УДК 517.947

В. П. Бурский (Ін-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

We study a boundary-value problems for a homogeneous partial differential equation of the second order with arbitrary constant complex coefficients and a homogeneous symbol in a bounded domain with smooth boundary. Necessary and sufficient conditions for the solvability of the Cauchy problem are obtained. These conditions are written in the form of a moment problem on the boundary of the domain and applied to the study of boundary-value problems. This moment problem is solved in the case of a disk.

Вивчаються крайові задачі для однорідного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку з довільними постійними коефіцієнтами та однорідним символом в обмеженій області з гладкою межею. Одержані необхідні й достатні умови розв'язності задачі Коші, які зображаються у вигляді деякої проблеми моментів на межі області та застосовуються до вивчення граничних задач. Ця проблема моментів вивчається у випадку кола.

Настоящая работа является продолжением [1, 2]; результаты [2] переносятся с эллиптического случая на случай общего уравнения.

Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу Коши

$$Lu = au''_{x_1x_1} + bu''_{x_1x_2} + cu''_{x_2x_2} = 0, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \psi, \quad u'_\nu\big|_{\partial\Omega} = \chi, \tag{2}$$

в соболевском пространстве $H^m(\Omega) = W_2^m(\Omega)$; $m \geq 2$, где a, b, c — постоянные комплексные коэффициенты, $\psi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\chi \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, ν — внешняя нормаль. Уравнение (1) будем записывать также в виде

$$\langle\nabla, a^1\rangle\langle\nabla, a^2\rangle u = 0,$$

где $a^j = (a_1^j, a_2^j)$, $j = 1, 2,$ — единичные комплексные векторы, $\langle a, b\rangle = a \cdot \overline{b} = a_1\overline{b}_1 + a_2\overline{b}_2$.

Область Ω будем предполагать L^+-выпуклой для носителей [3], где $L^+ = \overline{a}\partial^2_{x_1x_1} + \overline{b}\partial^2_{x_1x_2} + \overline{c}\partial^2_{x_2x_2}$ — формально сопряженная операция к L, т. е. выпуклой по вещественным характеристикам, и, кроме того, предположим, что в точках касания вещественных характеристик к границе $\partial\Omega$ кривизна границы ненулевая. В частности, для эллиптического оператора L область может быть любой.

Уравнение (1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{pmatrix} L_1 & -L_2 \\ L_2 & L_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{3}$$

где L_1, L_2 — однородные дифференциальные операторы второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами, $u_1 = \operatorname{Re} u$, $u_2 = \operatorname{Im} u$.

Введем векторы $\tilde{a}^1 = (-\overline{a}_2^1, \overline{a}_1^1)$, $\tilde{a}^2 = (-\overline{a}_2^2, \overline{a}_1^2)$, $\langle\tilde{a}^j, a^j\rangle = 0$, множества $\Lambda_j = \{\lambda\tilde{a}^j \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, $j = 1, 2$; $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, символ $l(\xi) = a\xi_1^2 + b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2$ оператора L и корни λ_1, λ_2 полинома $l(1, \lambda)$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) эллиптический, когда $l(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, что равносильно эллиптичности системы (3) по Петровскому;

2) правильно эллиптический, когда корни λ_1, λ_2 находятся в разных полуплоскостях $\mathbb{C}$ (один в верхней, другой в нижней);

3) гиперболический, когда корни λ_1, λ_2 вещественны и различны;

4) смешанный, когда один корень вещественный, а другой нет;

5) вырожденный, кода корни λ_1, λ_2 совпадают;

6) вырожденный эллиптический, когда число $\lambda_1 = \lambda_2$ не вещественно;

7) вырожденный вещественный, когда число $\lambda_1 = \lambda_2$ вещественно.

Задача (1), (2) переопределена, поэтому установим условия связи между функциями ψ и χ, порожденной уравнением (1).

Теорема 1. *Для того чтобы задача* (1), (2) *имела в пространстве* $H^m(\Omega)$ *решение, необходимо, чтобы функции*

$$P = -l(\nu(x))\psi(x) \in H^{m-1/2}(\partial\Omega),$$
$$C = l(\nu(x))\chi(x) + \left[b\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) - 2(a-c)\nu_1\nu_2\right]\psi'_s + \tag{4}$$
$$+ k\left[(a-c)\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) + 2b\nu_1\nu_2\right]\psi \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$$

удовлетворяли условию

$$\forall\, \xi \in \Lambda \quad \int\limits_{\partial\Omega} [iP(x(s))(-\nu(x)\cdot\xi) + C(x)]e^{-ix\cdot\xi}\, ds = 0, \tag{5}$$

где s *— натуральный параметр, возрастающий в направлении вектора* $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$,

$$\frac{d}{d\zeta} = \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\partial\Omega},$$

$-k = |\nu'_s| = |\tau'_s|$ *— кривизна кривой* $\partial\Omega$.

