УДК 517.9

И. П. Мельниченко, С. А. Плакса (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ И АЛГЕБРЫ МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА. II*

We obtain a new representation of potential and flow functions for space potential solenoidal fields with axial symmetry. We study principal algebraic-analytical properties of monogenic functions of vector variable with values in an infinite-dimensional Banach algebra of even Fourier series and describe the relationship between these functions and the axially symmetric potential and Stokes flow function. The suggested method for the description of the above-mentioned fields is an analog of the method of analytic functions in the complex plane for the description of plane potential fields.

Одержано нові зображення потенціалу та функції течії для просторових потенціальних соленоїдальних полів з осьовою симетрією. Вивчено основні алгебраїчно-аналітичні властивості моногенних функцій векторного аргументу зі значеннями в нескінченновимірній банаховій алгебрі парних рядів Фур'є та встановлено зв'язок цих функцій з осесиметричним потенціалом і функцією течії Стокса. Запропонований підхід до опису вказаних полів є аналогом апарату аналітичних функцій у комплексній площині при опису плоских потенціальних полів.

Данная работа является продолжением работы [1] и имеет общие с ней обозначения, нумерацию пунктов, формул, лемм и теорем.

2. Перейдем к формулировке теорем о представлении решений системы (1) и уравнений (3), (4) во внешности замыкания $\overline{D}$ правильных в направлении оси Oy областей D, имеющих произвольную границу (т. е. граница может быть и неспрямляемой кривой). При этом будут рассмотрены случаи как ограниченной, так и неограниченной области D.

Теорема 8. *Пусть область D ограничена. Тогда каждой голоморфной в $\mathbb{C}\setminus\overline{D}_z$ функции $F\colon \mathbb{C}\setminus\overline{D}_z \to \mathbb{C}$ соответствует пара $\varphi(x,y), \psi(x,y)$ решений системы* (1) *в* $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$:

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt & \text{при}\quad y\neq 0;\\ -F(x) & \text{при}\quad y=0,\ x<m_D;\\ F(x) & \text{при}\quad y=0,\ x>M_D,\end{cases}\tag{32}$$

$$\psi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma F(t)\left(1-\frac{t-x}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\right)dt & \text{при}\quad y\neq 0;\\ 0 & \text{при}\quad y=0,\ x<m_D;\\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_\gamma F(t)\,dt & \text{при}\quad y=0,\ x>M_D,\end{cases}\tag{33}$$

где $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$, $z=x+iy$, γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая, которая ограничивает правильную в направлении мнимой оси область D'_z такую, что $\overline{D}_z\subset D'_z$ и $z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D'_z}$. При этом функции (32), (33) *являются соответственно решениями уравнений* (3), (4) *при* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$.

Доказательство. В качестве γ можно взять, по крайней мере, границу области

* Выполнена при частичной поддержке Международных научных фондов (гранты № UB 4000 ISF и 94-1474 INTAS) и Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий (грант № 11.3/12).

$$\{ t \in \mathbb{C} : |t| < N, \ |t - x - i\eta| > \varepsilon \ \forall \eta \in (-\infty, -|y|] \cup [|y|, \infty) \}$$

при $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, $y \neq 0$, а при $(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, $x > M_D$ — границу области

$$\left\{ t \in \mathbb{C} : |t| < N, \ \mathrm{Re}\, t < \frac{1}{2}(x + M_D) \right\},$$

где

$$N = 2 \max \left\{ |x| + |y|, \ \max_{t \in \overline{D}_z} |t| \right\}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{2} \min \left\{ |y|, \ \min_{t \in \overline{D}_z} |t - z| \right\}.$$

Тогда утверждение теоремы следует из теоремы 1 [1].

Замечание. Очевидно, что если голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$ функция F: $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию $\int_\Gamma F(t)\, dt = 0$, где Γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$, то равенство (33) превращается в формулу

$$\psi(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{F(t)(t - x)}{\sqrt{(t - z)(t - \overline{z})}}\, dt & \text{при} \quad y \neq 0; \\ 0 & \text{при} \quad y = 0, \end{cases} \tag{34}$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, $z = x + iy$, а кривая γ имеет такие же свойства, как и в теореме 8.

