УДК 519.21

М. Л. Свердан (Черпів. уп-т),
Є. Ф. Царков (Риз. техп. уп-т),
В. К. Ясинський (Черпів. уп-т)

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ТА МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ. II. СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ

We consider pulse systems with Markov switching. We study the problem of uniform boundedness of solutions of such systems and the problem of stability of linear systems.

Розглядаються імпульсні системи з марковськими перемиканнями, а саме: їх рівномірна обмеженість, аналіз стійкості систем за граничним рівнянням.

Ця стаття є продовженням роботи [16], а тому в ній продовжено нумерацію пунктів, формул, теорем, лем тощо.

4. Слабка компактність імовірнісних мір у просторі Скорохода. Наведемо результати з монографій [4, 17], які потрібні для доведення слабкої збіжності розв'язків імпульсних систем з марковськими перемиканнями.

Нехай $\mathbb{B}$ — простір вимірних функцій з нормою

$$\|x\| = \sup_{0 \le t \le 1} |x(t)|. \tag{44}$$

Позначимо через $\mathbb{D}$ підмножину функцій з $\mathbb{B}$, які не мають розривів другого роду та неперервних справа, а в точці 1 — зліва. Для характеристики елементів $\mathbb{D}$ можна використати функціонал, який відіграє таку ж роль, як і модуль неперервності у просторі C [17]. Елементу $x \in \mathbb{D}$ поставимо у відповідність числову функцію аргументу $\delta \in (0, 1)$, що визначається рівністю

$$w'(x, \delta) = \inf_{\{t_j\}} \max_{0 < j \le r} w\big(x, [t_{j-1}, t_j)\big), \tag{45}$$

де

$$w\big(x, [t_{j-1}, t_j)\big) \doteq \sup \big\{ |x(s) - x(t)| \mid s, t \in [t_{j-1}, t_j) \big\}, \tag{46}$$

а нижня грань береться за всією скінченною множиною точок $\{t_j\}$, яка задовольняє умови

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1, \quad t_j - t_{j-1} > \delta, \quad j = \overline{1, r}.$$

Для неперервних функцій $x \in C$ завдяки нерівності

$$\frac{1}{2} w(x, \delta) \le w'(x, \delta) \le w(x, 2\delta),$$

де $w(x, \delta)$ — модуль неперервності, маємо

$$w(x, \delta) = \sup_{0 \le t \le 1 - \delta} \sup \big\{ |x(s) - x(t)| \mid s, t \in [t, t + \delta) \big\}.$$

Зауважимо [6], що функціонал $w'(x, \delta)$ (див. (45)) в дійсності співпадає з $w(x, \delta)$ (див. (46)).

Лема 8. *Елемент* $x \in \mathbb{D}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{\delta \to 0} w'(x, \delta) = 0 \ [17].$$

У просторі $\mathbb{D}$ можна ввести метрику d за допомогою наступної конструкції [17]. Позначимо через Λ клас строго зростаючих скалярних відображень відрізка $[0, 1]$ на себе. Для $x \in \mathbb{D}$ та $y \in \mathbb{D}$ визначимо відстань $d(x, y)$ як нижню межу додатних $\varepsilon > 0$, для яких існує $\lambda \in \Lambda$ таке, що

$$\sup_{0 \le t \le 1} |\lambda(t) - t| \le \varepsilon \text{ та } \sup_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(\lambda(t))| \le \varepsilon.$$

Зазначене вище число $d(x, y)$ задовольняє як умову симетрії, тобто $d(x, y) = d(y, x)$, так і нерівності трикутника, тобто

$$d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y).$$

Простір $\mathbb{D}$ з топологією, яка породжується метрикою $d(x, y)$, називається простором Скорохода. Однак операція додавання в $\mathbb{D}$ не є неперервною у згаданій вище топології [18]. Простір Скорохода сепарабельний, але в метриці $\rho(x, y)$ простір $\mathbb{D}$ не є повним [17]. Тому краще скористатися іншою метрикою $d_0(x, y)$, топологічно еквівалентною $d(x, y)$, але відносно якої $\mathbb{D}$ є повним, що важливо для характеристик компактних підмножин. Метрика $d_0(x, y)$ вводиться у монографії [17] як нижня границя тих $\varepsilon > 0$, для яких виконуються нерівності

$$\sup_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(\lambda(t))| \le \varepsilon, \qquad \sup_{s \ne t} \left| \ln \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| \le \varepsilon.$$

Наведемо аналог теореми Арцела для простору Скорохода.

Теорема 3 [17]. *Множина $A \subset \mathbb{D}$ має компактне замикання у топології Скорохода, якщо*

$$\sup_{x \in A} \|x\| < \infty, \qquad \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w'(x, \delta) = 0,$$

де $\|\cdot\|$ визначається (1).

Більш зручну характеристику компактності можна одержати за допомогою функціоналу

$$w''(x, \delta) = \sup \min \{ |x(t) - x(t_1)|, |x(t_2) - x(t)| \},$$

де верхня грань береться за всіма t, t_1 та t_2, які задовольняють нерівності $t_1 \le t \le t_2$; $t_2 - t_1 \le \delta$. Легко бачити, що

$$w''(x, \delta) \le w'(x, \delta).$$

Теорема 4 [17]. *Множина A має компактне замикання у топології Скорохода тоді і тільки тоді, коли вона рівномірно обмежена, тобто $\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$, одночасно неперервна у точках 0 та 1, тобто*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w(x, [0, \delta)) = 0,$$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w(x, [1 - \delta, 1)) = 0,$$

і, зокрема,

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w''(x, \delta) = 0.$$

Перейдемо до характеризації поняття слабкої збіжності випадкових величин із значеннями у $\mathbb{D}$, тобто випадкових процесів $\{\zeta(t)\}$, всі реалізації яких є елементами простору $\mathbb{D}$. У відповідності з класичною теоремою Прохорова [1], сім'я ймовірнісних мір Π на $\mathbb{D}$ є відносно слабко компактною (тобто будь-яка послідовність елементів Π містить слабко збіжну підпослідовність) тоді і тільки тоді, коли вона щільна, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує компакт $k_\varepsilon \subset \mathbb{D}$ такий, що $\mathbb{P}(k_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ для будь-яких $\mathbb{P} \in \Pi$. Надалі, говорячи про слабку збіжність сім'ї випадкових елементів $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ із значеннями у $\mathbb{D}$, будемо мати на увазі ймовірнісні міри $\mathbb{P}_{\zeta_n}$, які визначені цими випадковими величинами на мінімальній σ-алгебрі $\Sigma_{\mathbb{D}}$ підмножин простору $\mathbb{D}$, яка породжена базисом топології Скорохода.