Доказательство теоремы 1 содержится в [1], причем ни эллиптичность, ни невырожденность значения здесь не имеют. Заметим, что в вырожденном случае два набора условий (5) превращаются в один, но к нему можно добавить еще один набор условий следующим образом.

Пусть $\tilde{u} \in H^m(\mathbb{R}^2)$ — любое продолжение решения $u(x)$ задачи (1), (2), θ_Ω — характеристическая функция области Ω. Из формулы Грина [1]

$$\int\limits_{\Omega} Lu\cdot\overline{v}\, dx - \int\limits_{\Omega} u\cdot\overline{L^{+}v}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} [P\overline{v}'_\nu + C\overline{v}]\, ds_x, \tag{5'}$$

учитывая, что $Lu = 0$, перебрасыванием производных в $\mathbb{R}^2$ получаем

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^2} L(\tilde{u}\theta_\Omega)\overline{v}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} [P\overline{v}'_\nu + C\overline{v}]\, ds,$$

откуда после подстановки $v = \exp(ix\cdot\xi)$ имеем

$$-l(\xi)\,\widehat{\tilde{u}\theta_\Omega}(\xi) = G(\xi), \tag{6}$$

где $\hat{w}$ — преобразование Фурье функции w, а $G(\xi)$ — левая часть равенства (5). Отсюда, в частности, следует равенство (5) при $\xi \in \Lambda$ в силу целости функции $\widehat{\tilde{u}\theta_\Omega}(\xi)$.

В вырожденном случае $a^1 = a^2 = a$ разложим вектор $\xi = \mu a + \lambda \tilde{a}$ по векторам a и $\tilde{a} = (-\bar{a}_2, \bar{a}_1)$ в плоскости $\mathbb{C}^2$. Функция $l(\xi) = \mu^2 \langle a, a \rangle$ имеет в точке $\mu = 0$ нуль второго порядка, поэтому

$$\left.\frac{\partial G(\xi)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = 0$$

в силу равенства (6). В результате получаем условие

$$\forall\, \xi \in \Lambda \quad \int\limits_{\partial\Omega} [P(x(s))(-i\nu \cdot a) + (-ix \cdot a)(-ix \cdot \xi) P + C(-ix \cdot a)] e^{-ix\cdot\xi}\, ds = 0. \qquad (7)$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *В вырожденном случае, для того чтобы задача* (1), (2) *имела в пространстве* $H^m(\Omega)$ *решение, необходимо, чтобы функции* P *и* C, *заданные равенствами* (4), *удовлетворяли условиям* (5) *и* (7).

Рассмотрим вопрос о достаточности этих условий. Сформулируем утверждение с неопределенными пока показателями гладкости.

Утверждение 1. *Пусть функции* $P \in H^{m-q}(\partial\Omega)$, $C \in H^{m-q-1}(\partial\Omega)$, $m \geq$ $\geq m_1$, *удовлетворяют соотношениям* (5) *или в вырожденном случае соотношениям* (5) *и* (7). *Тогда существует единственное решение* $u \in H^m(\Omega)$ *задачи* (1), (2), *граничные данные* $\psi \in H^{m-q}(\partial\Omega)$, $\chi \in H^{m-q-1}(\partial\Omega)$ *которого связаны с функциями* $P(x)$, $C(x)$ *соотношениями* (4).

В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 3. *В эллиптическом случае справедливо утверждение* 3, *где* $q = 1/2$, $m_1 = 2$.

В [4] для случая $\Omega = K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < 1\}$ доказана такая теорема.

Теорема 4. *В гиперболическом случае, когда граничные данные* $\psi \in$ $\in H^m(\partial\Omega)$, $\chi \in H^{m-1}(\partial\Omega)$, $m \geq 3/2$, *уже имеют необходимую гладкость, тогда* $P \in H^m(\partial\Omega)$, $C \in H^{m-1}(\partial\Omega)$ *и справедливо утверждение* 1 ($q = 0$, $m_1 = 3/2$).