Обозначим $(CD)^+ := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} : y > 0 \}$.

В доказательстве представимости решений уравнений (3), (4) в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ формулами вида (32), (34) как в случае ограниченной, так и неограниченной области D используются леммы 3, 4.

Лемма 3. *Пусть функция $\varphi(x, y)$ имеет в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяет уравнению* (3) *в $(CD)^+$ и условиям*

$$\lim_{\substack{y \to +\infty, \\ (x_0, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}}} \left(|\varphi'_x(x_0, y)| + |\varphi'_y(x_0, y)| \right) = 0 \quad \forall\, x_0 = \mathrm{const}, \tag{35}$$

$$\int_y^\infty |\varphi''_{ss}(x, s)| \ln s\, ds < \infty \quad \forall\, (x, y) \in (CD)^+, \tag{36}$$

$$\int_y^\infty |\varphi''_{xs}(x, s)|\, s\, ds < \infty \quad \forall\, (x, y) \in (CD)^+. \tag{37}$$

Тогда функция

$$F_5(x + iy) = u_5(x, y) + i v_5(x, y),$$

где

$$u_5(x, y) := \begin{cases} \tilde{u}_5(x, y) \equiv -\displaystyle\int_y^\infty \frac{s \varphi'_x(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds & \textit{при} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \ y > 0; \\ -\displaystyle\int_0^\infty \varphi'_x(x, s)\, ds & \textit{при} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \ y = 0; \\ \tilde{u}_5(x, -y) & \textit{при} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \ y < 0, \end{cases} \tag{38}$$

$$v_5(x, y) := \begin{cases} \tilde{v}_5(x, y) \equiv y\int\limits_y^\infty \dfrac{\varphi'_s(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds & \text{при} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D},\ y > 0; \\ 0 & \text{при} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D},\ y = 0; \\ -\tilde{v}_5(x, -y) & \text{при} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D},\ y < 0, \end{cases} \tag{39}$$

голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$.

Доказательство. Пусть $(x, y) \in (CD)^+$. Выполняя аналогичные выкладки, как и при доказательстве леммы 1 из [1], с учетом соотношений (35)–(37) получаем

$$\frac{\partial \tilde{u}_5}{\partial x}(x, y) = -\int\limits_y^\infty \frac{s\varphi''_{xx}(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds,$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_5}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_y^\infty \varphi''_{xs}(x, s)\sqrt{s^2 - y^2}\, ds = -y\int\limits_y^\infty \frac{\varphi''_{xs}(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds,$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_5}{\partial x}(x, y) = y\int\limits_y^\infty \frac{\varphi''_{xs}(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds,$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_5}{\partial y}(x, y) = \int\limits_y^\infty \frac{\varphi'_s(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds + y\frac{\partial}{\partial y}\Bigg(-\varphi'_y(x, y)\ln y -$$

$$- \int\limits_y^\infty \varphi''_{ss}(x, s)\ln\left(s + \sqrt{s^2 - y^2}\right) ds\Bigg) = \int\limits_y^\infty \frac{\varphi'_s(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds -$$

$$- y\varphi''_{yy}(x, y)\ln y - \varphi'_y(x, y) + y\varphi''_{yy}(x, y)\ln y +$$

$$+ y^2\int\limits_y^\infty \frac{\varphi''_{ss}(x, s)}{s + \sqrt{s^2 - y^2}}\frac{ds}{\sqrt{s^2 - y^2}} = \int\limits_y^\infty \frac{\varphi'_s(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds - \varphi'_y(x, y) +$$

$$+ \int\limits_y^\infty \frac{\varphi''_{ss}(x, s)\left(s - \sqrt{s^2 - y^2}\right)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds = \int\limits_y^\infty \frac{\varphi'_s(x, s) + s\varphi''_{ss}(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds -$$

$$- \varphi'_y(x, y) - \int\limits_y^\infty \varphi''_{ss}(x, s)\, ds = -\int\limits_y^\infty \frac{s\varphi''_{xx}(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds.$$

