УДК 517. 988

А. Ю. Лучка (Ін-т математики НАН України, Київ)

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ І ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД Ю. Д. СОКОЛОВА

We establish consistency conditions for equations with additional restrictions in a Hilbert space, suggest and justify iterative methods for the construction of approximate solutions, and describe the relationship between these methods and the Sokolov projection-iterative method.

Встановлено умови сумісності рівнянь з додатковими обмеженнями в гільбертовому просторі, запропоновано та обгрунтовано ітераційні методи побудови наближених розв'язків, а також встановлено їх зв'язок з проекційно-ітеративним методом Ю. Д. Соколова.

Виповнилося століття з дня народження видатного математика і механіка Юрія Дмитровича Соколова. Своїми працями він збагатив вітчизняну науку в галузі небесної механіки, диференціальних та інтегральних рівнянь і теорії фільтрації. Одним із значних його досягнень є створення методу осереднення функціональних поправок розв'язання диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь [1]. Розвиток цього методу привів до створення проекційно-ітеративного методу [2–4].

Наукові праці останніх років, у тому числі [5–7], присвячені дослідженню диференціальних рівнянь та їх систем з параметрами та імпульсним впливом або перевизначених крайових задач, стимулюють створення загальної теорії рівнянь з обмеженнями та розробку методів їх розв'язання.

У даній статті узагальнюються результати [8–10] і висвітлюється питання зв'язку запропонованих методів для рівнянь з обмеженнями в гільбертовому просторі з проекційно-ітеративним методом Ю. Д. Соколова.

1. Рівняння з обмеженнями. Математичними моделями ряду фізичних процесів та явищ є диференціальні, інтегральні, інтегро-диференціальні рівняння та їх системи, про розв'язки яких відома додаткова інформація. Узагальнення таких рівнянь приводить до такої задачі: знайти розв'язок рівняння

$$x = f + Fx, \tag{1}$$

який задовольняє умову

$$Sx = p, \tag{2}$$

де $f \in H$, $p \in E$, $F: H \Rightarrow H$ — нелінійний і $S: H \Rightarrow E$ — лінійний оператор, а $E \subset H$ — деякий підпростір.

Обмежимося випадком, коли задача (1), (2) розглядається в гільбертовому просторі H, хоча її можна розглядати і в іншому функціональному просторі, а оператори F та S неперервні.

Розглядувану задачу вважаємо сумісною, якщо існує елемент $x \in H$, який задовольняє рівняння (1) і умову (2). Якщо ж рівняння (1) не має розв'язку чи існує розв'язок, але не справджується умова (2), задача (1), (2) не сумісна.

Взагалі кажучи, задача (1), (2) не сумісна. Але при певних умовах на елементи f та p вона може бути розв'язуваною. У зв'язку з цим виникає задача встановлення умов, при виконанні яких рівняння (1) має розв'язок, який задовольняє обмеження (2), та розробки методів побудови цього розв'язку.

2. Допоміжна задача. Розглянемо задачу

$$x = u + y, \qquad Sx = p, \tag{3}$$

в якій $y \in H$ — заданий елемент, а керування $u \in U$ потрібно визначити таким чином, щоб елемент $x \in H$ задовольняв співвідношення (3), де $U \subset H$ — деякий підпростір.

Припустимо, що підпростір U підібрано таким чином, що при довільному $d \in E$ рівняння $Su = d$, $u \in U$, має єдиний розв'язок $u = \Gamma d$. При такому припущенні існує єдиний розв'язок задачі (3), який задається формулами

$$u = r - Ry, \quad x = r + Gy, \tag{4}$$

в яких позначено

$$r = \Gamma p, \quad R = \Gamma S, \quad G = I - R, \tag{5}$$

де I — одиничний оператор в H. Щоб у цьому впевнитися, досить перше співвідношення (3) підставити у друге, в результаті чого одержимо

$$Su = p - Sy, \quad u \in U, \tag{6}$$

знайти розв'язок рівняння (6), тобто $u = \Gamma p - \Gamma Sy$, і врахувати позначення (5).