Пусть

$$u'_{\nu_*} = l(\nu(x))\, u'_\nu + \left[\frac{b}{2}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) - (a - c)\nu_1\nu_2\right] u'_\tau = l(\nu(x))\, u'_\nu - \frac{1}{2k}[l(\nu)]'_\tau\, u'_\tau$$

— производная по конормали на $\partial\Omega$ [2]. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Условие* (5) *эквивалентно паре условий*

$$\forall\, Q \in \mathbb{C}[z] \quad \int\limits_{\partial\Omega} \left[u'_{\nu_*} - (-1)^j \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau\right] Q\left(x\tilde{a}^j\right) ds = 0; \quad j = 1, 2, \qquad (8)$$

где $\Delta = \det(a^1 a^2)$, a^1, a^2 *— столбцы. Функции* $\kappa = u'_{\nu_*}$, $\gamma = u'_\tau$ *на* $\partial\Omega$ *имеют ту же гладкость, что и функция* C, *и наоборот, функция* C *имеет ту же гладкость, что и функция* κ *при не меньшей гладкости функции* γ.

Доказательство содержится в [2].

Отсюда, в частности, следует выполнение равенства

$$\int\limits_{\partial\Omega} \kappa\, ds = 0. \qquad (8')$$

Условия теоремы 6 позволяют избавиться от ограничительных априорных условий существования и гладкости следов ψ и χ в условиях теоремы 5 с помощью следующего утверждения.

Рассмотрим граничную задачу

$$u'_\tau\big|_{\partial\Omega} = \gamma,$$
$$u'_{\nu_*}\big|_{\partial\Omega} = \kappa. \tag{9}$$

Утверждение 2. *Пусть в невырожденном случае имеются две функции* κ *и* γ, *принадлежащие пространству* $H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, $m > m_1$, *и связанные условиями*

$$\forall\, Q \in \mathbb{C}[z] \quad \int\limits_{\partial\Omega}\left[\kappa - (-1)^j \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\right] Q\big(x\cdot\tilde{a}^j\big)\,ds = 0. \tag{10}$$

Тогда существуют функции $\psi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ *и* $\chi \in H^{m-m_2/2}(\partial\Omega)$, *связанные с функциями* κ *и* γ *соотношениями*

$$\kappa = l(\nu)\chi - \frac{1}{2k}[l(\nu(x))]'_\tau\,\psi'_s, \qquad \gamma = \psi'_s, \tag{11}$$

где $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ *в эллиптическом случае,* $m_1 = 3$ *в гиперболическом и смешанном случаях,* $m_2 = 2m_1 - 1 - \varepsilon(m)$; $\varepsilon(m) = +0$, $m \notin \mathbb{N}$, $\varepsilon(m) = 0$, $m \in \mathbb{N}$. *Здесь и ниже* $H^{l-0}(X) = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} H^{l-\varepsilon}(X)$ *— проективный предел.*

Аналогичное утверждение справедливо и в вырожденном случае. При этом $m_1 = 2$ в эллиптическом и $m_1 = 4$ в вещественном случаях.

Доказательство. Пусть $\Lambda_1 = \{\lambda\,\tilde{a}^1 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ — вещественная характеристика, т. е. корень λ_1 и векторы a^1 и $\tilde{a}^1$ вещественны. Положим в условии (10) при $j = 1$ $Q = Q_n$, а последовательность Q_n выберем сходящейся в пространстве регулярных мер $C'_0(\mathbb{R}^1)$ к мере Дирака $\delta(z - z_0)$, $z, z_0 \in \mathbb{R}$. Этот выбор возможен в силу плотности вложения пространства непрерывных функций $C_0(\mathbb{R}^1)$ с компактным носителем в пространство $L_2(\mathbb{R}^1)$ и теоремы Вейерштрасса.

Вложение $C_0(\mathbb{R}^1) \subset L_2(\mathbb{R}^1)$ является биморфизмом в категории линейных топологических пространств, и в силу точности функтора Hom получаем эпиморфность вложения $L_2(\mathbb{R}^1) \subset C'_0(\mathbb{R}^1)$, т. е. плотность образа [5]. Далее, в силу предположения $m > 2$ и теоремы вложения функция $\kappa + \overline{\Delta}\gamma/2$ непрерывна и даже гельдерова, поэтому можно переходить к пределу по n; в результате получаем условие

$$\forall\, z_0 \in \mathbb{R} \quad \int\limits_{\partial\Omega}\left[\kappa + \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\right]\delta\big(x\cdot\tilde{a}^1 - z_0\big)\,ds = 0,$$