Таким образом, выполняются условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u_5}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v_5}{\partial y}(x, y), \qquad \frac{\partial u_5}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v_5}{\partial x}(x, y)$$

при $(x, y) \in (CD)^+$. Теперь голоморфность функции F_5 в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$ является следствием принципа симметрии [2, с. 148]. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть функция* $\psi(x, y)$ *имеет в* $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ *непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяет уравнению* (4) *в* $(CD)^+$ *и условиям*

$$\lim_{\substack{y \to +\infty, \\ (x_0, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}}} \left(|\psi'_x(x_0, y)| + |\psi'_y(x_0, y)| \right) = 0 \quad \forall\, x_0 = \text{const}, \tag{40}$$

$$\int_y^\infty |\psi''_{ss}(x, s)| \ln s\, ds < \infty \quad \forall\, (x, y) \in (CD)^+, \tag{41}$$

$$\int_y^\infty |\psi''_{xs}(x, s)|\, ds < \infty \quad \forall\, (x, y) \in (CD)^+. \tag{42}$$

Тогда функция

$$F_6(x + iy) = u_6(x, y) + iv_6(x, y),$$

где

$$u_6(x, y) := \begin{cases} \tilde{u}_6(x, y) \equiv -\displaystyle\int_y^\infty \frac{\psi'_s(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds & \text{при} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D},\ y > 0; \\ -\displaystyle\int_0^\infty \Delta\psi(x, s)\, ds & \text{при} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D},\ y = 0; \\ \tilde{u}_6(x, -y) & \text{при} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D},\ y < 0, \end{cases} \tag{43}$$

$$v_6(x, y) := \begin{cases} \tilde{v}_6(x, y) \equiv -y \displaystyle\int_y^\infty \frac{\psi'_x(x, s)}{s\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds & \text{при} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D},\ y > 0; \\ 0 & \text{при} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D},\ y = 0; \\ -\tilde{v}_6(x, -y) & \text{при} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D},\ y < 0, \end{cases} \tag{44}$$

голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$.

Доказательство. Пусть $(x, y) \in (CD)^+$. Выполняя аналогичные выкладки, как и при доказательстве леммы 2 из [1], с учетом соотношений (40) – (42) получаем

$$\frac{\partial \tilde{u}_6}{\partial x}(x, y) = -\int_y^\infty \frac{\psi''_{sx}(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds,$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_6}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi'_y(x, y) \ln y + \int_y^\infty \psi''_{ss}(x, s) \ln\left(s + \sqrt{s^2 - y^2}\right) ds \right) =$$

$$= -\frac{1}{y}\int_y^\infty \frac{s\psi''_{ss}(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds,$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_6}{\partial x}(x, y) = -y\int_y^\infty \frac{\psi''_{xx}(x, s)}{s\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds = -y\int_y^\infty \frac{\psi'_s(x, s)}{s^2\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds +$$

$$+ y\int_y^\infty \frac{\psi''_{ss}(x, s)}{s\sqrt{s^2 - y^2}}\, ds = \frac{1}{y}\int_y^\infty \frac{\psi''_{ss}(x, s)\sqrt{s^2 - y^2}}{s}\, ds +$$

$$+\ y\int_y^\infty \frac{\psi''_{ss}(x,s)}{s\sqrt{s^2-y^2}}\,ds \ = \ \frac{1}{y}\int_y^\infty \frac{s\psi''_{ss}(x,s)}{\sqrt{s^2-y^2}}\,ds,$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_6}{\partial y}(x,y) \ = \ \frac{\partial}{\partial y}\int_y^\infty \psi''_{xs}(x,s)\arccos\frac{y}{s}\,ds \ = \ -\int_y^\infty \frac{\psi''_{sx}(x,s)}{\sqrt{s^2-y^2}}\,ds.$$

Таким образом, выполняются условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u_6}{\partial x}(x,y) \ = \ \frac{\partial v_6}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial u_6}{\partial y}(x,y) \ = \ -\frac{\partial v_6}{\partial x}(x,y)$$

при $(x,y)\in (CD)^+$. Теперь голоморфность функции F_6 в $\mathbb{C}\setminus\overline{D}_z$ является следствием принципа симметрии [2, с. 148]. Лемма доказана.