Нехай P і Q — оператори ортогонального проектування простору H відповідно на його підпростори U і $V = H \ominus U$. Тоді на основі аналізу формул (5), зокрема структури операторів R і G, приходимо до висновку, що справедливі співвідношення

$$RP = P, \quad SR = S, \quad GQ = G, \quad SG = 0, \quad Sr = p. \tag{7}$$

Зазначимо, що для кожного елемента $x \in H$, який задовольняє умову (2), справедливе зображення

$$x = r + Gv, \quad v = Qx. \tag{8}$$

Справді, оскільки виконується співвідношення

$$x = w + v, \quad w \in U, \quad v \in V, \quad Sx = p,$$

очевидно, задача (3) при $y = v$ має єдиний розв'язок $u = w$ і справедливі формули (4). Покладаючи в другій $y = v$, маємо зображення (8).

3. Зведення задачі (1), (2) до рівносильної їй. Запишемо задачу (1), (2) у вигляді задачі (3), поклавши в ній

$$y = f - u + Fx, \quad u \in U. \tag{9}$$

Оскільки за припущенням допоміжна задача (3) має єдиний розв'язок, який виражається формулами (4), то, підставивши його у співвідношення (9), одержимо операторне рівняння

$$y = g + Ry + My, \tag{10}$$

в якому

$$g = f - r + Fr, \quad My = F(r + Gy) - Fr. \tag{11}$$

Позначивши

$$h = Qg, \quad L = QM, \tag{12}$$

рівняння (10) можна трактувати як систему рівнянь

$$y = g + Ry + Mv, \tag{13}$$

$$v = h + Lv. \tag{14}$$

Щоб одержати цю систему, досить скористатися третьою властивістю (7), згідно з якою $Gy = Gv$, $v = Qy$, а отже, рівняння (10) набуває вигляду (13), і спроектувати його на підпростір V.

Тепер встановимо, що задача побудови розв'язку рівняння (14), який задовольняє умову

$$S(g + Mv) = 0, \tag{15}$$

рівноцінна вихідній задачі (1), (2). Цей факт випливає з наступних тверджень.

Лема 1. *Якщо існує розв'язок* $v^* \in V$ *рівняння* (14), *який задовольняє умову* (15), *то елемент*

$$x^* = r + Gv^* \tag{16}$$

задовольняє рівняння (1) *та умову* (2).

Справді, на підставі останніх двох властивостей (7) елемент x^* задовольняє умову (2) очевидним чином. Доведемо, що цей елемент (16) є розв'язком рівняння (1). Для цього використаємо співвідношення

$$R(g+Mv^*) = 0 \tag{17}$$

(яке безпосередньо випливає з рівності (15), якщо до неї застосувати оператор Γ та врахувати позначення (5)) і формули (16), (11), (17), (5), (7), (12), на основі яких маємо

$$f-x^*+Fx^* = f-r-Gv^*+F(r+Gv^*)-Fr+Fr =$$
$$= g-Gv^*+Mv^*-R(g+Mv^*) = G(g-v^*+Mv^*) = G(h-v^*+Lv^*) = 0.$$

Лема 2. *Якщо* $x^* \in H$ *— розв'язок задачі* (1), (2), *то елемент* $v^*=Qx^*$ *задовольняє рівняння* (14) *та умову* (15).

Справді, оскільки елемент x^* задовольняє умову (2), то згідно з формулою (8)

$$x^* = r+Gv^*, \quad v^* = Qx^*, \tag{18}$$

з співвідношення (18) (спроектувавши його на підпростір V) і включення $r \in U$ випливає

$$v^* = QGv^*. \tag{19}$$

За допомогою формул (11) і (18) маємо

$$g-Gv^*+Mv^* = f-r+Fr-Gv^*+F(r+Gv^*)-Fr = f-x^*+Fx^* = 0. \tag{20}$$

Тепер з формул (12), (19) і (20) випливає

$$h-v^*+Lv^* = Q(g-Gv^*+Mv^*) = 0,$$

тобто $v^* \in V$ — розв'язок рівняння (14). Цей самий розв'язок задовольняє умову (15). Щоб у цьому впевнитися, досить використати співвідношення (7) і (20), на підставі яких дістаємо