которое означает, что

$$\left[\left|k\nu\cdot a^1\right|^{-1}\left(\kappa + \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\right)\right](s_1) + \left[\left|k\nu\cdot a^1\right|^{-1}\left(\kappa + \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\right)\right](s_2) = 0,$$

где s_1, s_2 — параметры точек пересечения характеристики $x\cdot\tilde{a}^1 = z_0$ с границей $\partial\Omega$. При $s = s_1 = s_2$ в точке касания характеристики с границей $\nu a^1 = 0$, поэтому $(\kappa + \overline{\Delta}\gamma/2)(s) = 0$. В этой же точке

$$-\frac{1}{k}[l(\nu)]'_s = \frac{\nu'_\tau a^1}{|\nu'_\tau|}\nu\overline{a}^2 + \frac{\nu'_\tau \overline{a}^2}{|\nu'_\tau|}\nu a^1 = (\tau \cdot a^1)(\nu \cdot a^2) = -\overline{\Delta}$$

и равно $\overline{\Delta}$ в точке касания $\nu \cdot a^1 = 0$. Получаем, что функция

$$\kappa - \frac{\gamma}{2k}[l(\nu(s))]'_s = 0$$

в точках касания характеристик с границей $\partial\Omega$, если эта функция непрерывна. Рассмотрим теперь функции

$$\chi(s) = \frac{1}{l(\nu(s))}\left\{\kappa - \frac{\gamma}{2k}[l(\nu(s))]'_s\right\}, \quad \psi = \int \gamma\, ds. \tag{11}$$

В окрестности точек касания гладкость функции χ по сравнению с κ понижается на $1 + \varepsilon(m)$. Для пространства C^l см. лемму Адамара [6], для пространства H^m с целым m это следует из ограниченности оператора Харди–Литтлвуда в $L_2(\Omega)$. В остальных точках границы гладкость сохраняется. Утверждение доказано.

Рассмотрим теперь вырожденный случай. Здесь условие (7) трансформируется в условие вида

$$\forall\, Q \in \mathbb{C}[z] \quad \int_{\partial\Omega} \left[u'_{\nu_*} x\overline{a} - \nu\overline{a}\,\nu\tilde{a}(\nu\overline{a} + \nu\tilde{a})u\right] Q(x\tilde{a})\, ds = 0, \tag{12}$$

где $\nu_* = \langle \nu, \overline{a} \rangle\, \overline{a}$, а условие (8) записывается в виде

$$\forall\, Q \in \mathbb{C}[z] \quad \int_{\partial\Omega} \left[u'_{\nu_*} Q(x \cdot \tilde{a})\right] ds = 0, \tag{13}$$

т. е. для граничных данных κ и $\gamma = \psi'_s$ имеем условия

$$\begin{gathered} \forall\, Q \quad \int_{\partial\Omega} [\kappa x\overline{a} - \nu\overline{a}\,\nu\tilde{a}(\nu\overline{a} + \nu\tilde{a})\psi]\, Q(x\tilde{a})\, ds = 0, \\ \forall\, Q \quad \int_{\partial\Omega} [\kappa Q(x \cdot \tilde{a})]\, ds = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Если заданы $\psi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\kappa \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, то, действуя так же, как и выше в утверждении 2, но применяя сначала последовательность $Q_n \to \delta(z - z_0)$, а затем $Q_n \to \delta'(z - z_0)$, получаем из равенства (11) для χ принадлежность $\chi \in H^{m-7/2}(\partial\Omega)$.

Доказано следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть в вырожденном случае имеются две функции* $\psi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\kappa \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, $m > m_1$, *связанные условиями* (14). *Тогда существует функция* $\chi \in H^{m-m_2/2}(\partial\Omega)$, *связанная с функциями* ψ *и* κ *равенством* (11). *Здесь* $m_1 = 2$ *в эллиптическом,* $m_1 = 4$ *в вещественном случае,* $m_2 = 2m_1 - 1 - \varepsilon(m)$.

Докажем теперь основную теорему о достаточности условий на данные Коши для разрешимости задачи Коши.

Теорема 6. *Пусть имеются две функции* $\psi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ *и* $\kappa \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, $m > m_1$, *связанные условиями* (10) *в невырожденном случае и условиями* (14) *в вырожденном случае, и пусть* $\gamma = \psi'_\zeta$. *Тогда существует единственное решение* $u \in H^{m-q}(\Omega)$ *задачи* (9) *для уравнения* (1). *В эллиптических случаях* $m_1 = 2$, $q = \varepsilon(m)$ *в гиперболическом и смешанном случаях* $m_1 = 3$, $q = 1 + \varepsilon(m)$ *в вещественном вырожденном* $m_1 = 4$, $q = 2 + \varepsilon(m)$.