Визначимо для випадкової величини ζ із значеннями в $\mathbb{D}$ скінченновимірні проекції $\pi_{t_1, \ldots, t_k} \mathbb{P}_\zeta$ як розподіл випадкового вектора $\{\zeta(t_1), \ldots, \zeta(t_k)\}$. Нехай T_ζ — множина точок відрізка $[0, 1]$, для яких проекція π_t неперервна скрізь (в розумінні слабкої збіжності ймовірнісних мір), за виключенням множини $\mathbb{P}_\zeta$ міри нуль. За означенням завжди $0 \in T_\zeta$ та $1 \in T_\zeta$. Ясно, що $t \in T_\zeta$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{P}(\zeta(t) \neq \zeta(t-)) = 0$. Тут і надалі $\zeta(t-) = \lim_{s \uparrow t} \zeta(s)$. Треба довести, що доповнення у $[0, 1]$ не більш ніж зліченне.

Теорема 5 [17]. *Нехай* $\pi_{t_1, \ldots, t_k} \mathbb{P}_{\zeta_n}$ *слабко збігається при* $n \to \infty$ *до* $\pi_{t_1, \ldots, t_k} \mathbb{P}_\zeta$ *для всіх* $t_j \in T_\zeta$, $j = \overline{1, n}$ *та* $\mathbb{P}\{\zeta(1) \neq \zeta(1-0)\} = 0$. *Якщо для всіх* $t_2 \in (0, 1]$, $t_1 \in (0, t_2]$, $t \in [t_1, t_2]$, $n \in \mathbb{N}$ *і деяких* $c > 0$, $\gamma \geq 1$ *та* $\alpha > 0$ *виконується нерівність*

$$\mathbb{E}\left\{|\zeta_n(t) - \zeta_n(t_1)|^\gamma |\zeta_n(t_2) - \zeta_n(t)|^\gamma\right\} \leq c|t_2 - t_1|^{1+\alpha}, \tag{47}$$

то послідовність $\{\zeta_n\}$ *слабко збігається до* ζ.

Зауважимо, що ці результати легко переносяться на випадок, коли $\{\zeta_m(t), m \geq 1\}$ є випадковими n-вимірними векторами, а аргумент t належить довільному відрізку $[a, b]$. Надалі будемо посилатися на наведені вище скалярні результати, як на векторні, причому замість відрізка $[0, 1]$ використовуватимемо $[a, b]$ для довільних $b > a$.

Умови збіжності до дифузійного процесу ретельно описано у монографії [2]. Нехай $\zeta(t)$ — розв'язок стохастичного диференціального рівняння Іто в $\mathbb{R}^n$

$$d\zeta = a(\zeta)\,dt + B(\zeta)\,dw(t), \tag{48}$$

де $a(x)$ та $B(x)$ неперервні по $x \in \mathbb{R}^n$, задовольняють умову лінійного зростання

$$|a(t, x)| + \|B(t, x)\| \leq k(1 + |x|)$$

та локальну умову Ліпшица по $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 6 [4]. *Нехай для послідовності випадкових процесів* $\{\xi_n(t), t \in [a, b], n \geq 1\}$ *виконані наступні умови*:

а) *розподіли* $\xi_n(a)$ *збігаються до розподілу деякої випадкової величини* ξ;

б) *існує така множина* D *двічі неперервно диференційовних фінітних функцій* $\mathbb{R}^n$, *щільна у просторі неперервних функцій, які збігаються до нуля на нескінченності, що для всіх* $a \leq t_1 < \ldots < t_{k+1} < t < t + h \leq b$ *та* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1} \in D$ *виконуються співвідношення*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \mathbb{E}\varphi_1(\xi_n(t_1)) \ldots \varphi_k(\xi_n(t_k)) \left[\varphi_{k+1}(\xi_n(t+h)) - \varphi_{k+1}(\xi_n(t)) - hL\varphi_{k+1}(\xi_n(t))\right] \right| =$$

$$= o(h) \tag{49}$$

при $h \to 0$ *рівномірно по* $t \in [t_{k+1}, b-h]$, *де* L — *слабкий інфінітезимальний оператор рівняння* (48).

Тоді скінченновимірні розподіли послідовності $\{\xi_n(t)\}$ *збігаються до відповідних скінченновимірних розв'язків* (48) *з початковою умовою* $\xi(a) = \xi$.

5. Слабка збіжність розв'язків стохастичних імпульсних систем. На підставі наслідку 2 та результатів попереднього пункту можемо стверджувати, що для довільного скінченного набору моментів часу $t_r > t_{r-1} > \ldots > t_1 > 0$ сім'я розподілу випадкового вектора $\{x_\varepsilon(t_1), \ldots, x_\varepsilon(t_r)\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 << 1$, відносно слабко компактна. Будемо розглядати розв'язок (27) – (29) як випадкову величину із значеннями у просторі Скорохода $\mathbb{D}([0, T], \mathbb{R}^n)$ при деякому фіксованому $T > 0$. Імовірнісні міри, які відповідають цим розв'язкам, позначимо через $\mathbb{P}^\varepsilon$.