$$S(g+Mv^*) = S(g-Gv^*+Mv^*) = 0.$$

Теорема 1. *Задачі* (1), (2) *і* (14), (15) *одночасно однозначно розв'язувані.*

Доведення. Нехай рівняння (14) має єдиний розв'язок $v^* \in V$, який задовольняє умову (15). Тоді згідно з лемою 1 елемент x^*, який задається формулою (16), є розв'язком задачі (1), (2). Нехай остання задача, крім цього розв'язку, має другий розв'язок $\bar{x} \in H$. Тоді, як це випливає з формули (8), справедливе співвідношення

$$\bar{x} = r+G\bar{v}, \quad \bar{v} = Q\bar{x}, \tag{21}$$

причому за лемою 2 $\bar{v} \in V$ задовольняє рівняння (14) та умову (15). Оскільки задача (14), (15) однозначно розв'язувана, то, очевидно, $\bar{v}=v^*$. Порівнюючи формули (18) і (21), приходимо до висновку, що $\bar{x}=x^*$, тобто задача (1), (2) не може мати більше одного розв'язку.

Нехай тепер існує розв'язок $x^* \in H$ рівняння (1), який задовольняє умову (2). Згідно з лемою 2 елемент $v^*=Qv^*$ є розв'язком задачі (14), (15). Якщо ж остання задача, за винятком вказаного розв'язку, має інший розв'язок $\bar{v} \in V$, причому $\bar{v} \neq v^*$, то за лемою 1 елемент (21) задовольняє рівняння (1) та умову (2). Але з аналізу очевидних співвідношень

$$x^* = w^*+v^*, \quad w^* \in U, \quad v^* \in V$$

і

$$\bar{x} = \bar{w}+\bar{v}, \quad \bar{w} \in U, \quad \bar{v} \in V,$$

випливає, що $x^* \neq \bar{x}$. Отже, задача (1), (2) має два розв'язки, що суперечить припущенню. Таким чином, $\bar{v}=v^*$, тобто задача (14), (15) має єдиний розв'язок.

Зауваження. 1. Якщо розглядати лише рівняння (1) і (14) без умов (2) та (15) відповідно, то вони можуть бути не еквівалентними.

2. Аналогічні результати справедливі і в тому випадку, коли $S: H \Rightarrow E$ — нелінійний оператор такий, що задача (3) має єдиний розв'язок, який задається формулами (4).

4. Задача з керуванням. Розглянемо задачу

$$x = f + u + Fx, \quad Sx = p, \tag{22}$$

в якій елементи $x \in H$ і $u \in U$ підлягають визначенню, і встановимо її зв'язок із задачею (1), (2). Для цього покладемо

$$y = f + Fx \tag{23}$$

і запишемо задачу (22) у вигляді

$$x = u + y, \quad Sx = p, \quad u \in U. \tag{24}$$

За припущенням (24) має єдиний розв'язок, який зображається формулами (4). Якщо його підставити в формулу (23) і використати позначення (11), то в результаті одержимо рівняння

$$y = g + r + My. \tag{25}$$

Рівняння (25) з урахуванням властивості $Gy = Gv$, $v = Qy$, можна трактувати як систему рівнянь

$$y = g + r + Mv, \quad v = h + Lv, \tag{26}$$

де елемент $h \in V$ і оператор $L\colon V \Rightarrow V$ визначаються формулами (12).

Зауваження 3. Провівши такі ж самі міркування, як і в п. 3, легко встановити рівносильність задач (22) і (26), зокрема, якщо v^* — розв'язок другого рівняння (26), то елементи

$$x^* = r + Gv^*, \quad u^* = -R(g + Mv^*) \tag{27}$$

є розв'язком задачі (22).

Зауважимо, що друга формула (27) безпосередньо випливає із співвідношень (4), (7) і (26), тому що $u = r - Ry = R(r - y) = -R(g + Mv)$.

Порівнюючи систему (13), (14) з системою (26), приходимо до висновку, що в обох системах елемент $v \in V$ визначається з одного й того ж рівняння. Але задача з керуванням (22) містить у собі як частинний випадок задачу (1), (2). Зокрема, справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Задача* (1), (2) *сумісна лише тоді, коли задача з керуванням* (22) *має розв'язок, у якому* $u^* = 0$.

Доведення. Нехай задача (1), (2) сумісна, тобто існує елемент $x^* \in H$, який задовольняє рівняння (1) та обмеження (2). Очевидно, цей самий елемент x^* і u^* є розв'язком задачі (22).