Доказательство. 1. Из данных ψ и κ согласно утверждениям 2 и 3 можно восстановить функцию $\chi \in H^{m-m_2/2}(\partial\Omega)$, где

$$m_2 = \begin{cases} 3 & \text{в эллиптических случаях,} \\ 5 & \text{в гиперболическом и смешанном случаях,} \\ 7 & \text{в вырожденном вещественном случае.} \end{cases}$$

По функциям ψ и κ с помощью оператора продолжения (см., например, [7]) строим функцию $w \in H^k(\Omega)$, $k = m - m_2/2 + 3/2 > 2$, следами которой являются функции ψ и κ, т. е. $w|_{\partial\Omega} = \psi$, $w'_\nu|_{\partial\Omega} = \chi$.

Будем теперь искать решение $U \in H^k(\Omega)$ задачи

$$LU = -Lw, \quad U|_{\partial\Omega} = 0, \quad U'_\nu|_{\partial\Omega} = 0. \tag{15}$$

2. Решим сначала уравнение

$$L_0 U_0 = f \ (= -Lw) \tag{15'}$$

с минимальным оператором L_0 в $L_2(\Omega)$, порожденным операцией L.

Напомним, что уравнение (15′) разрешимо для $f \in L_2(\Omega)$, для которых

$$\int\limits_\Omega f(x)\overline{v(x)}\,dx = 0 \quad \forall v \in \ker \tilde{L}^+. \tag{16}$$

Здесь $\tilde{L}^+$ — максимальный оператор в $L_2(\Omega)$, порожденный операцией L^+, т. е. с символом $\bar{l}$. На самом деле условие (16) необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (15′), что следует из известной оценки $\|u\|_{L_2(\Omega)} \le C\|Lu\|_{L_2(\Omega)}$ для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ [8].

3. Для проверки выполнения условия (16) подставим в формулу Грина (5′) с максимальными операторами L и $\tilde{L}^+$ вместо функции u функцию w, принадлежащую ядру $\mathfrak{D}(L)$, а вместо v — функцию $\exp(\langle x, \xi\rangle i)$, $\xi \in \Lambda$, принадлежащую ядру $\ker \tilde{L}^+$. В силу теоремы 6 выполняется условие (5). Поэтому формула Грина преобразуется в равенство

$$\forall \xi \in \Lambda \quad \int\limits_\Omega Lw \exp(-i\langle x, \bar{\xi}\rangle)\,dx = 0. \tag{17}$$

В вырожденном случае из формулы (7) имеем равенство

$$\int\limits_\Omega Lw \exp(-i\langle x \cdot \tilde{a}\rangle)\, x \cdot a\,dx = 0. \tag{18}$$

4. В силу принятых предположений на область об L^+-выпуклости экспоненциальные решения вида $\exp(-i\langle x, \bar{\xi}\rangle)$, $\xi \in \Lambda$, в невырожденном случае и такие же решения плюс решения $\exp(-i\langle x \cdot \tilde{a}\rangle)\, x \cdot a$ в вырожденном случае плот-

ны в ядре $\ker \tilde{L}^{+}$ с нормой пространства $L_2(\Omega)$. Поэтому выполнено равенство (16), которое означает разрешимость уравнения (15′).

5. Теперь следует повысить гладкость решения U задачи (14). Для этого используем представление решения $u = U_0 + w$ уравнения $Lu = 0$. Как известно, в невырожденном случае $u(x) = u_1\left(x \cdot \tilde{a}^1\right) + u_2\left(x \cdot \tilde{a}^2\right)$ с аналитическими в своих областях функциями u_1, u_2 в эллиптическом случае, вещественными из $L_2(I_j)$ с весом функциями u_1, u_2 в гиперболическом случае, одной аналитической и одной вещественной функциями в смешанном случае. Точное доказательство повышения гладкости в гиперболическом случае имеется в [3], для эллиптического вырожденного и невырожденного — в [1], но может быть проведено по данной ниже схеме. Приведем доказательство для смешанного случая. Пусть a^2 — вещественный вектор, а a^1 — комплексный. Функция $V = a^2 \cdot \nabla u$ удовлетворяет уравнению $\langle \nabla, a^1 \rangle V = 0$ и имеет граничное значение

$$V|_{\partial\Omega} = \left(a_1^2 \partial_{x_1} u + a_2^2 \partial_{x_2} u\right)\Big|_{\partial\Omega} = \left[a_1^2(-\nu_2 \partial_\tau + \nu_1 \partial_\nu)u + a_1^2(\nu_1 \partial_\tau + \nu_2 \partial_\nu)u\right]\Big|_{\partial\Omega} =$$

$$= \left(-a_1^2 \nu_2 + a_2^2 \nu_1\right)\psi'_\zeta + \left(a_1^2 \nu_1 + a_2^2 \nu_2\right)\chi.$$