Теорема 9. *Пусть область D ограничена, а функция $\varphi(x,y)$ имеет в $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$ непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяет уравнению* (3) *в $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$ и выполняются условия* (35), (37), *а также*

$$\varphi(x,-y) = \varphi(x,y) \quad \forall\,(x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus\overline{D}, \tag{45}$$

$$\lim_{\substack{y\to+\infty,\\ (x_0,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}}} \varphi(x_0,y) = 0 \quad \forall\, x_0 = \text{const}, \tag{46}$$

$$\int_y^\infty |\varphi''_{ss}(x_0,s)|s\,ds < \infty \quad \forall\,(x,y)\in (CD)^+, \tag{47}$$

$$\lim_{\substack{|x|+y\to\infty,\\ (x,y)\in(CD)^+}} \left(y\left|\int_y^\infty \frac{\varphi'_s(x,s)}{\sqrt{s^2-y^2}}\,ds\right| + \left|\int_y^\infty \frac{s\varphi'_x(x,s)}{\sqrt{s^2-y^2}}\,ds\right| \right) = 0. \tag{48}$$

Тогда существует единственная голоморфная в $\mathbb{C}\setminus\overline{D}_z$ функция $F:\ \mathbb{C}\setminus\overline{D}_z\to$ $\to\mathbb{C}$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\substack{z\to\infty,\\ z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D}_z}} F(z) = 0, \tag{49}$$

такая, что справедливо равенство (32) *для всех $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$, и при этом $F(x+iy) = u_5(x,y)+iv_5(x,y)$, где функции $u_5(x,y)$, $v_5(x,y)$ определяются соотношениями* (38), (39).

Доказательство. Пусть $(x,y)\in(CD)^+$, $z=x+iy$ и кривая γ имеет такие свойства, как в теореме 8. Как и при доказательстве теоремы 6 из [1], рассмотрим интегральное уравнение (22) с искомой функцией $F(t)$, голоморфной в $\mathbb{C}\setminus\overline{D}_z$ и удовлетворяющей условию (49).

Пусть

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\min\left\{y, \min_{t\in\gamma}|t-z|\right\}, \qquad N > 2\max\left\{|x|+y, \max_{t\in\gamma}|t|\right\}.$$

Рассмотрим области

$$E^{\pm}_{\varepsilon,N} := \{t\in\mathbb{C}\setminus\overline{D'_z}:\ |t-z|>\varepsilon,\ |t-\overline{z}|>\varepsilon,\ |t|<N,\ \pm(\mathrm{Re}\,t-x)>0\}.$$

Ориентация границы $\partial E^{\pm}_{\varepsilon,N}$ такова, что при ее обходе область $E^{\pm}_{\varepsilon,N}$ остается справа. Обозначим

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^{\pm} := \lim_{\tau \to t,\, \tau \in E^{\pm}_{\varepsilon,N}} \sqrt{(\tau-z)(\tau-\bar{z})} \quad \forall\, t \in \partial E^{\pm}_{\varepsilon,N}.$$

С учетом равенств

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^{\pm} = \pm i\sqrt{(\operatorname{Im} t)^2 - y^2} \quad \forall\, t \in \{t \in \partial E^{\pm}_{\varepsilon,N} : \operatorname{Re} t = x, \operatorname{Im} t > y\},$$

$$\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^{\pm} = \mp i\sqrt{(\operatorname{Im} t)^2 - y^2} \quad \forall\, t \in \{t \in \partial E^{\pm}_{\varepsilon,N} : \operatorname{Re} t = x, \operatorname{Im} t < -y\}$$

путем тех же рассуждений, что и при доказательстве теоремы 6 из [1], приходим к соотношениям