У цьому пункті доведемо, що сім'я $\mathbb{P}^\varepsilon$ відносно слабко компактна, тобто існує така послідовність $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{N}\}$, що $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ та $\{\mathbb{P}^{\varepsilon_n}, n \in \mathbb{N}\}$ збігається до деякого розподілу $\hat{\mathbb{P}}$. Аналогічний результат для рівнянь без стрибків (тобто при $g(x, y, \varepsilon) \equiv 0$) міститься в [8], але він був одержаний іншим методом. Результати цього пункту можна одержати за допомогою методики роботи [4]. Однак доведемо вказаний вище результат більш простим методом, який є варіантом другого методу Ляпунова [6].

Спочатку зауважимо, що розв'язок $x_\varepsilon(t)$ (27), (28) та сім'я процесів

$$\bar{x}_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t) + \varepsilon \Pi F_1(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$$

мають однакові властивості слабкої збіжності при $\varepsilon \to 0$, оскільки для довільних $T > 0$, $\delta > 0$, $y \in \mathbb{Y}$ та $r > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{|x| < r \\ y \in \mathbb{Y}}} \mathbb{P}_{x,y}\left(\sup_{0 \le t \le T} |\bar{x}_\varepsilon(t) - x(t)| > \delta \right) = 0.$$

Тому будемо розглядати функціонали

$$\begin{aligned} \bar{v}_\varepsilon(x, y) &= |x + \varepsilon \Pi F_1(x, y)|^2, \\ \hat{v}_\varepsilon(x, y) &= (x + \varepsilon \Pi F_1(x, y), c) \end{aligned} \tag{50}$$

для деякого $c \in \mathbb{R}^n$.

***Наслідок* 1.** *Для довільного* $T > 0$ *існують такі додатні константи* ε_T *та* A_T, *що*

$$\left| \mathbb{E}_{x,y} \tilde{v}_\varepsilon(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) - \tilde{v}_\varepsilon(x, y) \right| < t A_T \left(1 + |x|^2\right) \tag{51}$$

для всіх $t \in [0, T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$, $x \in \mathbb{R}^m$ *і* $y \in \mathbb{Y}$.

Доведення випливає із зображення

$$\tilde{v}_\varepsilon(x, y) = |x|^2 + 2\varepsilon(x, \Pi F_1(x, y)) + \varepsilon^2 |\Pi F_1(x, y)|^2$$

та застосування леми 7 і формули (33).

***Наслідок* 2.** *Для довільного* $T > 0$ *та* $c \in \mathbb{R}^m$ *існують такі сталі* ε_T *та* A_T, *що*

$$\left| \mathbb{E}_{x,y} \hat{v}_\varepsilon(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), c) - \hat{v}_\varepsilon(x, y, c) \right| < t A_T |c| (1 + |x|)^2 \tag{52}$$

при всіх $t \in [0, T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$, $x \in \mathbb{R}^m$ *і* $y \in \mathbb{Y}$.

Доведення випливає з застосування леми 7 та формули (33).

Лема 9. *Для довільного* $T>0$ *існують такі додатні* ε_T *та* A_T, *що*

$$\mathbb{E}_{x,y}\left|x_\varepsilon(t)+\varepsilon\Pi F_1(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t))-x-\varepsilon\Pi F_1(x,y)\right|^2 \le tA_T\left(1+|x|^2\right) \tag{53}$$

для всіх $t\in[0,T]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_T)$, $x\in\mathbb{R}^m$ *і* $y\in\mathbb{Y}$.

Доведення. Запишемо ліву частину нерівності (53) у вигляді

$$\left|x_\varepsilon(t)+\varepsilon\Pi F_1(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t))-x-\varepsilon\Pi F_1(x,y)\right|^2 = \bar v_\varepsilon(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t)) -$$

$$-\ \bar v_\varepsilon(x,y) - 2\left(x_\varepsilon(t)+\varepsilon\Pi F_1(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t))-\varepsilon\Pi F_1(x,y),\, x+\varepsilon\Pi F_1(x,y)\right).$$

Тепер застосуємо формули (51) та (52) при $c=x+\varepsilon\Pi F_1(x,y)$, а також оцінку

$$\left|x+\varepsilon\Pi F_1(x,y)\right| \le \left(1+h\|F_1\|_1\right)(1+|x|),$$

які й доводять лему.

Лема 10. *Для довільного* $T>0$ *існують такі константи* ε_T *та* A_T, *що*

$$\mathbb{E}_{x,y}\left\{\left|x_\varepsilon(t)+\varepsilon\Pi F_1(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t))-x_\varepsilon(s)-\varepsilon\Pi F_1(F_1(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t)))\right|^2 \,\Big|\, \mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\right\} \le$$

$$\le (t-s)A_T\left(1+|x(s)|^2\right) \tag{54}$$

при довільних $s\in[0,T]$, $t\in[s,T]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_T)$, $x\in\mathbb{R}^m$ *та* $y\in\mathbb{Y}$.

Доведення випливає з формули (53) та зображення

$$\mathbb{E}_{x,y}\left\{v(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t))\,\Big|\,\mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\right\} = \mathbb{E}_{x_\varepsilon(s),y_\varepsilon(s)}v(x_\varepsilon(t-s),y_\varepsilon(t-s))$$

для будь-якого $v\in\mathbb{W}_2$.

Визначимо вектор

$$b(x) = \int_{\mathbb{Y}} F_2(x,y)\mu(dy) + \int_{\mathbb{Y}}[\Pi DF_1(x,y)F_1(x,y)]\mu(dy) -$$

$$- \int_{\mathbb{Y}}[DF_1(x,y)]g_1(x,y)\mu(dy)$$

та симетричну матрицю $A(x)=\{a_{i,j}(x)\}_{i,j=1}^m$ за допомогою формули

$$\frac12(A(x)c,c) = \int_{\mathbb{Y}}(F_1(x,y),c)(\Pi F_1(x,y),c)\mu(dy) -$$

$$- \int_{\mathbb{Y}}(g_1(x,y),c)\left(f_1(x,y)+\frac12 a(y)g_1(x,y),c\right)\mu(dy),$$

де c — довільний вектор з $\mathbb{R}^m$. За побудовою для координат $b_j(x)$ вектора $b(x)$ та елементів матриці $A(x)$ вірне співвідношення

$$b_j\in\mathbb{W}_1,\quad |\nabla b_j|\in\mathbb{W}_1,\quad a_{ij}\in\mathbb{W}_2,\quad |\nabla a_{ij}|\in\mathbb{W}_1,\quad \|D\nabla a_{ij}\|\in\mathbb{W}_1$$

для будь-яких $i,j=\overline{1,m}$.