Нехай задача (22) має розв'язок $x^* \in H$ і $u^* = 0$. Тоді $v^* = Qx^*$ — розв'язок рівняння (26) чи (14). Але елемент v^* задовольняє обмеження (15). Справді, з умови $u^* = 0$ і другої формули (27) маємо $R(g + Mv^*) = 0$. Отже, застосувавши до останньої рівності оператор S і врахувавши другу властивість (7), одержуємо $S(g + Mv^*) = 0$. Оскільки задача (14), (15) має розв'язок, то згідно з теоремою 1 задача (1), (2) сумісна.

5. Ітераційний метод. Побудувати розв'язок розглядуваної задачі в явному вигляді чи перевірити умови сумісності можна лише у виняткових випадках. У зв'язку з цим актуальним є питання розробки ефективних наближених методів, зокрема ітераційних, проекційних чи проекційно-ітеративних.

Застосуємо до задачі (22) чи задачі (1), (2) ітераційний метод, згідно з яким наближені розв'язки визначаються за формулами

$$x_k = u_k + y_k, \quad Sx_k = p, \quad u_k \in U, \tag{28}$$

$$y_k = f + Fx_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{29}$$

а початкове наближення x_0 знаходиться із задачі (28) при $k=0$ і заданому елементі $y_0 \in H$.

Згідно з припущенням, зробленим у п. 2, задача (28) має єдиний розв'язок

$$u_k = r - Ry_k, \quad x_k = r + Gy_k, \tag{30}$$

отже, послідовність наближених розв'язків будується однозначно.

Теорема 3. *Якщо* $L: V \Rightarrow V$ *— оператор стиску, то існує єдиний розв'язок* $x^* \in H$, $u^* \in H$ *задачі* (22) *і справедливі співвідношення*

$$\lim_{k \Rightarrow \infty} x_k = x^*, \qquad \lim_{k \Rightarrow \infty} u_k = u^*. \tag{31}$$

Доведення. Спочатку зазначимо, що побудова послідовності наближених розв'язків за методом (28) і (29) зводиться до побудови цієї ж послідовності за формулами

$$x_k = r + Gv_k, \quad v_k = h + Lv_{k-1}. \tag{32}$$

Справді, враховуючи властивість (7), другу формулу (30) можна записати у вигляді (32), в якому $v_k = Qy_k$. Якщо підставити останнє співвідношення у формулу (29) і врахувати позначення (11), то в результаті матимемо

$$y_k = g + r + Mv_{k-1}. \tag{33}$$

Застосувавши до рівності (33) оператор Q і врахувавши включення $r \in U$ та позначення (12), одержимо друге співвідношення (32).

За умовою оператор L є оператором стиску. Отже, друге рівняння (26) має єдиний розв'язок $v^* \in V$, а послідовність, побудована за методом (32), збігається до цього розв'язку, тобто

$$\lim_{k \Rightarrow \infty} v_k = v^*. \tag{34}$$

Оскільки на підставі формул (30), (7) і (33) маємо

$$u_k = r - Ry_k = R(r - y_k) = -R(g + Mv_{k-1}), \tag{35}$$

то, переходячи в рівностях (32) і (35) до границі при $k \Rightarrow \infty$ з урахуванням співвідношення (34), маємо

$$x^* = r + Gv^*, \quad u^* = -R(g + Mv^*). \tag{36}$$

Нарешті, згідно з зауваженням 3 елементи $x^* \in H$ та $u^* \in U$, що визначаються формулами (36), є єдиним розв'язком задачі (22).

Теорема 4. *Якщо* $L: V \Rightarrow V$ *— оператор стиску і задача* (1), (2) *сумісна, то вона має єдиний розв'язок* $x^* \in H$ *і послідовність* $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, *побудована за формулами* (28) *та* (29), *збігається до цього розв'язку, а* $u_k \Rightarrow 0$ *при* $k \Rightarrow \infty$.

Доведення. Оскільки виконуються умови теореми 3, то справедливі співвідношення (31), причому x^* і u^* — єдиний розв'язок задачі (22). Але за умовою теореми задача (1), (2) сумісна, отже, за теоремою 2 $u^* = 0$, тобто $u_k \Rightarrow 0$ при $k \Rightarrow \infty$, причому елемент $x^* \in H$ — єдиний розв'язок задачі (1), (2).

