УДК 512. 546

И. В. Протасов (Нац. ун-т, Киев)

АБСОЛЮТНАЯ РАЗЛОЖИМОСТЬ ГРУППЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

We prove that the group of rational numbers **Q** is absolutely resolvable.

Доведена абсолютна розкладність групи раціональних чисел **Q**.

Группа G называется *абсолютно разложимой*, если ее можно разбить на два подмножества, плотные в любой недискретной хаусдорфовой групповой топологии. В статье [1] доказана абсолютная разложимость группы целых чисел и любой квазициклической группы, а также поставлена задача характеризации абсолютно разложимых групп. Цель заметки — доказательство абсолютной разложимости группы рациональных чисел **Q**.

1. Дигитизация рациональных чисел. В статье [2] показано, что каждое рациональное число q однозначно представимо в виде

$$\ldots\ d_{-s}\frac{(-1)^s}{(s+1)!} + d_{-s+1}\frac{(-1)^{s+1}}{s!} + \ldots + d_{-1}\frac{(-1)}{2!} +$$

$$+ d_0 + d_1(-1)2! + d_2 3! + \ldots + d_r(-1)^r(r+1)! + \ldots ,$$

где $0 \le d_{-s} \le s$ для всех $s > 0$, $0 \le d_r \le r+1$ для всех $r \ge 0$, причем $d_r = d_{-s} = 0$ для всех r, s, кроме конечного их числа.

Таким образом, каждому рациональному числу $q \ne 0$ однозначно сопоставляется код

$$c(q) = (d_k, d_{k+1}, \ldots, d_{m-1}, d_m),$$

где $\{k, k+1, \ldots, m-1, m\}$ — отрезок множества целых чисел, $d_k \ne 0$, $d_m \ne 0$, $0 \le d_i \le |i|$ для всех $i < 0$, $0 \le d_i \le i+1$ для всех $i \ge 0$. Положим $l(q) = k$, $r(q) = m$.

Код $c(q+q')$ суммы рациональных чисел q, q' вычисляется поразрядным сложением кодов $c(q)$, $c(q')$ слева направо с переносом 1 или -1 из младшего разряда в старший. Отсюда легко следуют такие неравенства:

$$l(q+q') \ge \min\{l(q), l(q')\}, \qquad r(q+q') \le \max\{r(q), r(q')\} + 2.$$

Рациональное число $q \ne 0$ с кодом $c(q) = (d_k, \ldots, d_m)$ назовем *особенным*, если k — нечетное отрицательное число и $2d_k = |k| + 1$.

Лемма 1. *Если рациональное число q с кодом $c(q) = (d_k, \ldots, d_m)$ особенное и $k \le -5$, то справедливо одно из следующих утверждений:*

1) $2q$ — *неособенное число*, $l(2q) \le k+2$;
2) $4q$ — *неособенное число*, $l(4q) \le k+4$.

Доказательство. Запишем развернутые представления чисел q и $2q$:

$$q = -\frac{d_k}{(|k|+1)!} + \frac{d_{k+1}}{|k|!} - \frac{d_{k+2}}{(|k|-1)!} + \ldots ,$$

$$2q = -\frac{2d_k}{(|k|+1)!} + \frac{2d_{k+1}}{|k|!} - \frac{2d_{k+2}}{(|k|-1)!} + \ldots .$$

Так как число q особенное, то $2d_k = |k| + 1$. Значит,

$$2q = \frac{2d_{k+1}-1}{|k|!} - \frac{2d_{k+2}}{(|k|-1)!} + \ldots .$$

Из неравенств $-1 \le 2d_{k+1}-1 \le 2|k|-3$, $2d_{k+1}-1 \ne 0$ вытекает

$$c(2q) = (d'_{k+1}, \ldots), \quad d'_{k+1} \equiv (2d_{k+1}-1) \bmod |k|$$

при условии $2d_{k+1}-1 \ne |k|$. Поскольку число $k+1$ четное, то $2q$ — неособенное число и $l(2q) = k+1$. Если же $2d_{k+1}-1 = |k|$, то

$$2q = -\frac{2d_{k+2}-1}{(|k|-1)!} + \ldots .$$

Так как число $|k|-1$ четное, то $2d_{k+2}-1 \not\equiv 0 \bmod (|k|-1)$. Значит,

$$c(2q) = (d'_{k+2}, \ldots), \quad d'_{k+2} \equiv (2d_{k+2}-1) \bmod (|k|-1).$$

Поскольку $|k+2| = |k|-2$, то число $2q$ неособенное при условии $2d'_{k+2} \ne$ $\ne |k|-1$. Заметим, что $2d'_{k+2} \equiv (4d_{k+2}-2) \bmod (|k|-1)$. Поэтому $2q$ — неособенное число, если $|k|-1$ делится на 4. Если же $|k|-1$ не делится на 4, то, заменяя в наших рассуждениях q на $2q$, приходим к заключению, что $4q$ — неособенное число.