Лема 11. *Нехай* $v=v_0+\varepsilon v_1+\varepsilon^2$ *є функціоналом з леми 7, а* $u(x,y)$ *задовольняє рівняння* $Qu+F=0$, *де*

$$F(x,y) = \left(\nabla v_0(x), F_2(x,y)+[\Pi DF_1(x,y)]F_1(x,y)-\right.$$

$$\left.-[DF_1(x,y)]g_1(x,y)-b(x)\right) + \left([D\nabla v_0(x)]F_1(x,y),\Pi F_1(x,y)\right) -$$

$$-\left(\left[D\nabla v_0(x)\right]g_1(x,y), f_1(x,y)\right) + \frac{1}{2}a(y)g_1(x,y)\Big) - \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left[A(x)D\nabla v_0(x)\right].$$

Тоді $\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v \in \mathbb{V}_p$, $\sup_{0<\varepsilon<1}\left\|\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v\right\|_p < \infty$ *та для всіх* $y \in \mathbb{Y}$, $x \in \mathbb{R}^m$:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v(x,y) = \mathcal{L}_0 v_0(x),$$

де

$$\mathcal{L}_0 v_0(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Sp} A(x)D\nabla v_0(x) + (\nabla v_0(x), b(x)).$$

Доведення. За побудовою матриці $A(x)$ та вектора $b(x)$ виконується рівність

$$\int_{\mathbb{Y}} F(x,y)\mu(dy) = 0.$$

Тому за альтернативою Фредгольма рівняння $Qu + F = 0$ має розв'язок, який можна записати у вигляді $u(x,y) = \Pi F(x,y)$, і тоді твердження леми 11 можна одержати з леми 5, оскільки

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v(x,y) = \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\left\{A(x)D\nabla v_0(x) + (\nabla v_0(x), b(x)) + \right.$$
$$\left. + \varepsilon r_{1\varepsilon}(x,y) + r_{2\varepsilon}(x,y) + r_{3\varepsilon}(x,y)\right\}. \tag{55}$$

Нижче доведемо, що матриця $A(x)$ невід'ємно визначена і тоді оператор $\mathcal{L}_0$ з коефіцієнтами (54) є інфінітезимальним оператором дифузійного марковського процесу $\{\bar{x}(t),\ t \geq 0\}$, який заданий на деякому ймовірнісному просторі.

Доведемо, що для сім'ї процесів $\{x_\varepsilon(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ виконуються умови теореми 5.

Теорема 7. *Нехай виконуються згадані вище обмеження. Тоді при довільному* $T >> 0$ *випадкові процеси* $\{x_\varepsilon(t),\ t \in [0, T]\}$ *при* $\varepsilon \to 0$ *слабко збігаються до дифузійного марковського процесу* $\{\bar{x}(t),\ t \in [0, T]\}$ *з інфінітезимальним оператором* $\mathcal{L}_0$.

Доведення. Визначимо вектор-функцію

$$\varphi(x, y, \varepsilon) = x + \varepsilon \Pi F_1(x, y),$$

яка дозволяє для деякого $\varepsilon_1 > 0$ та довільних $r > 0$, $T > 0$, $\rho > r$, $x \in S_r$, $y \in \mathbb{Y}$ та $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ записати нерівність

$$\mathbb{P}_{x,y}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T}\left|x_\varepsilon(t) - \varphi(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), \varepsilon)\right| \geq \rho\right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}_{x,y}\left\{\varepsilon h(1 + \|F_1\|_1)\sup_{0 \leq t \leq T}|x_\varepsilon(t)| \geq \rho\right\} \leq \frac{(1+r)h_2 e^{h_3 T/h_1}}{h_1\left(1 + \dfrac{\rho}{\varepsilon h(1 + \|F_1\|_1)}\right)}.$$

Таким чином, достатньо показати, що умови теореми 5 виконуються для $\tilde{x}_\varepsilon(t) = \varphi(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), \varepsilon)$. Формула (54) дозволяє записати

$$\mathbb{E}_{x,y}\left\{\left|\tilde{x}_\varepsilon(t) - \tilde{x}_\varepsilon(\tau)\right|^{3/2}\left|\tilde{x}_\varepsilon(\tau) - \tilde{x}_\varepsilon(s)\right|^{3/2}\right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{E}_{x,y}\left\{\left(\mathbb{E}_{x,y}\left\{\left|\tilde{x}_\varepsilon(t) - \tilde{x}_\varepsilon(\tau)\right|^2 \,\Big|\, \mathcal{F}^{\tau/\varepsilon^2}\right\}\right)^{3/4}\left|\tilde{x}_\varepsilon(\tau) - \tilde{x}_\varepsilon(s)\right|^{3/2}\right\} \leq$$

$$\leq A_T^{3/4}(t-\tau)^{3/4}\,\mathbb{E}_{x,y}\left\{\left(\mathbb{E}_{x,y}\left\{\left(1+|\tilde{x}_\varepsilon(\tau)|^6\right)\Big|\ \mathcal{F}^{\tau/\varepsilon^2}\right\}\right)^{1/4}\times\right.$$

$$\times\left(\mathbb{E}_{x,y}\left\{|\tilde{x}_\varepsilon(\tau)-\tilde{x}_\varepsilon(s)|^2\Big|\ \mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\right\}\right)^{3/4}\leq$$

$$\leq A_T^{3/2}(t-\tau)^{3/4}(\tau-s)^{3/4}\,\mathbb{E}_{x,y}\left\{\left(\mathbb{E}_{x,y}\left\{\left(1+|\tilde{x}_\varepsilon(\tau)|^6\right)\Big|\ \mathcal{F}^{\tau/\varepsilon^2}\right\}\right)^{1/4}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+|\tilde{x}_\varepsilon(s)|\right)^{3/2}\right\},$$