Зауваження. **4.** Якщо задача (1), (2) несумісна, а $L: V \Rightarrow V$ — оператор стиску, умова (15) не виконується і, як це стверджує теорема 3, $u_k \Rightarrow u^* \in U$ при $k \Rightarrow \infty$. Якщо ж додати цей елемент до правої частини рівняння (1), задача (1), (2) стане сумісною.

5. Якщо відомі оцінки похибки $\|v^* - v_k\|$, то за допомогою формул (16) і (28) легко одержати оцінки похибки $\|y^* - y_k\|$.

Ітераційний метод має обмежену область застосування. У випадку, коли він не застосовний чи збігається повільно, доцільно до розглядуваних задач застосувати проекційні чи проекційно-ітеративні методи.

6. Проекційний метод. Суть методу полягає в тому, що наближений розв'язок задачі (22) чи (1), (2) визначаємо за формулами

$$x_n = u_n + y_n, \quad Sx_n = p, \quad u_n \in U, \quad y_n \in H_n, \tag{37}$$

$$\Pi_n(f - y_n + Fx_n) = 0, \tag{38}$$

де $\Pi_n \colon H \Rightarrow E_n$ — проекційний оператор, а $H_n \subset H$ і $E_n \subset H$ — деякі підпростори однакової розмірності.

Оскільки за припущенням задача (37) має єдиний розв'язок

$$u_n = r - Ry_n, \quad x_n = r + Gy_n, \tag{39}$$

то на основі формул (38), (39) і (11) для визначення елемента $y_n \in H_n$ одержуємо рівняння

$$\Pi_n(g + r - y_n + My_n) = 0. \tag{40}$$

Встановимо, що за умови $U \subset H_n$ і $U \subset E_n$, тобто коли справджуються співвідношення

$$P\Pi_n = \Pi_n P = P, \tag{41}$$

запропонований проекційний метод зводиться до проекційного методу для рівняння (14). Справді, в цьому випадку рівняння (40) еквівалентне системі рівнянь

$$r + P(g - y_n + Mv_n) = 0, \quad v_n = Qy_n, \tag{42}$$

$$\Pi_n(h - v_n + Lv_n) = 0, \quad v_n \in V_n = QH_n \subset H. \tag{43}$$

Щоб у цьому впевнитися, досить до рівняння (40) застосувати по черзі оператори P та Q, врахувати формули (41), (7), (12), включення $r \in U$ і співвідношення $\Pi_n V = QE_n \subset V$.

Використавши відомі результати з теорії проекційних методів [11], можна сформулювати достатні умови збіжності розглядуваного проекційного методу, зокрема умови, при виконанні яких

$$\lim_{n \Rightarrow \infty} v_n = v^*, \tag{44}$$

де $v^* \in V$ — розв'язок рівняння (14).

Зауважимо, що при наявності розв'язку $v_n \in V_n$ рівняння (43), за формулою (42) маємо

$$Py_n = r + P(g + Mv_n). \tag{45}$$

Отже, на підставі співвідношень (39), (45), (5) та $y_n = Py_n + v_n$ маємо

$$u_n = P(Gv_n - g - Mv_n), \quad x_n = r + Gv_n. \tag{46}$$

Якщо тепер перейти у формулах (46) до границі при $n \Rightarrow \infty$ і врахувати співвідношення (44), в результаті одержимо

$$\lim_{n \Rightarrow \infty} u_n = u^* = P(Gv^* - g - Mv^*), \tag{47}$$

$$\lim_{n \Rightarrow \infty} x_n = x^* = r + Gv^*. \tag{48}$$

Оскільки на основі співвідношень (47), (7), (12) та (14)

$$u^* = Ru^* = RP(Gv^* - g - Mv^*) =$$
$$= R(Gv^* - g - Mv^*) - RQ(v^* - h - Lv^*) = -R(g + Mv^*), \tag{49}$$

згідно з зауваженням 3 елементи x^* та u^*, які виражаються формулами (48) та (49), є розв'язком задачі (22). У випадку, коли задача (1), (2) сумісна, за теоремою 2 $u^* = 0$, отже, послідовність $\{x_n\}$, побудована за методом (37), (38), збігається до розв'язку вказаної задачі.

