УДК 517.946+511.2

П. Б. Василишин, І. С. Клюс, Б. Й. Пташник
(Ін-т прикл. пробл. механіки та математики НАН України, Львів)

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

By using the metric approach, we study the problem of classical well-posedness of a problem with multipoint conditions with respect to time coordinate in a tube domain for linear hyperbolic equations of order $2n$ $(n \geq 1)$ with coefficients depending on x. We prove metric theorems on lower bounds for small denominators appearing in the course of the solution of the problem.

На основі метричного підходу досліджено питання класичної коректності задачі з багатоточковими умовами за часовою координатою в циліндричній області для лінійних гіперболічних рівнянь порядку $2n$ $(n \geq 1)$ зі змінними відносно x коефіцієнтами в циліндричній області. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі. Одержані результати є розвитком робіт [1–7].

1. Надалі використовуються такі позначення: $C^q(\overline{D})$ — банахів простір функцій $u(t,x)$, які в області $\overline{D}$ мають неперервні похідні до порядку q включно; $C^{q+\mu}(\overline{\Omega})$ — клас функцій $\varphi(x)$, що мають в $\overline{\Omega}$ неперервні похідні порядку q, які задовольняють умову Гельдера з показником μ, $0<\mu<1$; $A^{q+\mu}$, $0<\mu<1$, — клас поверхонь $\Gamma \subset \mathbb{R}^p$ таких, що функції, які локально задають рівняння цих поверхонь, належать класу $C^{q+\mu}(\overline{\Omega})$; $[a]$ $(\{a\})$ — ціла (дробова) частина числа a; $\operatorname{mes} M$ — міра Лебега множини M.

В області $D=\{(t,x)\colon t\in[0,T],\ x\in\Omega\subset\mathbb{R}^p\}$, Ω — обмежена однозв'язна область із гладкою границею $\partial\Omega=\Gamma$, розглянемо задачу

$$N(u) \equiv \sum_{s=0}^{n} A_s \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2s} L^{n-s} u(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$M_j(u) \equiv \sum_{r=0}^{2n-1} a_r \frac{\partial^r u(t_j,x)}{\partial t^r} = \varphi_j(x), \tag{2}$$

$$j=1,\ldots,2n; \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{2n} \leq T,$$

$$L^m u(t,x)|_\Gamma = 0, \quad m=0,1,\ldots,n-1, \tag{3}$$

де $A_s, a_r \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $A_n \neq 0$; оператор

$$L \equiv \sum_{q,l=1}^{p} \frac{\partial}{\partial X_q}\left(b_{ql}(x)\frac{\partial}{\partial X_l}\right) - b(x)$$

еліптичнийє в області Ω, $b_{ql}(x)$, $b(x)$ — достатньо гладкі функції, $b(x)\geq 0$. Припустимо, що рівняння (1) є гіперболічним за І. Г. Петровським в області D.

Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\, v_k(x), \tag{4}$$

де $v_k(x)$ — нормовані власні функції задачі

$$Lv(x) = -\lambda v(x), \qquad v(x)|_\Gamma = 0. \tag{5}$$

Відомо [8, 9], що всі власні значення $\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}$, задачі (5), множину яких позначимо через Λ, є дійсні, а система власних функцій $\{v_k(x)\}$ — ортогональна і повна у просторі $L_2(\Omega)$, причому справджуються оцінки

$$C_0 k^{2/p} \le \lambda_k \le C_1 k^{2/p}, \quad \lambda_k \in \Lambda, \quad k \in \mathbb{N}, \quad C_0 > 0, \quad C_1 > 0, \tag{6}$$

а також (якщо $b_{ql}(x) \in C^{2n-1+\mu}(\overline{\Omega}),\ q, l = 1, \ldots, p,\ b(x) \in C^{2n-2+\mu}(\overline{\Omega}),\ \Gamma \in A^{2n+\mu},\ n \ge 1,\ 0 < \mu < 1$) оцінки

$$\forall\, x \in \overline{\Omega} \quad |v_k^{(l)}(x)| \le C_2(l)\, \lambda_k^{p/4 + l/2}, \quad 0 \le l \le 2n. \tag{7}$$

Кожен член ряду (4) задовольняє умови (3). Припустимо, що

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{jk}(x)\, v_k(x), \qquad \varphi_{jk} = \int_{\Omega} \varphi_j(x)\, v_k(x)\, dx, \quad j = 1, \ldots, 2n. \tag{8}$$