звідки випливає (47) для $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ з $\gamma=3/2$ та $\alpha=1/2$. Значить, сім'я $\{\tilde{x}_\varepsilon(t)\}$, а тоді і $\{x_\varepsilon(t)\}$, відносно слабко компактна. Нехай $\{x_{\varepsilon_k}(t)\}$ збігається до деякого випадкового процесу $\bar{x}(t)$ при $\varepsilon_k\to 0$. Розглянемо функціонал

$$u_\varepsilon(x,y)=(x,c)^2+2\varepsilon(x,c)(\Pi F_1(x,y),c)+\varepsilon^2 u(x,y),$$

де

$$u(x,y)=\Pi\Big\{2(F_1(x,y),c)(\Pi F_1(x,y),c)-2\Big(g_1(x,y),c)(f_1(x,y)+$$

$$+\frac{1}{2}a(y)g_1(x,y),c\Big)+2(x,c)(F_2(x,y),c)+2(x,c)([\Pi DF_1(x,y)]F_1(x,y),c)-$$

$$-2(x,c)([DF_1(x,y)]g_1(x,y),c)-(A(x)c,c)-2(x,c)(b(x),c)\Big\}.$$

На підставі лем 7 та 10 одержуємо

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)\,u_\varepsilon(x,y)=(A(x)c,c)+2(x,c)(b(x),c)+r_{4\varepsilon}(x,y),$$

де $r_{4\varepsilon}\in\mathbb{W}_2$; $\sup_{0<\varepsilon<1}\|r_{4\varepsilon}\|_2<\infty$ та $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}r_{4\varepsilon}(x,y)=0$ для всіх $x\in\mathbb{R}^m$ і $y\in\mathbb{Y}$.

Нехай

$$\check{v}_\varepsilon(x,y)=(x,c)+\varepsilon(\Pi F_1(x,y),c)+\varepsilon^2\check{u}(x,y),$$

де

$$\check{u}(x,y)=\Pi\Big\{(F_2(x,y),c)+([\Pi DF_1(x,y)]F_1(x,y),c)-$$

$$-([DF_1(x,y)]g_1(x,y),c)-(b(x),c)\Big\}.$$

За побудовою

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)\,\check{v}_\varepsilon(x,y)=(b(x),c)+r_{5\varepsilon}(x,y),$$

причому $r_{5\varepsilon}\in\mathbb{W}_2$; $\sup_{0<\varepsilon<1}\|r_{5\varepsilon}\|_2<\infty$ та $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}r_{5\varepsilon}(x,y)=0$ для всіх $x\in\in\mathbb{R}^m$ і $y\in\mathbb{Y}$.

Далі використаємо формулу

$$\mathbb{E}_{x,y}\left\{(\bar{x}(t)-x,c)^2\right\}=\mathbb{E}_{x,y}\left\{(\bar{x}(t),c)^2\right\}-(x,c)^2-$$

$$-2(x,c)\Big(\mathbb{E}_{x,y}\{(\bar{x}(t),c)-(x,c)\}=\lim_{\varepsilon_k\downarrow 0}\left\{\mathbb{E}_{x,y}\check{u}_{\varepsilon_k}\left(x_{\varepsilon_k}(t),y_{\varepsilon_k}(t)\right)-\check{u}_{\varepsilon_k}(x,y)\right\}-$$

$$-2(x,c)\lim_{\varepsilon_k\downarrow 0}\left\{\mathbb{E}_{x,y}\check{v}_{\varepsilon_k}\left(x_{\varepsilon_k}(t),y_{\varepsilon_k}(t)\right)-\check{v}_{\varepsilon_k}(x,y)\right\}.$$

Значить, для довільних $t\geq 0$

$$0 \le \mathbb{E}_{x,y}\left\{(\bar{x}(t)-x,c)^2\right\} = \int_0^t \mathbb{E}_{x,y}\{(A(\bar{x}(s)c,c))ds + $$

$$+ 2\int_0^t \mathbb{E}_{x,y}\{(\bar{x}(s),c)(b(\bar{x}(s)),c)\}ds - 2(x,c)\int_0^t \mathbb{E}_{x,y}\{(b(\bar{x}(s)),c)\}ds$$

і тоді

$$(A(x)c,c) = \frac{d}{dt}\mathbb{E}_{x,y}\left\{(\bar{x}(t)-x,c)^2\right\}\Big|_{t=0} \ge 0$$

для довільних $x \in \mathbb{R}^m$ та $c \in \mathbb{R}^m$. Таким чином, симетрична матриця $A(x)$ невід'ємно визначена і тоді існує така невід'ємно визначена симетрична матриця $\overline{A}(x)$, що $(\overline{A}(x))^2 = A(x)$.

Нехай тепер $v_0(x)$ має компактний носій та дві неперервні похідні, v_1 та u задовольняють умови леми 10, а $v_\varepsilon = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 u$. Тоді з леми 10 маємо рівність

$$\mathbb{E}_{x,y}v_\varepsilon(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t)) = v_\varepsilon(x,y) + \int_0^t \mathbb{E}_{x,y}\left\{\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau),y_\varepsilon(\tau))\right\}d\tau =$$

$$= v_\varepsilon(x,y) + \int_0^t \mathbb{E}_{x,y}\{\mathcal{L}_0 v_0(x_\varepsilon(\tau))\}d\tau + \int_0^t \mathbb{E}_{x,y}\{\hat{r}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau),y_\varepsilon(\tau))\}d\tau,$$

де $\hat{r}_\varepsilon \in \mathbb{W}_0$, $\sup_{0<\varepsilon<1}\|\hat{r}_\varepsilon\|_2 < \infty$ та $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\hat{r}_\varepsilon(x,y) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \in \mathbb{Y}$.