***Зауваження* 6.** У випадку, коли підпростори H_n та E_n не містять у собі підпростору U, дослідження збіжності методу (37) і (38) зводиться до дослідження збіжності проекційного методу (40) для рівняння (25).

7. Проекційно-ітеративний метод. Ідея методу полягає в тому, що наближені розв'язки задачі (22) чи (1), (2) визначаються за формулами

$$y_k = f + F x_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{50}$$

$$x_k = u_k + z_k, \quad u_k \in U, \quad S x_k = p, \tag{51}$$

$$z_k = y_k + w_k, \quad w_k \in H_0, \quad \Pi(y_{k+1} - z_k) = 0, \tag{52}$$

де $\Pi: H \Rightarrow E_0$ — проекційний оператор, а $H_0 \subset H$ і $E_0 \subset H$ — деякі підпростори однакової розмірності. Початкове наближення визначається із задачі (51), (52) при $k = 0$ і даному $y_0 \in H$, тобто згідно з проекційним методом у випадку, коли $y_0 = 0$.

На основі формул (50)–(52) для визначення керування u_k і поправки w_k маємо систему рівнянь

$$S u_k + S w_k = p - S y_k, \quad u_k \in U, \quad u_k \in H_0, \tag{53}$$

$$\Pi(f - y_k - w_k + F(u_k + y_k + w_k)) = 0. \tag{54}$$

Якщо ця система має єдиний розв'язок, то послідовності $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ і $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ за методом (50)–(52) будуються однозначно.

Зауважимо, що, розв'язавши рівняння (53) відносно керування, одержуємо

$$u_k = r - R y_k - R w_k. \tag{55}$$

Отже, враховуючи формули (51), (52), (55) і (5), маємо співвідношення

$$x_k = r + G y_k + G w_k, \tag{56}$$

на основі якого формулу (50) з урахуванням позначень (11) можна зобразити у вигляді

$$y_k = g + r + M(y_{k-1} + w_{k-1}). \tag{57}$$

Зупинимося на випадку, коли $U \subset H_n$ і $U \subset E_n$, тобто коли справджуються співвідношення

$$P\Pi = \Pi P = P. \tag{58}$$

При цьому метод (50)–(52) зводиться до відомого проекційно-ітеративного методу [4] для рівняння (14).

Справді, нехай $v_k = Q y_k$ і $s_k = Q w_k$, тоді згідно з третьою властивістю (7) формула (56) набуває вигляду

$$x_k = r + G v_k + G s_k, \tag{59}$$

а

$$M(y_k + w_k) = M(v_k + s_k). \tag{60}$$

Отже, співвідношення (57) набуває вигляду

$$y_k = g + r + M(v_{k-1} + s_{k-1}). \tag{61}$$

Спроектувавши рівність (61) на підпростір V і врахувавши позначення (12), маємо

$$v_k = h + L(v_{k-1} + s_{k-1}). \tag{62}$$

Застосуємо до останньої рівності (52) з індексом, на одиницю меншим, оператор Q і враховуємо властивість (58). У результаті одержуємо співвідношення $\Pi Q(y_k - z_{k-1}) = 0$, яке з урахуванням попередніх позначень записуємо у вигляді

$$\tilde{\Pi}(v_k - v_{k-1} - s_{k-1}) = 0, \tag{63}$$

де $\tilde{\Pi}$ — звуження оператора Π на підпростір V.

Очевидно, метод (62) і (63) — проекційно-ітеративний для рівняння (14).

Спроектуємо рівняння (54) на підпростір U, в результаті чого з урахуванням співвідношень (58), (11) та (60)

$$P(y_k + w_k) = r + Pg - PM(v_k + s_k). \tag{64}$$

Зауважимо, що таким же чином, як і в п. 6, за допомогою формул (55), (7) і (64) маємо

$$u_k = PG(v_k + s_k) - Pg - PM(v_k + s_k). \tag{65}$$

Таким чином, якщо процес (62) і (63) збіжний, тобто

$$\lim_{k \Rightarrow \infty} v_k = v^*, \qquad \lim_{k \Rightarrow \infty} s_k = 0,$$

де $v^* \in V$ — розв'язок рівняння (14), то, перейшовши до границі при $k \Rightarrow \infty$ у рівностях (59) і (65) з урахуванням співвідношень (48), (49), одержуємо

$$\lim_{k \Rightarrow \infty} x_k = x^* = r + Gv^*, \qquad \lim_{k \Rightarrow \infty} u_k = u^* = -P(g + Mv^*), \tag{66}$$

причому згідно з зауваженням 3 ці елементи є розв'язком задачі з керуванням (22).

