e^{xap_-^0(t)}, \quad x < 0, \ q_-^0(t) = 1 - p_-^0(t). \tag{39}$$

Для розподілу $\xi^+(\varepsilon_t)$ встановлюється співвідношення

$$b_+(t, \alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} P\{\xi^+(\varepsilon_t) > x\}\, dx =$$

$$= g(t)(1 - g(t))^{-1} \varphi_+(t, \alpha)\, l_+(t, \alpha), \tag{40}$$

в якому $l_+(t, \alpha)$ є одностороннім перетворенням Фур'є функції

$$L_+(t, x) = \overline{F}(x) p_-^0(t) + \int_{-\infty}^0 \overline{F}(x - y) q_-^0(t) e^{bp_-^0(t)y} dy,$$

$$\varphi_+(t, \alpha) = \frac{1 - g(t)}{1 - i\alpha l_+(t, \alpha) - g(t)}, \qquad \overline{F}(x) = 1 - F(x), \quad x > 0.$$

При одночасному виконанні умов 1 і 2 $L_+(t, x) = c(t) e^{-ax}$, $x > 0$. Отже, $l_+(t, \alpha)$ і $\varphi_\pm(t, \alpha)$ — дробово-лінійні функції відносно $i\alpha$.

1. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 367 с.
2. *Королюк В. С., Братийчук Н. С., Пирджанов Б.* Граничные задачи для случайных блужданий. – Ашхабад: Ылым, 1987. – 256 с.
3. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 264 с.
4. *Такач Л.* Комбинаторные методы в теории случайных процессов. – М.: Мир, 1971. – 264 с.
5. *Боровков А. А., Рогозин Б. А.* Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. – 1964. – **9**, № 3. – С. 401–430.
6. *Takàcs L.* On the distribution of the supremum for stochastic processes // Ann. Inst. H. Poincarè B. – 1970. – **6**, № 3. – P. 237–247.
7. *Gusak D. V.* Fundamental identities for boundary functionals of additive sequences // Exploring Stochastic Laws. VSP. – Utrecht, 1995. – P. 135–146.
8. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полуоси с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, № 5. – С. 3–120.

Одержано 21.02.96