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E^{-}_{\varepsilon,N}} \frac{F(t)\,dt}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^{-}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E^{+}_{\varepsilon,N}} \frac{F(t)\,dt}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^{+}} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E^{-}_{\varepsilon,N}\setminus\gamma} \frac{F(t)\,dt}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^{-}} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial E^{+}_{\varepsilon,N}\setminus\gamma} \frac{F(t)\,dt}{\left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right)^{+}} = -\frac{2}{\pi}\int_{y+\varepsilon}^{|\operatorname{Im} t_N|} \frac{\tilde{v}_5(x,\eta)}{\sqrt{\eta^2-y^2}}d\eta -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c_\varepsilon(z)} + \int_{c_\varepsilon(\bar{z})}\right)\frac{F(t)\,dt}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{c_N(0)} \frac{F(t)\,dt}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}, \tag{50}$$

где

$$\tilde{v}_5(x,\eta) := \frac{i}{2}F(x-i\eta) - \frac{i}{2}F(x+i\eta), \tag{51}$$

t_N — одна из точек пересечения окружности $c_N(0)$ и прямой $\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} t = x\}$.

В равенстве (50) интегралы по окружностям $c_\varepsilon(z)$, $c_\varepsilon(\bar{z})$ оцениваются тем же способом, что и интеграл I_6 при доказательстве теоремы 6 из [1]. Для модуля интеграла по окружности $c_N(0)$ аналогично получаем оценку

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c_N(0)} \frac{F(t)\,dt}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\right| \le c \max_{t \in c_N(0)} |F(t)|,$$

где постоянная c не зависит от N.

Таким образом, устремляя в соотношении (50) ε к нулю, а N к бесконечности, с учетом равенства (49) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}dt = -\frac{2}{\pi}\int_{y}^{\infty} \frac{\tilde{v}_5(x,\eta)}{\sqrt{\eta^2-y^2}}d\eta. \tag{52}$$

Следовательно, уравнение (22) при $(x, y) \in (CD)^+$ приведено к уравнению

$$-\frac{2}{\pi}\int_{y}^{\infty} \frac{\tilde{v}_5(x,\eta)}{\sqrt{\eta^2-y^2}}d\eta = \varphi(x,y), \tag{53}$$

которое при выполнении условий (35), (46), (47) аналогично уравнению (26) имеет единственное решение

$$\tilde{v}_5(x,y) = y\int_{y}^{\infty} \frac{\varphi'_s(x,s)}{\sqrt{s^2-y^2}}ds.$$

Определим функции $v_5(x, y)$, $u_5(x, y)$ соотношениями (39), (38). Из леммы 3 и условия (48) следует, что $F(x+iy) = u_5(x, y) + iv_5(x, y)$ — единственная голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$ функция, для которой $\operatorname{Im} F(x+iy) = v_5(x, y)$ и выполняется условие (49).

Итак, показано, что с учетом условия (45) найденная функция F удовлетворяет соотношениям (32) при $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, $y \neq 0$. Поскольку обе части равенства (32) являются непрерывными функциями в точках $(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, то функция F удовлетворяет также соотношениям (32) и при $(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$.

Докажем единственность функции F, голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$ и удовлетворяющей соотношениям (32), (49). Заметим, что равенство (51) представляет разложение гармонической функции $\tilde{v}_5(x, y)$ на голоморфную и антиголоморфную компоненты. Поскольку компоненты в таком разложении определяются с точностью до постоянного слагаемого, а входящая в равенство (51) функция F должна обращаться в нуль на бесконечности, то единственной такой функцией является $F(x+iy) := u_5(x, y) + iv_5(x, y)$. Теперь единственность функции F, голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$ и удовлетворяющей соотношениям (32), (49), следует из эквивалентности уравнений (22), (53) и единственности решения уравнения (53). Теорема доказана.