Поэтому $V|_{\partial\Omega} = H^{k-3/2}(\partial\Omega)$. При линейной замене координат $x \mapsto y$ для $V(y)$ получаем уравнение $\left(\partial_{y_1} + i \partial_{y_2}\right) V(y) = 0$, откуда следует аналитичность функции $V(y_1 + i y_2)$ и вещественная аналитичность внутри Ω функции $V(x) \in H^{k-1}(\Omega)$. Дальнейшее повышение гладкости следует из рассмотрения задачи $a^2 \cdot \nabla u = V(x_1, x_2)$, $u|_{\partial\Omega} = \psi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$. Находя первообразную, получаем нужную гладкость функции $u(x)$ в направлении a^2. В направлении $\tilde{a}^2$ имеем еще большую гладкость в силу граничного условия. Совместность этой задачи определена исходной задачей.

В вырожденном случае повышение гладкости решения осуществляется применением весовых соображений, подобных изложенным в [3]. Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Рассмотрим задачу Коши* (1), (2), *где функции* $\psi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\chi \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, $m > m_1$, *связаны соотношениями* (4), (5). *Тогда существует единственное решение этой задачи* $u \in H^{m-q}(\Omega)$, *где числа* m_1 *и* q *в зависимости от типа уравнения перечислены в утверждении теоремы* 6.

Краевые задачи и проблема моментов. Рассмотрим следующую проблему моментов [2]:

$$\int_{\partial\Omega} \alpha(s)\left(x(s)\tilde{a}^j\right)^N ds = \mu_N^j; \quad j = 1, 2; \quad N \in \mathbb{Z}_+, \tag{19}$$

где по двум заданным векторам $\tilde{a}^j \in \mathbb{C}^2$ и двум последовательностям чисел μ_N^j будем искать функцию α. Обозначим через μ_l^j подпространство в $H^l(\partial\Omega)$, $l \in \mathbb{R}$, состоящее из функций α таких, что

$$\forall N \in \mathbb{Z}_+ \quad \int_{\partial\Omega} \alpha(x)\left(x \cdot \tilde{a}^j\right)^N ds = 0. \tag{20}$$

Будем говорить, что векторы $\tilde{a}^1$, $\tilde{a}^2$ имеют $H^k - H^l$-свойство на $\partial\Omega$, $k \ge l$, если для каждой $\alpha \in H^k(\partial\Omega)$ существуют единственные функции $\alpha^1 \in M_l^1$,

$\alpha^2 \in M_l^2$ такие, что $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \text{const}$. Задача $H^k - H^l$. состоит в нахождении условий на векторы $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$, необходимых и достаточных для $H^k - H^l$-свойства на $\partial\Omega$.

Рассмотрим невырожденный случай уравнения (1).

Теорема 7. *Пусть $m \geq p \geq k \geq m_1$, где m_1 и q берутся из теоремы* 6. *Пусть выполняются условия:*

$1_{m,p}$. *Векторы $\tilde{a}^1$, $\tilde{a}^2$ имеют $H^{m-3/2} - H^{p-3/2}$-свойство на $\partial\Omega$.*

$2_{m,k}$. *Задача Дирихле $u|_{\partial\Omega} = \psi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ для уравнения* (1) *имеет единственное решение $u \in H^k(\Omega)$.*

$3_{m,k}$. *Задача Неймана $u'_{\nu_*}|_{\partial\Omega} = \kappa \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ для уравнения* (1) *имеет единственное с точностью до аддитивной постоянной решение $u \in H^k(\Omega)$.*

Тогда $1_{m,p} \Rightarrow 2_{m,p-q}$; $1_{m,p} \Rightarrow 3_{m,p-q}$; $2_{m,k} \Rightarrow 1_{m,k}$; $3_{m,k} \Rightarrow 1_{m,k}$; $2_{m,p} \Rightarrow$ $\Rightarrow 3_{m,p-q}$; $3_{m,p} \Rightarrow 2_{m,p-q}$.