Тоді кожна з функцій $u_k(t)$ в (4) визначається як розв'язок задачі

$$\sum_{s=0}^{n} A_s (-\lambda_k)^{n-s} u_k^{(2s)}(t) = 0, \tag{9}$$

$$\sum_{r=0}^{2n-1} a_r u_k^{(r)}(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \ldots, 2n. \tag{10}$$

Із гіперболічності рівняння (1) в області D випливає, що всі корені рівняння

$$\sum_{s=0}^{n} A_s \gamma^{(2s)} = 0 \tag{11}$$

дійсні; для спрощення викладок припустимо, що вони всі різні. Нехай $\gamma_j,\ j = 1, \ldots, n$, — додатні корені рівняння (11). Позначимо $\delta_j = \gamma_j,\ \delta_{n+j} = -\gamma_j,\ j = 1, \ldots, n$. Тоді розв'язок задачі (9), (10) зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{2n} C_{qk} \exp\left(i\delta_q \sqrt{\lambda_k}\, t\right), \tag{12}$$

де $i = \sqrt{-1}$, а коефіцієнти $C_{qk},\ q = 1, \ldots, 2n$, визначаються із системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{2n} C_{qk} \exp\left(i\delta_q \sqrt{\lambda_k}\, t_j\right) \sum_{r=0}^{2n-1} a_r \left(i\delta_q \sqrt{\lambda_k}\right)^r = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \ldots, 2n. \tag{13}$$

Визначник $\Delta^*(\lambda_k)$ системи (13) має вигляд

$$\Delta^*(\lambda_k) = \Delta(\lambda_k) \prod_{q=1}^{2n} \left(S_q(\lambda_k)\right), \tag{14}$$

де

$$\Delta(\lambda_k) = \det \left\| \exp\left(i\delta_q \sqrt{\lambda_k}\, t_j\right) \right\|_{j,q=1}^{2n}, \tag{15}$$

$$S_q(\lambda_k) = \sum_{r=0}^{2n-1} a_r \left(i\delta_q \sqrt{\lambda_k}\right)^r, \quad q = 1, \ldots, 2n.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)–(3) *у просторі* $C^{2n}(\overline{D})$ *необхідно і досить, щоб для всіх* $\lambda_k \in \Lambda$ *виконувалися умови*

$$\Delta(\lambda_k) \neq 0, \tag{16}$$

$$S_q(\lambda_k) \neq 0, \quad q = 1, \ldots, 2n. \tag{17}$$

Доведення. Якщо $\Delta^*(\lambda_{\bar{k}}) = 0$, то однорідна задача, яка відповідає задачі (9), (10), при $\lambda_k = \lambda_{\bar{k}}$ має нетривіальні розв'язки $u_{\bar{k}}(t)$. Тоді існують нетривіальні розв'язки однорідної задачі, яка відповідає задачі (1)–(3), що мають вигляд $\overline{u}(t, x) = u_{\bar{k}}(t)\, v_{\bar{k}}(x)$, а розв'язок задачі (1)–(3), якщо він існує, не єдиний.

Доведемо протилежне. Нехай $\Delta^*(\lambda_k) \neq 0$ для всіх $\lambda_k \in \Lambda$. Припустимо, що існують два розв'язки $u_1(t, x)$ і $u_2(t, x)$ задачі (1)–(3) із простору $C^{2n}(\overline{D})$. Тоді функція $u(t, x) = (u_1(t, x) - u_2(t, x)) \in C^{2n}(\overline{D})$ буде розв'язком однорідної задачі, яка відповідає задачі (1)–(3), і разом з функціями $N(u)$ і $M_j(u)$, $j = 1, \ldots, 2n$, розвивається в ряд вигляду (4) за системою функцій $\{v_k(x)\}$; при цьому ряди для функцій $N(u)$ і $M_j(u)$, $j = 1, \ldots, 2n$, співпадають з рядами, одержаними формальним застосуванням операторів N і M_j, $j = 1, \ldots, 2n$, до ряду для функції $u(t, x)$. Із рівностей Парсеваля для функцій $N(u)$ і $M_j(u)$, $j = 1, \ldots, 2n$, випливає, що кожний із коефіцієнтів $u_k(t)$ функції $u(t, x)$ є розв'язком однорідної задачі, яка відповідає задачі (9), (10). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ $u_k(t) \equiv 0$. Із рівності Парсеваля для функції $u(t, x)$ випливає, що $u(t, x) \equiv 0$, тобто $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$. Теорему доведено.