Далі

$$\mathbb{E}_{x,y}v_\varepsilon(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t)) - \mathbb{E}_{x,y}v_\varepsilon(x_\varepsilon(s),y_\varepsilon(s)) =$$

$$= \mathbb{E}_{x,y}v_0(x_\varepsilon(t)) - \mathbb{E}_{x,y}v_0(x_\varepsilon(s)) + \varepsilon\left[\mathbb{E}_{x,y}[\gamma(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t)) - \gamma(x_\varepsilon(s),y_\varepsilon(s))]\right],$$

$$\int_0^t \mathbb{E}_{x,y}\left\{\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau),y_\varepsilon(\tau))\right\}d\tau = \int_0^t \mathbb{E}_{x,y}\{\mathcal{L}_0 v_0(x_\varepsilon(\tau))\}d\tau +$$

$$+ \int_0^t \mathbb{E}_{x,y}\{\hat{r}_\varepsilon(x_\varepsilon(\tau),y_\varepsilon(\tau))\}d\tau,$$

де $\gamma(x,y) = v_1(x,y) + \varepsilon u(x,y)$, причому $v_1 \in \mathbb{W}_0$, $u \in \mathbb{W}_0$, оскільки $v_0(x)$ має компактний носій. Тому

$$\sup_{0\le s\le t\le T}\left|\mathbb{E}_{x,y}v_0(x_\varepsilon(\tau)) - \mathbb{E}_{x,y}v_0(x_\varepsilon(s)) - \int_0^t \mathbb{E}_{x,y}\{\mathcal{L}_0 v_0(x_\varepsilon(\tau))\}d\tau\right| = o(\varepsilon)$$

для всіх $T > 0$, $x \in \mathbb{R}^m$ та $y \in \mathbb{Y}$. Звідси випливає, що граничний випадковий процес $\bar{x}(t)$ задовольняє стохастичне рівняння Іто

$$d\bar{x} = b(\bar{x})dt + \overline{A}(\bar{x})dw(t), \tag{56}$$

де $\{w(t)\}$ — стандартний процес броунівського руху в $\mathbb{R}^m$. Коефіцієнти рівняння (56) завдяки згаданим вище обмеженням на функції $f_j(x,y)$ та $g_j(x,y)$, $j = 1, 2$, задовольняють глобальну умову Ліпшица і тому для довільних $x \in \in \mathbb{R}^m$ рівняння (56) має єдиний розв'язок початкової задачі $\bar{x}(0) = x$. Таким чином, послідовність $\{x_\varepsilon(t)\}$ при $\varepsilon \to 0$ слабко збігається до єдиного граничного випадкового процесу $\{\bar{x}(t)\}$, який задовольняє (56). Теорема 7 доведена.

6. Слабка збіжність нормованих відхилень. Повернемося до системи рівнянь (5), (6). Позначимо

$$x_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1/2}\left[x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - u(t, x)\right], \tag{57}$$

де $\{x(t)\}$ — розв'язок системи (5), (6) за початковими даними $x(0) = x$, а $u(t, x)$ — розв'язок усередненого рівняння (21) за початковою умовою $u(0) = x$. Випадковий процес $\{x_\varepsilon(t)\}$ будемо називати нормованим відхиленням розв'язку імпульсної системи від відповідних розв'язків усередненого рівняння.

Теорема 8. *Якщо виконуються умови пп. 4 та 5, то нормовані відхилення* (57) $\{x_\varepsilon(t),\ 0 \le t \le T\}$ *для довільних* $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{Y}$ *та* $T > 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *слабко збігаються до дифузійного марковського процесу* $\{x(t),\ 0 \le t \le T\}$, *який задовольняє стохастичне рівняння Іто*

$$dx = Db_1(u(t, x))x\,dt + \bar{A}(u(t, x))\,dw(t) \tag{58}$$

з початковою умовою $x(0) = 0$, *де симетрична невід'ємно визначена* $\bar{A}(x)$ *визначається рівністю*

$$|\bar{A}(x)c|^2 = 2\int_{\mathbb{Y}}\Big\{(F_1(x, y) - b_1(x), c)(\Pi F_1(x, y), c) -$$

$$-(g_1(x, y), c)\left(f_1(x, y) - b_1(x) + \frac{1}{2}a(y)g_1(x, y), c\right)\Big\}\mu(dy) \tag{59}$$

з довільним вектором $c \in \mathbb{R}^m$, $\{w(t)\}$ — *стандартний процес броунівського руху в* $\mathbb{R}^m$.

Доведення. Система рівнянь в $\mathbb{R}^{2m}$ для пари $\{x_\varepsilon(t),\ u(t, x)\}$ може бути записана у вигляді

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = \varepsilon^{-1/2}\big(f_1(u, y^\varepsilon(t)) - b_1(u)\big) + (Df_1)\big(u, y^\varepsilon(t)\big)x_\varepsilon +$$

$$+ \int_0^1 \Big[(Df_1)\big(s\varepsilon^{1/2}x_\varepsilon + u, y^\varepsilon(t)\big) - (Df_1)\big(u, y^\varepsilon(t)\big)\Big]ds\,x_\varepsilon +$$

$$+ \varepsilon^{1/2}\bar{f}_2\big(\varepsilon^{1/2}x_\varepsilon + u, y^\varepsilon(t), \varepsilon\big)$$

для $t \in (\varepsilon\tau_{j-1}, \varepsilon\tau_j)$,

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t-) + \varepsilon^{1/2}g_1\big(u(t, x), y^\varepsilon(t-)\big) + \varepsilon(Dg_1)(u(t, x), y(t-))x_\varepsilon(t-) +$$

$$+ \varepsilon\int_0^1 \Big[(Dg_1)\big(s\varepsilon^{1/2}x_\varepsilon(t-) + u(t, x), y^\varepsilon(t-)\big) - (Dg_1)\big(u(t, x), y^\varepsilon(t-)\big)\Big]ds\,x_\varepsilon(t-) +$$

$$+ \varepsilon^{3/2}\bar{g}_2\big(\varepsilon^{1/2}x_\varepsilon(t-) + u(t, x), y^\varepsilon(t-), \varepsilon\big)$$