2. Графы отображений и раскрашивания групп. Пусть X — конечное множество, $f\colon X \to X$. Рассмотрим ориентированный граф $\mathrm{Gr}(X, f)$, вершинами которого являются точки множества X, а упорядоченная пара точек является ориентированным ребром, если $f(x) = y$. Достаточно очевидны следующие свойства графа $\mathrm{Gr}(X, f)$.

Каждый цикл графа $\mathrm{Gr}(X, f)$ ориентированный. Любая связная компонента графа имеет единственный ориентированный цикл (петля считается ориентированным циклом длины 1). Если из связной компоненты удалить ребра ориентированного цикла, то она распадется на конечное число деревьев.

Правильным назовем раскрашивание множества вершин графа $\mathrm{Gr}(X, f)$ в два цвета со следующими свойствами. Если ориентированный цикл имеет четную длину, то любые его соседние вершины разноцветны. Если ориентированный цикл имеет нечетную длину больше 1, то в нем имеется лишь одна пара соседних одноцветных вершин. Если точка x не принадлежит ориентированному циклу, то точки $x, f(x)$ разноцветны. Существование правильного раскрашивания любого графа $\mathrm{Gr}(X, f)$ легко следует из указанных выше свойств.

Для конечной абелевой группы G и отображения $f(x) = 2x$ рассмотрим граф $\mathrm{Gr}(G, f)$. Заметим, что точка $g \in G$ принадлежит ориентированному циклу длины больше 1 тогда и только тогда, когда порядок элемента g — нечетное число. Доказательством следующей леммы служит существование правильного раскрашивания графа $\mathrm{Gr}(G, f)$.

Лемма 2. *Любую конечную абелеву группу G можно раскрасить в два цвета так, чтобы для любого элемента $g \in G$, $g \ne 0$, выполнялись следующие утверждения:*

1) *если порядок элемента g четен, то элементы g и $2g$ разноцветны;*

2) *если порядок элемента g нечетен, то среди элементов $g, 2g, 4g$ имеется пара разноцветных.*

Для каждого натурального числа n зафиксируем раскрашивание циклической группы $\mathbf{Z}(n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ в желтый и голубой цвета, которое удовлетворяет лемме 2.

3. Доказательство абсолютной разложимости группы $\mathbf{Q}$. Используя хроматическую терминологию, предъявим такое раскрашивание группы $\mathbf{Q}$ в желтый и голубой цвета, что каждое подмножество вида $a+U$, где $a \in \mathbf{Q}$, U — окрестность нуля недискретной групповой топологии на $\mathbf{Q}$, содержит по меньшей мере пару разноцветных элементов.

Для определенности окрасим 0 в желтый цвет. Рациональное число $q \neq 0$ с кодом $c(q)=(d_k, \ldots, d_m)$ окрасим в желтый или голубой цвет согласно следующим правилам:

1) если $|k| \leq m$, то цвет числа q определяется его знаком: желтый при $q>0$ и голубой при $q<0$;

2) если $|k|>m$, то цвет числа q совпадает с цветом d_k как элемента циклической группы $\mathbf{Z}(|k|+1)=\{0, 1, \ldots, |k|\}$.

Рациональное число $q \neq 0$ с кодом $c(q)=(d_k, \ldots, d_m)$ отнесем к первому типу при $|k| \leq m$, и ко второму типу при $|k|>m$. Таким образом, цвет числа первого типа определяется его знаком, а цвет числа второго типа — началом его кода.

Зафиксируем недискретную групповую топологию на $\mathbf{Q}$. Возьмем произвольное рациональное число a и симметричную окрестность нуля U. Рассмотрим следующие три возможности.