2. Розглянемо питання про існування задачі (1)–(3). Припустимо, що виконуються умови (16) і (17). Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ коефіцієнти C_{qk}, $q = 1, \ldots, 2n$, однозначно визначаються із системи рівнянь (13), а розв'язок задачі (1)–(3) зображається у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q,j=1}^{2n} \frac{\Delta_{jq}(\lambda_k)\, \varphi_{jk} \exp\left(i\delta_q \sqrt{\lambda_k}\, t\right) v_k(x)}{\Delta(\lambda_k)\, S_q(\lambda_k)}, \tag{18}$$

де $\Delta_{jq}(\lambda_k)$ — алгебраїчне доповнення елемента j-го рядка та q-го стовпця у визначнику $\Delta(\lambda_k)$. Ряд (18), взагалі, розбіжний, оскільки величини $|\Delta(\lambda_k)|$ та $|S_k(\lambda_k)|$, $q = 1, \ldots, 2n$, відмінні від нуля, можуть бути як завгодно малими для нескінченної множини значень $\lambda_k \in \Lambda$.

Теорема 2. *Нехай існують додатні константи* M_1, M_2, β_1, β_2 *такі, що для всіх* (*крім скінченного числа*) $\lambda_k \in \Lambda$ *виконуються нерівності*

$$|\Delta(\lambda_k)| \geq M_1\, \lambda_k^{-(\beta_1 + \varepsilon/2)}, \tag{19}$$

$$|S_q(\lambda_k)| \geq M_2\, \lambda_k^{-(\beta_2 + \varepsilon/2)}, \quad q = 1, \ldots, 2n, \tag{20}$$

де $0 < \varepsilon < (1 - \{\beta_1 + \beta_2\})$. *Нехай* $\dfrac{\partial b_{ql}(x)}{\partial x_q}$, $q, l = 1, \ldots, p$, *і* $b(x)$ *належать класу* $C^{2\beta+\mu}(\overline{\Omega})$, Ω *належить класу* $A^{2n+\mu}$, *а функції* $\varphi_j(x) \in C^{2\beta}(\overline{\Omega})$, $j = 1, \ldots, 2n$, *задовольняють умови*

$$L^{\nu} \varphi_j(x)|_{\Gamma} = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \beta - 1, \quad j = 1, \ldots, 2n, \tag{21}$$

де $0 < \mu < 1$, $\beta = [\beta_1 + \beta_2] + p + n + 1$. *Тоді існує розв'язок задачі* (1)–(3) *із простору* $C^{2n}(\overline{D})$, *який неперервно залежить від* $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, 2n$, *і зображається формулою* (18).

Доведення. При умовах теореми

$$|\varphi_{jk}| \leq M_3 \lambda_k^{p/4-\beta} \|\varphi_j(x)\|_{C^{2\beta}(\overline{\Omega})}, \quad j = 1, \ldots, 2n. \tag{22}$$

Враховуючи, що $|\Delta_{jq}| \leq M_4$, $j, q = 1, \ldots, 2n$, із оцінок (6), (7), (19), (20), (22) і формули (18) маємо

$$\|u(t, x)\|_{C^{2n}(\overline{D})} \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^{2(\beta_1+\beta_2+n+p/2+\varepsilon-\beta)/2} \sum_{j=1}^{2n} \|\varphi_j(x)\|_{C^{2\beta}(\overline{\Omega})}. \tag{23}$$

Зі збіжності ряду у правій частині нерівності (23) випливає доведення теореми.

З'ясуємо тепер можливість виконання нерівностей (19), (20).

Теорема 3. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі* $\mathbb{R}^{2n}$*) векторів* $\hat{t} = (t_1, \ldots, t_{2n}) \in [0, T]^{2n}$ *нерівність* (19) *виконується для всіх (крім скінченного числа)* $\lambda_k \in \Lambda$ *при* $\beta_1 = p(2n^2 - n)/2$.

Доведення. Скористаємося схемою доведення теореми 4 з [6] (див. також [5], розд. 6, і [7]). Побудуємо функції $g_q(\lambda_k, \hat{t})$, $q = 1, \ldots, \nu(n)$, де $\nu(n) = 2n^2 - n$, таким чином:

$$g_1(\lambda_k, \hat{t}) \equiv \Delta(\lambda_k) \exp(-i\delta_1 \sqrt{\lambda_k} t_{2n}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \exp(i\delta_1 \sqrt{\lambda_k} t_1) & \exp(i\delta_2 \sqrt{\lambda_k} t_1) & \ldots & \exp(i\delta_{2n} \sqrt{\lambda_k} t_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \exp(i\delta_1 \sqrt{\lambda_k} t_{2n-1}) & \exp(i\delta_2 \sqrt{\lambda_k} t_{2n-1}) & \ldots & \exp(i\delta_{2n} \sqrt{\lambda_k} t_{2n-1}) \\ 1 & \exp(i(\delta_2 - \delta_1)\sqrt{\lambda_k} t_{2n}) & \ldots & \exp(i(\delta_{2n} - \delta_1)\sqrt{\lambda_k} t_{2n}) \end{vmatrix};$$