Теорема 8. *Пусть $m \geq k \geq m_1$ и выполняются условия:*

1_m. *Однородная проблема моментов* (20) *имеет нетривиальное решение $\alpha \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$.*

2_k. *Задача Дирихле $u|_{\partial\Omega} = 0$ для уравнения* (1) *имеет нетривиальное решение $u \in H^k(\Omega)$.*

3_k. *Задача Неймана $u'_{\nu_*}|_{\partial\Omega} = 0$ для уравнения* (1) *имеет непостоянное решение $u \in H^k(\Omega)$.*

Тогда $1_m \Rightarrow 2_{m-q}$; $1_m \Rightarrow 3_{m-q}$; $2_m \Rightarrow 1_m$; $3_m \Rightarrow 1_m$.

Доказательства теорем 7, 8 следуют работе [2].

Утверждение 4. *Однородная проблема моментов* (20) *с совпадающими векторами $\tilde{a}^1 = \tilde{a}^2$ имеет бесконечное число линейно независимых решений в любом пространстве $H^k(\partial\Omega)$, $k > 1/2$.*

Доказательство. Пусть вектор $\tilde{a} = \tilde{a}^1 = \tilde{a}^2$ комплексный, т. е. не пропорционален вещественному. Тогда линейным преобразованием плоскости $\mathbb{R}^2$ вектор a можно привести к виду $(1, i)$. А именно:

$$x_1 = \operatorname{Re} a_1 y_1 + \operatorname{Re} a_2 y_2, \quad -x_2 = \operatorname{Im} a_1 y_1 + \operatorname{Im} a_2 y_2; \quad \det = -\operatorname{Im}(a_1 a_2) \neq 0,$$

так как можно считать, что $a_1 = 1$. Новая проблема моментов запишется в виде

$$\int_{\partial\Omega'} \beta(s)\left(y_1(s) + i y_2(s)\right)^N ds = 0.$$

Это известные условия того, что β является следом аналитической в Ω' функции (например, для непрерывных β). В качестве β можно взять $(y_1 + i y_2)^M|_{\partial\Omega'}$, $M \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь вектор a вещественен. Тогда линейным преобразованием приведем его к виду $(1, 0)$. В силу теоремы Вейерштрасса о плотности полиномов получаем, что для любой функции $\varphi(y_1)$

$$\int_{\partial\Omega'} \beta(s)\varphi(y_1(s))\,ds = 0. \tag{21}$$

Это означает, что значения функции $\beta(s)$ в точках с одинаковыми значениями координаты y_1 линейно связаны. Поэтому, задавая произвольно функцию β на одной части границы, можно удовлетворить условие (21), вычисляя значения β на другой части. Утверждение доказано.

Из утверждения 4 и условий (14) получаем следующую теорему.

Теорема 9. *В вырожденном случае задача Неймана* $u'_{\nu_*}\big|_{\partial\Omega} = 0$ *имеет бесконечное число сколь угодно гладких линейно независимых решений.*

В частности, это справедливо для уравнения Бицадзе $\dfrac{d^2u}{d\bar{z}^2} = 0$. О задаче Дирихле см. [9].

Заметим, что соотношения (14) показывают в силу независимости функций φ и κ, что наименьшей среди всех коррективных граничных задач, понимаемых как подпространства пространства Коши оператора $\tilde{L}$ [8], является сама задача Коши.

Случай круга. Пусть область Ω — единичный круг: $\Omega = K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^2 < 1\}$. Рассматривается только невырожденный случай. Предположим сначала, что корни λ_1, λ_2 уравнения $1(1, \lambda) = 0$ не равны $\pm i$. Тогда разрешимы уравнения $\operatorname{tg} \varphi_j = \lambda_j$, $j = 1, 2$. Обозначим $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$, где φ_j — любое из решений, $\operatorname{tg}^2 \varphi_0 = (b^2 - 4ac)/(a+c)^2$, $\tilde{a}_1^j = -\cos\varphi_j$, $\tilde{a}_2^j = -\sin\varphi_j$. Проблему моментов (19) на ∂K запишем в виде

$$\int_{\partial K} \overline{\alpha(s)}\, \tilde{T}_n\big(-x(s)\tilde{a}^j\big)\, ds = \mu_n^j; \quad j = 1, 2; \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{22}$$

где $\tilde{T}_n$ — полином Чебышева первого рода: $\tilde{T}_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$. В силу того, что $x(s)\,\tilde{a}^j = -\cos(s + \varphi_j)$, $x = (\cos s, \sin s)$, равенство (22) преобразуется к виду

$$\int_{\partial K} \overline{\alpha(s)} \cos N(s + \varphi_j)\, ds = \mu_n^j; \quad j = 1, 2; \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{23}$$