для всіх $t \in \{\varepsilon\tau_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ з початковою умовою

$$x_\varepsilon(0) = 0, \qquad u(0, x) = x,$$

де

$$\bar{f}_2(x, y, \varepsilon) = f_2(x, y) + f_3(x, y, \varepsilon),$$
$$\bar{g}_2(x, y, \varepsilon) = g_2(x, y) + g_3(x, y, \varepsilon).$$

Легко бачити, що для аналізу цієї системи можна використати результати, викладені в п. 5, якщо замінити ε на $\sqrt{\varepsilon}$, f_1 — на вектор

$$\begin{pmatrix} f_1(u, y) - b_1(u) \\ 0 \end{pmatrix};$$

g_1 — на вектор

$$\begin{pmatrix} g_1(u, y) \\ 0 \end{pmatrix};$$

f_2 — на вектор

$$\begin{pmatrix} [\,Df_1(u, y)\,]x \\ b_1(u) \end{pmatrix};$$

g_2 — на вектор

$$\begin{pmatrix} [\,Dg_1(u, y)\,]x \\ 0 \end{pmatrix},$$

оскільки решта доданків прямують до нуля при $\varepsilon \to 0$ і на обчислення інфінітезимального оператора граничного дифузійного процесу не впливають. Залишається використати теорему 7 та вирази для зносу і дифузії в рівнянні (55) з урахуванням зроблених вище зауважень. Теорема 8 доведена.

7. Аналіз стійкості лінійних систем за граничним рівнянням. Розглянемо лінійну імпульсну систему

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A_1(y(t))x + \varepsilon^2 A_2(y(t))x \tag{60}$$

для $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j \in \mathbb{N}$,

$$x(t) = x(t-) + \varepsilon B_1(y(t-))x(t-) + \varepsilon^2 B_2(y(t-))x(t-), \tag{61}$$

для $t \in \{\tau_j,\ j \in \mathbb{N}\}$. У відповідності з результатами п. 1 достатньою умовою експоненціальної p-стійкості (60), (61) є асимптотична стійкість детермінованого рівняння

$$\frac{du}{dt} = \overline{G}u,$$

де

$$\overline{G} = \int\limits_{\mathbb{Y}} [\,A_1(y) + a(y)B_1(y)\,]\mu(dy), \tag{62}$$

тобто

$$\sigma(\overline{G}) \subset \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0 \,\}.$$

Нехай тепер $\overline{G} \equiv 0$. Зробимо заміну у (60), (61) за часом та перейдемо до випадкових процесів $x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t/\varepsilon^2)$ та $y_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(t/\varepsilon^2)$. Позначимо

$$G_j(t) = A_j(t) + a(y)B_j(y), \quad j = 1, 2,$$

та випишемо дифузійне рівняння для слабкої границі $\{\,\overline{x}(t)\}$ процесу $\{x_\varepsilon(t)\}$

$$d\overline{x} = B\overline{x} + \sum_{j=1}^{m} c_j \overline{x}\, dw_j(t), \tag{63}$$

де $\{w_1(t)\}, \ldots, \{w_m(t)\}$ — незалежні скалярні стандартні вінерівські процеси,

$$\mathbb{B} := \int\limits_{\mathbb{Y}} \{ G_2(y) + [\Pi G_1(y)] G_1(y) - G_1(y) B_1(y) \} \mu(dy),$$

дійсні матриці $c_1, c_2, \ldots, c_m$ визначаються формулою

$$\sum_{j=1}^{m} c_j^T q c_j =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{Y}} \left\{ G_1^T(y) q [\Pi G_1(y) - B_1(y)] + a(y) B_1^T(y) q B_1(y) + [\Pi G_1(y) - B_1(y)]^T q G_1(y) \right\} \mu(dy)$$

з довільною симетричною матрицею q.

Теорема 9. *Нехай тривіальний розв'язок* (63) *експоненціально p-стійкий при деякому $p > 0$. Тоді існує таке додатне число $\varepsilon_0 > 0$, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ система* (60), (61) *експоненціально p-стійка, тобто*

$$\sup_{y \in \mathbb{Y}} \mathbb{E}_{x,y} |x_\varepsilon(t)| \leq M e^{-rt} |x|^p$$

для деяких $r > 0$, $M > 0$ та всіх $x \in \mathbb{R}^m$.

Доведення. Розглянемо функцію Ляпунова

$$v_0(x) = \int\limits_0^T \mathbb{E}_x |\bar{x}(t)|^p \, dt, \tag{64}$$

де $\{\bar{x}(t)\}$ — розв'язок (63). У відповідності з результатами [5] для достатньо великого $T > 0$ можна одержати оцінки

$$c_1 |x|^p \leq v_0(x) \leq c_2 |x|^p, \quad c_1 > 0, \tag{65}$$

$$\mathcal{L}^{(63)} v_0(x) \leq -c_3 |x|^p, \quad c_3 > 0, \tag{66}$$

$$\| D^j v_0(x) \| \leq k |x|^{p-1}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{67}$$

де D^j — похідні порядку j; $\mathcal{L}^{(63)}$ — інфінітезимальний оператор марковського процесу $\bar{x}(t)$.

Далі будуємо функцію Ляпунова

$$v(x, y) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x, y) + \varepsilon^2 v_2(x, y),$$

де

$$v_1(x, y) = (\Pi G_1(y) x, \nabla) v_0(x),$$

а $v_2(x, y)$ задовольняє рівняння

$$Q v_2(x, y) = -\Big\{ (G_1(y) x, \nabla) v_1(x, y) + (G_2(y) x, \nabla) v_0(x) +$$

$$+ \frac{1}{2} (B_1(y) x, \nabla)^2 v_0(x) + \mathcal{L}^{(63)} v_0(x). \tag{68}$$

Розв'язок цього рівняння існує, оскільки завдяки конструкції $B, G_1, \ldots, G_m$ та функції $v_0(x)$ і $v_1(x, y)$ права частина (68) у середньому за мірою $\mu(dy)$ дорівнює нулю. Завдяки нерівностям (65) – (67) для довільних $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{Y}$ та $j = 1, 2$ виконуються нерівності

$$|v_j(x, y)| \le k_1 |x|^p, \tag{69}$$

$$|\nabla v_j(x, y)| \le k_1 |x|^{p-1} \tag{70}$$

при деякому $k_1 > 0$. Таким чином,

$$\tilde{L}(\varepsilon) v(x, y) = \mathcal{L}^{(63)} v_0(x) + r(x, y, \varepsilon),$$