$$\frac{\partial g_1(\lambda_k, \hat{t})}{\partial t_{2n}} = \sum_{j=2}^{2n} i(\delta_j - \delta_1)\sqrt{\lambda_k} \exp(i(\delta_j - \delta_1)\sqrt{\lambda_k} t_{2n}) A_{2n,j} \equiv$$

$$\equiv i\sqrt{\lambda_k} \exp(i(\delta_2 - \delta_1)\sqrt{\lambda_k} t_{2n})\, g_2(\lambda_k, \hat{t}), \ldots;$$

$$g_r(\lambda_k, \hat{t}) = \sum_{j=r}^{2n} \prod_{s=1}^{r-1} (\delta_j - \delta_s) \exp(i(\delta_j - \delta_r)\sqrt{\lambda_k} t_{2n}) A_{2n,j}, \quad r = 1, \ldots, 2n-1, \tag{24}$$

де $A_{2n,j}$ — алгебраїчне доповнення елемента $\exp(i\delta_j \sqrt{\lambda_k} t_{2n})$ у визначнику (15);

$$\frac{\partial g_{2n-1}(\lambda_k, \hat{t})}{\partial t_{2n}} = i\sqrt{\lambda_k} \prod_{s=1}^{2n-1} (\delta_{2n} - \delta_s) \exp(i(\delta_{2n} - \delta_{2n-1})\sqrt{\lambda_k} t_{2n}) A_{2n,2n} \equiv$$

$$\equiv i\sqrt{\lambda_k} \exp(i\sqrt{\lambda_k}((\delta_{2n} - \delta_{2n-1}) t_{2n} + \delta_1 t_{2n-1}))\, g_{2n}(\lambda_k, \hat{t});$$

$$\frac{\partial g_{2n}(\lambda_k, \hat{t})}{\partial t_{2n-1}} = i\sqrt{\lambda_k} \prod_{s=1}^{2n-1} (\delta_{2n} - \delta_s) \sum_{j=2}^{2n-1} (\delta_j - \delta_1) \exp(i(\delta_j - \delta_1)\sqrt{\lambda_k} t_{2n-1}) A_{2n-1,j} \equiv$$

$$\equiv i\sqrt{\lambda_k} \exp(i(\delta_2 - \delta_1)\sqrt{\lambda_k} t_{2n-1})\, g_{2n+1}(\lambda_k, \hat{t}), \ldots;$$

$$g_{2n+r-1}(\lambda_k, \hat{t}) = \prod_{s=1}^{2n-1} (\delta_{2n} - \delta_s) \sum_{j=r}^{2n-1} \prod_{s=1}^{r-1} (\delta_j - \delta_s) \times$$

$$\times \exp(i(\delta_j - \delta_r)\sqrt{\lambda_k} t_{2n-1}) A_{2n-1,j}, \quad r = 1, \ldots, 2n-2, \tag{25}$$

де $A_{2n,j}$ — алгебраїчне доповнення елемента $\exp(i\delta_j\sqrt{\lambda_k}t_{2n-1})$ у визначнику $A_{2n,2n}$;

$$\frac{\partial g_{4n-3}(\lambda_k,\hat{t})}{\partial t_{2n-1}} = i\sqrt{\lambda_k}\prod_{s=1}^{2n-1}(\delta_{2n}-\delta_s)\cdot\prod_{s=1}^{2n-2}(\delta_{2n-1}-\delta_s)\times$$

$$\times\exp\left(i(\delta_{2n-1}-\delta_{2n-2})\sqrt{\lambda_k}t_{2n-1}\right)A_{2n-1,2n-1}\equiv$$

$$\equiv i\sqrt{\lambda_k}\exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\left((\delta_{2n-1}-\delta_{2n-2})t_{2n-1}+\delta_1 t_{2n-2}\right)\right)g_{4n-2}(\lambda_k,\hat{t}),\ \ldots;$$

$$g_{\nu(n)}(\lambda_k,\hat{t}) =$$

$$= \prod_{\substack{1\le r<s\le 2n,\\ s\ne 2}}(\delta_s-\delta_r)\left(\exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\left((\delta_2-\delta_1)t_2+\delta_1t_1\right)\right)-\exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\,\delta_2t_1\right)\right); \quad (26)$$

$$\frac{\partial g_{\nu(n)}(\lambda_k,\hat{t})}{\partial t_2} = iB\sqrt{\lambda_k}\exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\left((\delta_2-\delta_1)t_2+\delta_1t_1\right)\right), \quad (27)$$