Система функций $\{T_n, U_n\}$,

$$T_n(s) = \frac{\cos n(s + \varphi_1)}{\sqrt{\pi \cos(n \operatorname{Im} \varphi_1)}}, \qquad U_n(s) = \frac{\sin n(s + \varphi_1)}{\sqrt{\pi \cos(n \operatorname{Im} \varphi_1)}}, \qquad T_0(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

ортонормирована в $L_2(K)$ и полна, причем $\alpha \in H^p(\partial\Omega)$ тогда и только тогда, когда коэффициенты разложения

$$\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^T T_n(s) + \alpha_n^U U_n(s) \tag{24}$$

удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2\right) n^{2p} < \infty.$$

Задача $H^k - H^l$ на окружности ∂K в этом случае изучена в [2]. Доказаны следующие факты (независимо от вещественности векторов a^j).

Теорема 10. *Однородная проблема моментов* (23) *с* $\mu_n^j = 0$ *имеет нетривиальное решение в каком-то из пространств* $H^l(\partial K)$, $l \in \mathbb{R}$, *тогда и только тогда, когда число* φ_0 *вещественно и* π*-рационально, т. е.* $\varphi_0/\pi \in \mathbb{Q}$. *При*

Теорема 15. *Пусть число* φ_0/π *вещественно и удовлетворяет неравенству* (25); $m > m_1 + r - 1$. *Тогда:*

1) *задача Дирихле* $u|_{\partial K} = \psi \in H^{m-1/2}(\partial K)$ *имеет, и притом единственное, решение* $u \in H^{m-r-q+1}(K)$;

2) *задача Неймана* $u'_{\nu_*}\big|_{\partial K} = \kappa \in H^{m-3/2}(\partial K)$ *со свойством* (8′) *имеет единственное с точностью до аддитивной постоянной решение* $u \in H^{m-r-q+1}(K)$.

Теорема 16. *Почти для каждого* $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, *для каждого* $m > m_1$ *справедливы утверждения:*

1) $\forall\, \psi \in H^{m+3/2+\varepsilon}(\partial K)$, $\forall\, \varepsilon > 0$ *существует единственное решение* $u \in H^{m-q}(K)$ *задачи Дирихле* $u|_{\partial K} = \psi$.

2) $\forall\, \kappa \in H^{m+1/2+\varepsilon}(\partial K)$, $\forall\, \varepsilon > 0$ *существует единственное непостоянное решение* $u \in H^{m-q}(K)$ *задачи Неймана* $u'_{\nu_*}\big|_{\partial K} = \kappa$.

Теорема 17. *Пусть число* φ_0/π *невещественно*, $m > m_1$, *либо корень* $\lambda_j = \pm i$, *либо корень* $\lambda_1 = -\lambda_2 = i$. *Тогда:*

1) *задача Дирихле* $u|_{\partial K} = \psi \in H^{m-1/2}(\partial K)$ *имеет единственное решение* $u \in H^m(K)$;

2) *задача Неймана* $u'_{\nu_*}\big|_{\partial K} = \kappa \in H^{m-3/2}(\partial K)$ *со свойством* (8′) *имеет единственное с точностью до аддитивной постоянной решение* $u \in H^m(K)$.

Заметим, что все свойства задачи Неймана, как следует из [2], переносятся на задачу вида $b_1 u'_{\nu_*} + b_2 u'_\tau = \kappa$ с заданными комплексными постоянными b_1, b_2. Заметим также, что зависимости $\psi \to u$ и $\kappa \to u$ на самом деле являются непрерывными линейными операторами в соответствующих пространствах. Доказательство этого требует дополнительных рассуждений. Отметим в итоге, что изучение третьей краевой задачи в круге, проведенное в [2] для эллиптического случая, легко переносится на общий случай с изменениями типа (m_1, q).

1. *Бурский В. П.* О решениях задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 10. – С. 1307–1313.
2. *Бурский В. П.* О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов // Там же. – 1993. – **45**, № 11. – С. 1476–1483.
3. *Хермандер Л.* Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – М.: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.
4. *Бурский В. П.* Теоремы о следах решения уравнения колебания струны в круге. – Киев, 1985. – 35 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.23).
5. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. – М.: Мир, 1972. – 259 с.
6. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 279 с.
7. *Никольский С. М.* Приближения функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1979. – 456 с.
8. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 132 с.
9. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 204 с.

Получено 10.04.95