Теорема 10. *Пусть область* D *ограничена, а функция* $\psi(x, y)$ *имеет в* $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ *непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяет уравнению* (4) *в* $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ *и выполняются условия* (40), (42), *а также*

$$\psi(x, -y) = \psi(x, y) \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \tag{54}$$

$$\lim_{\substack{y \to +\infty, \\ (x_0, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}}} \psi(x_0, y) = 0 \quad \forall\, x_0 = \text{const}, \tag{55}$$

$$\int_y^\infty \left| \psi''_{ss}(x, s) \right| s\, ds < \infty \quad \forall\, (x, y) \in (CD)^+, \tag{56}$$

$$\lim_{\substack{|x| + y \to \infty, \\ (x, y) \in (CD)^+}} \left((|x| + y) \left(\left| \int_y^\infty \frac{\psi'_s(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}} ds \right| + y \left| \int_y^\infty \frac{\psi'_x(x, s)}{s\sqrt{s^2 - y^2}} ds \right| \right) \right) = 0. \tag{57}$$

Тогда существует единственная голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$ *функция* $F: \mathbb{C} \setminus \overline{D}_z \to \mathbb{C}$, *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{\substack{z \to \infty, \\ z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_z}} zF(z) = 0, \tag{58}$$

такая, что справедливо равенство (34) *для всех* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, *и при этом* $F(x+iy) = u_6(x, y) + iv_6(x, y)$, *где функции* $u_6(x, y)$, $v_6(x, y)$ *определяются соотношениями* (43), (44).

Доказательство. Пусть $(x, y) \in (CD)^+$, $z = x + iy$ и кривая γ имеет такие свойства, как в теореме 8. Как и при доказательстве теоремы 7 из [1], рассмотрим интегральное уравнение (30) с искомой функцией $F(t)$, голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$ и удовлетворяющей условию (58). Из соотношения (30) получим уравнение

$$\frac{2}{\pi} \int_y^\infty \frac{\eta \tilde{u}_6(x, \eta)}{\sqrt{\eta^2 - y^2}} d\eta = \psi(x, y) \tag{59}$$

таким же образом, как получено аналогичное ему уравнение (53); при этом

$$\tilde{u}_6(x, \eta) := \frac{1}{2}F(x+i\eta) + \frac{1}{2}F(x-i\eta).$$

При выполнении условий (40), (55), (56) уравнение (59) имеет единственное решение

$$\tilde{u}_6(x, \eta) = -\int\limits_y^\infty \frac{\psi_s'(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}}ds.$$

Определим функции $u_6(x, y)$, $v_6(x, y)$ соотношениями (43), (44). Из леммы 4 и условия (57) следует, что $F(x+iy) = u_6(x, y) + iv_6(x, y)$ — единственная голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$ функция, для которой $\operatorname{Re} F(x+iy) = u_6(x, y)$ и выполняется условие (58). Далее доказательство аналогично доказательству теоремы 9.

Теорема 11. *Пусть область D неограничена. Тогда каждой голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$ функции $F\colon \mathbb{C} \setminus \overline{D}_z \to \mathbb{C}$, удовлетворяющей условиям* (49) *и*

$$\int\limits_y^\infty |F(x+i\eta) - F(x-i\eta)| \frac{d\eta}{\eta} < \infty \quad \forall\, (x, y) \in (CD)^+, \tag{60}$$

соответствует решение $\varphi(x, y)$ уравнения (3) *в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, которое выражается формулой* (32), *где $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, $z = x + iy$, а γ — произвольная замыкаемая в бесконечно удаленной точке жорданова спрямляемая кривая, ограничивающая правильную в направлении мнимой оси область D_z' такую, что $\overline{D}_z \subset D_z'$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_z'}$.*

Доказательство. В качестве γ можно взять, по крайней мере, границу области

$$\{ t \in \mathbb{C} : |t - x - i\eta| > \varepsilon \;\; \forall\, \eta \in (-\infty, -|y|] \cup [|y|, \infty) \},$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left\{ |y|, \; \min_{t \in \overline{D}_z} |t - z| \right\}.$$

Аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 9, получим равенство (52), интеграл в правой части которого существует в силу условия (60). Условия (49), (60) обеспечивают также существование всех частных производных функции (32), которые входят в уравнение (3). Теперь утверждение теоремы доказывается аналогично теореме 1 из [1].