де

$$B = \prod_{1\le r<s\le 2n}(\delta_s-\delta_r).$$

З (27) випливає оцінка

$$\left|\frac{\partial g_{\nu(n)}(\lambda_k,\hat{t})}{\partial t_2}\right| > C\sqrt{\lambda_k}, \quad C<|B|. \quad (28)$$

За нерівністю (28) інтервал $[0,T]$ розбивається на підмножини A_1 і B_1, $A_1\cup\cup B_1=[0,T]$, такі, що

$$\forall\ t_2\in A_1:\quad \left|\mathrm{Re}\,\frac{\partial g_{\nu(n)}(\lambda_k,\hat{t})}{\partial t_2}\right| > C\frac{\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{2}}, \quad (29)$$

$$\forall\ t_2\in B_1:\quad \left|\mathrm{Im}\,\frac{\partial g_{\nu(n)}(\lambda_k,\hat{t})}{\partial t_2}\right| > C\frac{\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{2}}. \quad (30)$$

Покладемо $\varepsilon_j=\varepsilon/(2(\nu(n)+1-j))$, $j=1,\ldots,\nu(n)$, $0<\varepsilon<1$. На основі леми 2 з [3] для кожного з інтервалів множини A_1 одержуємо оцінку

$$\mathrm{mes}\left\{t_2:\ |\mathrm{Re}\,g_{\nu(n)}(\lambda_k,\hat{t})|<\frac{\lambda_k^{-(p/2+\varepsilon_1)}}{\sqrt{2}}\right\}\le C_1\lambda_k^{-(p/2+1/2+\varepsilon_1)}.$$

Оскільки

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial g_{\nu(n)}(\lambda_k,\hat{t})}{\partial t_2} = -B\sqrt{\lambda_k}\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\left(\delta_1t_1+(\delta_2-\delta_1)t_2\right)\right)$$

як функція аргумента t_2 періодична з періодом $2\pi/(\sqrt{\lambda_k}\,|\delta_2-\delta_1|)$, число інтервалів множини A_1 не перевищує $1+T\sqrt{\lambda_k}\,|\delta_2-\delta_1|/\pi\le C_2\sqrt{\lambda_k}$. Отже,

$$\mathrm{mes}\left\{t_2\in A_1:\ |\mathrm{Re}\,g_{\nu(n)}(\lambda_k,\hat{t})|<\frac{\lambda_k^{-(p/2+\varepsilon_1)}}{\sqrt{2}}\right\}\le C_3\lambda_k^{-(p/2+\varepsilon_1)}, \quad (31)$$

де $C_3=C_1C_2$. Аналогічними міркуваннями з нерівності (30) маємо

$$\mathrm{mes}\left\{t_2\in B_1:\ |\mathrm{Im}\,g_{\nu(n)}(\lambda_k,\hat{t})|<\frac{\lambda_k^{-(p/2+\varepsilon_1)}}{\sqrt{2}}\right\}\le C_4\lambda_k^{-(p/2+\varepsilon_1)}. \quad (32)$$

З (31) і (32) випливає

$$\operatorname{mes}\{t_2\in[0,T]\colon |g_{\nu(n)}(\lambda_k,\hat t)| < \lambda_k^{-(p/2+\varepsilon_1)}\} \le (C_3+C_4)\,\lambda_k^{-(p/2+\varepsilon_1)}. \qquad (33)$$

Інтегруючи оцінку (33) в кубі $[0,T]^{2n-1}$ за змінними $t_1, t_3, \ldots, t_{2n}$, отримуємо

$$\operatorname{mes}\{\hat t\in[0,T]^{2n}\colon |g_{\nu(n)}(\lambda_k,\hat t)| < \lambda_k^{-(p/2+\varepsilon_1)}\} \le C_5\,\lambda_k^{-(p/2+\varepsilon_1)}. \qquad (34)$$

Аналогічно, переходячи послідовно від оцінки для $|g_{\nu(n)}(\lambda_k,\hat t)|$ до оцінки для $|g_{\nu(n)-1}(\lambda_k,\hat t)|$ і т. д., одержуємо, що при кожному фіксованому $\lambda_k\in\Lambda$ нерівність

$$|g_1(\lambda_k,\hat t)| < \lambda_k^{-(p(2n^2-n)+\varepsilon)/2} \qquad (35)$$

справедлива для такої множини векторів $\hat t\in[0,T]^{2n}$ (позначимо її через $M(\lambda_k)$), міра якої має оцінку

$$\operatorname{mes} M(\lambda_k) < A\,\lambda_k^{-(p/2+\alpha)}, \quad A>0, \quad 0<\alpha<1/2; \qquad (36)$$