1. В любой окрестности нуля найдется такая последовательность чисел $\{q_n : n<\omega\}$, что последовательность $\{l(q_n) : n<\omega\}$ ограничена снизу, а $r(q_n) \to \infty$. Выберем такую последовательность в окрестности U. Поскольку $l(q_n)=l(-q_n)$, то $r(-q_n) \to \infty$. Выберем из последовательности $\{q_n : n<\omega\}$ такое число q, что $|q|>|a|$ и числа $a+q, a-q$ первого типа. Так как эти числа имеют разные знаки, то они окрашены в разные цвета.

2. В любой окрестности нуля найдется такая последовательность $\{q_n : n<\omega\}$, что последовательность $\{r(q_n) : n<\omega\}$ ограничена сверху, а $l(q_n) \to -\infty$. Пользуясь леммой 1, выберем такую последовательность неособенных чисел $\{q_n : n<\omega\}$ в симметричной окрестности нуля V, удовлетворяющей условию $4V \subseteq U$. Ясно, что последовательности $\{r(2q_n) : n<\omega\}$, $\{r(4q_n) : n<\omega\}$ также ограничены сверху и $l(2q_n) \to -\infty$, $l(4q_n) \to -\infty$. Выберем из последовательности $\{q_n : n<\omega\}$ такое число q, что числа $a+q, a+2q, a+4q$ второго типа и $l(q)<l(a)$.

Пусть $c(q)=(d_k, \ldots)$ и элемент d_k имеет четный порядок в группе $\mathbf{Z}(|k|+1)$. Так как число q неособенное, то $l(q)=l(2q)$ и начала кодов чисел q и $2q$ имеют разные цвета в группе $\mathbf{Z}(|k|+1)$. Поскольку $l(q)<l(a)$, то начала кодов пар чисел $(q, a+q)$ и $(2q, a+2q)$ совпадают. Следовательно, числа второго типа $a+q, a+2q$ разноцветны.

Пусть $c(q)=(d_k, \ldots)$ и элемент d_k имеет нечетный порядок в группе $\mathbf{Z}(|k|+1)$. Тогда $l(q)=l(2q)=l(4q)$ и начала кодов чисел $q, 2q, 4q$ не являются одноцветными в группе $\mathbf{Z}(|k|+1)$. Поскольку $l(q)<l(a)$, то начала кодов пар чисел $(q, a+q), (2q, a+2q)$ и $(4q, a+4q)$ совпадают. Следовательно, среди чисел второго типа $a+q, a+2q, a+4q$ есть пара разноцветных.

3. В любой окрестности нуля найдется такая последовательность $\{q_n : n<\omega\}$, что $l(q_n) \to -\infty$, $rl(q_n) \to \infty$. Пользуясь леммой 1, выберем такую последовательность неособенных чисел $\{q_n : n<\omega\}$ в симметричной окрестности нуля, удовлетворяющей условию $64V \subseteq U$. Из последовательности $\{q_n : n<\omega\}$ выберем число q так, чтобы $|q|>|a|$, $l(q)<l(a)$, $l(-4q)<l(a)-4$.

Если все числа $a+q, a+2q, a+4q$ второго типа, то, как показано при анализе второй возможности, среди них есть пара разноцветных. Поэтому можно считать, что число $a+q'$ первого типа, где q' — одно из чисел $q, 2q, 4q$. В силу неравенства $|q|>|a|$ цвет числа $a+q'$ определяется знаком числа q'.

Положим $q''=-q'$. Заменяя число q'' на одно из чисел $2q''$ или $4q''$, можно ввиду леммы 1 считать, что q'' — неособенное число. Неравенство $l(-4q)<l(a)-4$ гарантирует, что $l(q'')<l(a)$. Если все числа $a+q''$, $a+2q''$, $a+4q''$ второго типа, то, как показано выше, среди них есть пара разноцветных. Если же среди этих чисел есть число первого типа, то его знак совпадает со знаком q'' и противоположен знаку числа $a+q'$. Запас в выборе окрестности V понадобился для того, чтобы числа $q, 2q, 4q, q'', 2q'', 4q''$ принадлежали окрестности U.

Автор признателен проф. Дж. Пиму за информацию о дигитизации рациональных чисел и Т. Юрчук за сведения о графах отображений.

1. *Comfort W. W., van Mill J.* Groups with only resolvable group topologies // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – **120**, № 3. — P. 687–696.

2. *Budak T., Isik N., Pym J.* Subsemigroup of Stone–Čech compactification // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1994. – **116**. — P. 99–118.

Получено 05.06.95