Отметим, что условия (40), (60) слабее, чем условие вида (10) на функцию F.

Аналогично теореме 9 доказывается следующее утверждение.

Теорема 12. *Пусть область D неограничена, а функция $\varphi(x, y)$ имеет в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяет уравнению* (3) *в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, выполняются условия* (35), (37), (45)–(48) *и дополнительно условие*

$$\int\limits_y^\infty \left| \int\limits_\eta^\infty \frac{\varphi_s'(x, s)}{\sqrt{s^2 - y^2}} ds \right| d\eta < \infty \quad \forall\, (x, y) \in (CD)^+. \tag{61}$$

Тогда существует единственная голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_z$ функция $F\colon \mathbb{C} \setminus \overline{D}_z \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая условию (49), *для которой при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ справедливо равенство* (32), *где $z = x + iy$, а кривая γ имеет такие же свойства, как в теореме* 11. *При этом функция F представляется так же, как в теореме* 9.

Теорема 13. *Пусть область D неограничена. Если голоморфная в $\mathbb{C}\setminus\overline{D}_z$ функция $F\colon \mathbb{C}\setminus\overline{D}_z \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям* (58) *и*

$$\int_y^\infty |F(x+i\eta)+F(x-i\eta)|\,d\eta < \infty \quad \forall\,(x,y)\in (CD)^+, \tag{62}$$

то пара функций $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ определенных формулами (32), (34), *где $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$, $z=x+iy$, а кривая γ имеет такие же свойства, как в теореме* 11, *является решением системы* (1) *в* $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$.

Доказательство. При выполнении условия (58) аналогично равенству (52) доказывается, что

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(t)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}dt = \frac{1}{\pi}\int_y^\infty \frac{F(x+i\eta)+F(x-i\eta)}{\sqrt{\eta^2-y^2}}\eta\,d\eta \quad \forall\,(x,y)\in (CD)^+.$$

Интеграл в правой части этого равенства существует в силу условия (62). Условия (58), (62) обеспечивают также существование всех частных производных функций (32), (34), которые входят в систему (1). Далее доказательство легко осуществляется аналогично доказательству теоремы 1 из [1].

Аналогично теореме 10 доказывается также следующее утверждение.

Теорема 14. *Пусть область D неограничена, а функция $\psi(x,y)$ имеет в $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$ непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяет уравнению* (4) *в* $\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$, *выполняются условия* (40), (42), (54)–(57) *и дополнительное условие*

$$\int_y^\infty \left|\int_\eta^\infty \frac{\psi'_s(x,s)}{\sqrt{s^2-y^2}}ds\right| d\eta < \infty \quad \forall\,(x,y)\in (CD)^+ \tag{63}$$

Тогда существует единственная голоморфная в $\mathbb{C}\setminus\overline{D}_z$ функция $F\colon \mathbb{C}\setminus\overline{D}_z \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая условию (58), *для которой при всех $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$ справедливо равенство* (34), *где $z=x+iy$, а кривая γ имеет такие же свойства, как в теореме* 11. *При этом функция F представляется так же, как в теореме* 10.

Отметим, что соотношения (37), (47), (48), (61) выполняются, по крайней мере, в случае, когда функция $\varphi(x,y)$ удовлетворяет условиям (35), (46) и оценке

$$|\varphi''_{xy}(x,y)| + |\varphi''_{yy}(x,y)| \le c(|x|+y)^{-2-\alpha} \quad \forall\,(x,y)\in (CD)^+, \tag{64}$$

где $0<\alpha<1$, постоянная c не зависит от (x,y). Точно так же выполняются соотношения (42), (56), (57), (63), если выполнены условия (40), (55) и справедлива оценка вида (64) для производных $\psi''_{xy}(x,y)$, $\psi''_{yy}(x,y)$.

1. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. I // Укр. мат. журн. – 1996. – **41**, № 11. – С. 1518–1529.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

Получено 28.12.95