при цьому використовується той факт, що число інтервалів зміни компоненти $t_s\in[0,T]$, $s=3,4,\ldots,2n$, на яких виконуються нерівності вигляду

$$\left|\operatorname{Re}\frac{\partial g_r(\lambda_k,\hat t)}{\partial t_s}\right| > \frac{\lambda_k^{-\delta}}{\sqrt2}, \quad \delta>0, \quad r=1,\ldots,\nu(n)-1,$$

або

$$\left|\operatorname{Im}\frac{\partial g_r(\lambda_k,\hat t)}{\partial t_s}\right| > \frac{\lambda_k^{-\delta}}{\sqrt2}, \quad \delta>0, \quad r=1,\ldots,\nu(n)-1,$$

не перевищує $\operatorname{const}\sqrt{\lambda_k}$. Підсумовуючи оцінку (36) за всіма $\lambda_k\in\Lambda$, одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{mes} M(\lambda_k) < A\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-(p/2+\sigma)}. \qquad (37)$$

З оцінок (6) випливає збіжність ряду у правій частині нерівності (37). Тоді на основі леми Бореля – Кантеллі [10] маємо, що для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2n}$) векторів $\hat t\in[0,T]^{2n}$ оцінка

$$|\Delta(\lambda_k)| = |g_1(\lambda_k,\hat t)| > \lambda_k^{-(p(2n^2-n)+\varepsilon)/2}$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k\in\Lambda$.

Покажемо справедливість використаного вище факту про число інтервалів зміни величини t_s, $s=3,4,\ldots,2n$, наприклад, у випадку $s=n$ та $(3n^2-n)/2+1 < r < (3n^2-n)/2+n-1$; для решти випадків доведення аналогічне. Розглянемо функції

$$g_{(3n^2-n)/2+q}(\lambda_k,\hat t) = \alpha\sum_{j=q}^{n}\prod_{s=1}^{q-1}(\delta_j-\delta_s)\exp\left(i(\delta_j-\delta_q)\sqrt{\lambda_k}\,t_n\right)A_{n,j},$$
$$q=1,\ldots,n-1,$$

де

$$\alpha = \prod_{m=n+1}^{2n}\left(\prod_{s=1}^{m-1}(\delta_m-\delta_s)\right).$$

Очевидно,

$$\frac{\partial g_{(3n^2-n)/2+q}(\lambda_k,\hat{t})}{\partial t_n} = i\alpha\sqrt{\lambda_k}\sum_{j=q+1}^{n}\prod_{s=1}^{q}(\delta_j-\delta_s)\exp\left(i(\delta_j-\delta_q)\sqrt{\lambda_k}\,t_n\right)A_{n,j};$$

$$\operatorname{Re}\frac{\partial g_{(3n^2-n)/2+q}(\lambda_k,\hat{t})}{\partial t_n} = -\alpha\sqrt{\lambda_k}\sum_{j=q+1}^{n}\prod_{s=1}^{q}(\delta_j-\delta_s)\times$$

$$\times\left(\operatorname{Re}A_{n,j}\sin\left((\delta_j-\delta_q)\sqrt{\lambda_k}\,t_n\right)+\operatorname{Im}A_{n,j}\cos\left((\delta_j-\delta_q)\sqrt{\lambda_k}\,t_n\right)\right).$$

На кожному з інтервалів (крім, можливо, двох крайніх) зміни величини $t_n \in$ $\in [0, T]$, на яких справджується нерівність

$$\left|\operatorname{Re}\frac{\partial g_{(3n^2-n)/2+q}(\lambda_k,\hat{t})}{\partial t_n}\right| > \frac{\lambda_k^{-\delta}}{\sqrt{2}}, \quad \delta>0,$$

похідна $\dfrac{\partial}{\partial t_n}\left(\operatorname{Re}\dfrac{\partial g_{(3n^2-n)/2+q}(\lambda_k,\hat{t})}{\partial t_n}\right)$ має за теоремою Ролля принаймні один нуль і як функція від t_n зображається у вигляді

$$y_k(t_n) = \sum_{j=q+1}^{n}\left(A_j(k)\cos\left((\delta_j-\delta_q)\sqrt{\lambda_k}\,t_n\right)+B_j(k)\sin\left((\delta_j-\delta_q)\sqrt{\lambda_k}\,t_n\right)\right),$$

де A_k і B_k не залежать від t_n.