причому

$$|r(x, y, \varepsilon)| \le \alpha(\varepsilon) |x|^p, \tag{71}$$

де $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(\varepsilon) = 0$, $\tilde{L}(\varepsilon)$ — слабкий інфінітезимальний оператор пари $\{x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\}$. З (65) – (71) можна одержати нерівності

$$c_4 |x|^p \le v(x, y) \le c_5 |x|^p, \quad c_4 > 0, \tag{72}$$

$$\tilde{L}(\varepsilon) v(x, y) = -c_6 |x|^p, \quad c_6 > 0, \tag{73}$$

для довільних $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{Y}$ та деяких $c_5 > c_4 > 0$, $c_6 > 0$ та достатньо малого $\varepsilon_0 > 0$. Тоді

$$\mathbb{E}_{x,y} |x_\varepsilon(t)|^p \le c_4^{-1} v(x, y) + c_4^{-1} \int_0^t \mathbb{E}_{x,y} \{ \tilde{L}(\varepsilon) v(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)) \} ds \le$$

$$\le \frac{c_5}{c_6} |x|^p - \frac{c_6}{c_4} \int_0^t \mathbb{E}_{x,y} |x_\varepsilon(s)|^p ds.$$

Звідки випливає твердження теореми 9.

Модельна задача. Розглянемо імпульсну систему

$$\frac{dx}{dt} = y(t) A x \tag{74}$$

для $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j \in \mathbb{N}$, а при $t \in \{\tau_j, j \in \mathbb{N}\}$

$$x(t) = (I + \varepsilon y(t-) c) x(t-),$$

де $\{y(t)\}$ — марковський процес з двома станами $y_1 = 1$, $y_2 = -1$ та інфінітезимальним оператором

$$Q = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{pmatrix}.$$

Тут $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Інваріантна міра у даному випадку є рядком $\mu = \{\beta, \alpha\}$, а потенціальний оператор Π визначено на векторах вигляду $c(\alpha, -\beta)^T$, $c \in \mathbb{R}$ рівністю

$$\Pi c \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}.$$

Інтенсивність стрибків також є вектором з координатами $a(y_1) = \alpha$, $a(y_2) = \beta$. Таким чином, $A_1(y) = yA$, $B(y) = yC$, $A_2(y) = B_2(y) = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $G_1(y_1) = (A + \alpha C)$, $G_1(y_2) = -(A + \beta C)$,

$$\int_{\mathbb{Y}} G_1(y) \mu(dy) = (\beta y_1 + \alpha y_2) A + \alpha\beta (y_1 + y_2) c = (\beta - \alpha) A.$$

Достатньою умовою експоненціальної стійкості є розташування спектра матриці $(\beta - \alpha)A$ у лівій півплощині $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda < 0\}$.

Нехай тепер $\beta = \alpha = 1/2$. Тоді $G_1 = 0$, $\Pi G_1(y_1) = G_2(y_2) = -(A + C/2)$,

$$\mathbb{B} = \int_{\mathbb{Y}} [\Pi G_1(y)] G_1(y) \mu(dy) - \int_{\mathbb{Y}} G_1(y) B_1(y) \mu(dy) =$$

$$= \left(A + \frac{1}{2}C\right)^2 - \left(A + \frac{1}{2}C\right)C = \left(A + \frac{1}{2}C\right)\left(A - \frac{1}{2}C\right),$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_j^T q c_j = \int_{\mathbb{Y}} \Big\{ G_1^T(y) q [\Pi G_1(y) - B_1(y)] + a(y) B_1^T(y) q B_1(y) +$$

$$+ [\Pi G_1(y) - B_1(y)]^T q G_1(y) \Big\} \mu(dy) = \left(A + \frac{1}{2}C\right)^T q \left(A - \frac{1}{2}C\right) +$$

$$+ C^T q C + \left(A - \frac{1}{2}C\right)^T q \left(A + \frac{1}{2}C\right) = 2A^T q A + \frac{1}{2} C^T q C.$$

Граничне стохастичне рівняння має вигляд

$$d\overline{x} = \left(A + \frac{1}{2}C\right)\left(A - \frac{1}{2}C\right)\overline{x}\,dt + \sqrt{2}A\overline{x}\,dw_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}C\overline{x}\,dw_2(t),$$

де $\{w_1(t)\}$ та $\{w_2(t)\}$ — незалежні скалярні процеси броунівського руху.

Умовою середньоквадратичної асимптотичної стійкості [5] цього рівняння є додатна визначеність матриці q, яка задовольняє рівняння

$$\left(A - \frac{1}{2}C\right)^T \left(A + \frac{1}{2}C\right)^T q + q\left(A + \frac{1}{2}C\right)\left(A - \frac{1}{2}C\right) + 2A^T q A + \frac{1}{2} C^T q C = -I,$$

де I — матрична одиниця.

Зауваження. Теорема 1 (принцип усереднення) даної роботи співпадає з результатом роботи В. В. Анісімова [12], однак доведення теореми 1 базується на іншій методиці, а саме, при доведенні допоміжної леми 2 використовується функція Ляпунова $v(x) = |x|^2$ [6]. Аналіз стійкості лінійних систем за граничним рівнянням проведено за допомогою функцій Ляпунова спеціального вигляду [1, 4].

16. *Свердан М. Л., Царков Є. Ф., Ясинський В. К.* Асимптотична поведінка розв'язків імпульсних систем з малим параметром та марковськими перемиканнями. I. Рівномірна обмеженість розв'язків // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, № 10. – С. 1375–1385.
17. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 351 с.
18. *Царков Є. Ф., Ясинський В. К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Ориентир, 1992. – 328 с.

Одержано 20.09.95