Оцінимо зверху кількість нулів на $[0, T]$ цієї функції.

Функція $y_k(t_n)$ має на $[0, T]$ стільки ж нулів, скільки й функція

$$\overline{y}_k(z) = \sum_{j=q+1}^{n}\left(A_j(k)\cos\left((\delta_j-\delta_q)z\right)+B_j(k)\sin\left((\delta_j-\delta_q)z\right)\right)$$

на інтервалі $[0, \sqrt{\lambda_k}\,T]$. Зауважимо, що $\overline{y}_k(z)$ є розв'язком рівняння

$$\prod_{j=q+1}^{n}\left(\frac{d^2}{dz^2}+(\delta_j-\delta_q)^2\right)y(z) = 0. \tag{38}$$

Згідно з теоремою Валле Пуссена [11] існує константа $h_q>0$ така, що на довільному інтервалі $a\le z\le b$, $b-a<h_q$, m-точкова задача, $m=2(n-q)$, для рівняння (38) при довільному розміщенні вузлів $z_j\in[a,b]$, $j=1,\ldots,m$, має єдиний розв'язок. Тому будь-який нетривіальний розв'язок рівняння (38) не може мати на вказаному інтервалі більше ніж $(m-1)$ нулів. Отже, число нулів функції $\overline{y}_k(z)$ на інтервалі довжини $\sqrt{\lambda_k}\,T$ не перевищує $(2n-2q-$ $-1)\sqrt{\lambda_k}\,T/h_q \le \operatorname{const}\sqrt{\lambda_k}$. Для випадку нерівності

$$\left|\operatorname{Im}\frac{\partial g_{(3n^2-n)/2+q}(\lambda_k,\hat{t})}{\partial t_n}\right| > \frac{\lambda_k^{-\delta}}{\sqrt{2}}$$

доведення аналогічне.

Теорема 4. *Для майже всіх (відносно міри Лебега) векторів* $a=(a_0,a_1,\ldots$ $\ldots,a_{2n-1})\in\mathbb{R}^{2n}$ *нерівності* (20) *виконуються для всіх (крім скінченного числа) значень* $\lambda_k\in\Lambda$ *при* $\beta_2=p/2$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5 з [3].

3. Розглянемо частинний випадок задачі (1) – (3), коли в умовах (2) числа t_j фіксуються через рівні проміжки часу, тобто

$$t_j = (j-1)\,t_0, \quad j = 1, \ldots, 2n, \quad t_0 > 0. \tag{39}$$

У цьому випадку визначник (15) обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = A(\lambda_k) \prod_{s=1}^{n} \left(1 - \exp\left(2i\gamma_s \sqrt{\lambda_k}\, t_0\right)\right) \times$$

$$\times \prod_{1 \le r < q \le n} \left(\left(1 - \exp\left(i(\gamma_q - \gamma_r)\sqrt{\lambda_k}\, t_0\right)\right)\left(1 - \exp\left(i(\gamma_q + \gamma_r)\sqrt{\lambda_k}\, t_0\right)\right)\right), \tag{40}$$

де $|A(\lambda_k)| = 1$. З теореми 1 випливає наступне твердження.

Теорема 5. *Для єдиності розв'язку задачі* (1) – (3), (39) *у просторі* $C^{2n}(\overline{D})$ *необхідно і достатньо, щоб для всіх* $\lambda_k \in \Lambda$ *і для всіх* $l_1, l_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *виконувалися умови* (17) *і умови*

$$(\gamma_q - \gamma_r)\sqrt{\lambda_k}\, t_0 \ne 2\pi l_1, \quad (\gamma_q + \gamma_r)\sqrt{\lambda_k}\, t_0 \ne 2\pi l_2, \quad q, r = 1, \ldots, n. \tag{41}$$

Зауважимо, що для всіх $\lambda_k \in \Lambda$ справджуються нерівності

$$\left|\exp\left(2i\gamma_q \sqrt{\lambda_k}\, t_0\right) - 1\right| > \frac{4t_0 k^{1/p}}{\pi} \left|\frac{\gamma_q \sqrt{\lambda_k}}{k^{1/p}} - \frac{m_q(k)\,\pi}{k^{1/p} t_0}\right|, \tag{42}$$

$$\left|\exp\left(i(\gamma_q \pm \gamma_r)\sqrt{\lambda_k}\, t_0\right) - 1\right| > \frac{4t_0 k^{1/p}}{\pi} \left|\frac{\sqrt{\lambda_k}\,|\gamma_q \pm \gamma_r|}{2k^{1/p}} - \frac{m_{qr}^{\pm}(k)\,\pi}{k^{1/p} t_0}\right|, \tag{43}$$

де $m_q(k)$, $m_{qr}^{+}(k)$, $m_{qr}^{-}(k)$ — невід'ємні цілі числа, які задовольняють нерівності

$$\left|\frac{t_0 \gamma_q \sqrt{\lambda_k}}{\pi} - m_q(k)\right| < \frac{1}{2}, \quad \left|t_0(\gamma_q + \gamma_r)\sqrt{\lambda_k} - m_{qr}^{+}(k)\right| < \frac{1}{2},$$

$$\left|t_0\,|\gamma_q - \gamma_r|\sqrt{\lambda_k} - m_{qr}^{-}(k)\right| < \frac{1}{2}.$$

Лема. *Нехай* $\Phi(\lambda_k)$, $\lambda_k \in \Lambda$, *— обмежена послідовність додатних чисел. Тоді нерівність*

$$\left|\Phi(\lambda_k) - \frac{ma}{k^{1/p}}\right| > \frac{C}{\lambda_k^{-(p+1+\varepsilon)/2}}, \quad C = C(a) > 0, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$*) чисел* a *справджується для всіх (крім скінченного числа) пар* $(\lambda_k; m)$: $\lambda_k \in \Lambda$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення леми аналогічне доведенню леми 2.4 з ([5], розд. 1).

З леми, нерівностей (42), (43) і формули (40) випливає таке твердження.

Теорема 6. *Нехай виконані умови* (39). *Тоді для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* π / t_0 *і для всіх (крім скінченного числа)* $\lambda_k \in \Lambda$ *справедлива оцінка*

$$|\Delta(\lambda_k)| \ge Q\, \lambda_k^{-(n^2(p+1)+\varepsilon)/2}, \quad Q > 0.$$

З теорем 2, 4 і 6 випливає наступна теорема.

Теорема 7. *Нехай функції* $b(x)$, $b_{ql}(x)$, q, $l = 1, \dots, p$, $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, 2n$, *задовольняють умови теореми* 2 *при* $\beta = [(n^2(p+1)+p)/2]+p+n+1$. *Тоді для майже всіх* (*відносно міри Лебега*) *чисел* $\pi / t_0 \in \mathbb{R}$, *для майже всіх векторів* $a = (a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}) \in \mathbb{R}^{2n}$ *і довільних коефіцієнтів* A_s, $s = 0, 1, \dots, n$, *рівняння* (1) *існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3), (39), *який належить простору* $C^{2n}(\overline{D})$.

4. Результати роботи узагальнюються на випадок задачі з умовами (2), (3) для рівняння

$$B u \equiv \sum_{s_0 + 2s_1 \le 2n} A_s \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0} L^{s_1} u(t, x) =$$

$$= f(t, x) + \mu \int_{\Omega} K(t, x, y)\, F(t, y, \overline{u}(t, y))\, dy,$$

де

$$A_s, \mu \in \mathbb{C}, \quad \overline{u}(t, x) = \left\{ \frac{\partial^{|s|} u(t, y)}{\partial t^{s_0} \partial y_1^{s_1} \dots \partial y_p^{s_p}}, \ |s| \le 2n \right\},$$

а оператор B гіперболічний за Гордінгом в області D.

На закінчення зауважимо, що перші дослідження задач з багатоточковими умовами для рівнянь з частинними похідними були виконані одним із авторів цієї статті [1, 2] у відділі диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України, завідувачем якого в той час був Ю. Д. Соколов, і неодноразово обговорювалися на семінарі відділу.

1. *Пташник Б. Й.* Задача типу Валле Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1966. – № 10. – С. 1254–1257.
2. *Пташник Б. Й.* Задача типу Валле Пуссена для лінійних гіперболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами // Там же. – 1967. – № 2. – С. 127–130.
3. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
4. *Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с переменными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 6. – С. 728–734.
5. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
6. *Пташник Б. Й., Фіголь В. В., Штабалюк П. І.* Розв'язність, стійкість і регуляризація багатоточкової задачі для гіперболічних рівнянь // Мат. студії. Пр. Львів. мат. тов-ва. – 1991. – Вип. 1. – С. 16–32.
7. *Штабалюк П. І., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – Вып. 35. – С. 210–215.
8. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
9. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**. – С. 883–896.
10. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 144 с.
11. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.

Одержано 22. 02. 96