Якщо ж задача (1), (2) сумісна, то за теоремою 2 $u^* = 0$ і елемент x^*, що визначається за формулою (66), задовольняє рівняння (1) та обмеження (2). Отже, в цьому випадку послідовність $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, побудована за методом (50)–(52), збігається до розв'язку вказаної задачі.

Підкреслимо, що достатні умови збіжності й оцінки похибки методу (62) і (63) відомі (див., наприклад, [4], розд. 4). Використавши їх, можна сформулювати достатні умови збіжності та дати оцінки похибки методу (50)–(52).

8. Лінійна задача. Розглянемо задачу

$$x = f + Tx, \qquad Sx = p, \tag{67}$$

в якій $T\colon H \Rightarrow H$ — лінійний оператор з $D(T) = H$, і встановимо критерій її сумісності. У цьому випадку рівняння (10) набуває вигляду

$$y = g + By, \quad B = R + TG. \tag{68}$$

Беручи до уваги останню формулу та властивості (7), приходимо до висновку, що

$$Bu = u \quad \forall\, u \in U, \tag{69}$$

тобто 1 — власне значення оператора B. Отже, згідно з теорією лінійних рівнянь, розв'язок рівняння (68) існує лише тоді, коли виконується умова

$$(g, \psi) = 0, \quad g = f - r + Tr, \tag{70}$$

в якій $\psi \in H$ — довільний розв'язок рівняння $\psi = B^* \psi$, спряженого до рівняння (69).

Оскільки кожний елемент $x = r + Gy$, де y — розв'язок рівняння (68), є розв'язком задачі (67), приходимо до такого висновку.

Теорема 5. *Задача* (67) *сумісна тоді і лише тоді, коли виконується умова* (70).

Застосуємо до задачі (67) ітераційний метод, розглянутий у п. 5, тобто

$$x_k = u_k + y_k, \quad u_k \in U, \qquad Sx_k = p, \quad y_k = f + Tx_{k-1}, \tag{71}$$

і зазначимо, що у формулі (32) $L = QTG$ — лінійний оператор. У даному випадку теорему 4 можна уточнити.

Теорема 6. *Якщо спектральний радіус* $\rho(L) < 1$ *і задача* (67) *сумісна, то вона має єдиний розв'язок* $x^* \in H$ *і послідовність* $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, *побудована за формулами* (71), *збігається до цього розв'язку. Якщо ж задача* (67) *не сумісна, то послідовність* $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ *збігається до елемента* $u^* \in H$, *не рівного нулю, причому, якщо додати його до правої частини першого рівняння* (67), *то задача стане сумісною.*

Тепер встановимо зв'язок між ітераційним методом (71) і проекційно-ітеративним методом Ю. Д. Соколова, згідно з одним із варіантів якого наближені розв'язки рівняння

$$x = f + Tx \tag{72}$$

будуються за формулами

$$z_k = y_k + w_k, \quad w_k \in U, \quad P(y_{k+1} - z_k) = 0, \tag{73}$$

$$y_{k+1} = f + Tz_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad y_0 \in H. \tag{74}$$

Зауважимо, що на основі формули (74) співвідношення (73) можна записати у вигляді

$$z_k = y_k + w_k, \quad w_k \in U, \quad P(z_k - Tz_k) = Pf. \tag{75}$$

Розглянемо рівняння (72) разом з обмеженням

$$P(x - Tx) = Pf, \tag{76}$$

тобто задачу (67), у якої

$$S = P - PT, \quad P = Pf. \tag{77}$$

Очевидно, така задача сумісна, тому що коли існує розв'язок рівняння (72), то він задовольняє й обмеження (76).

Застосуємо до задачі (72) і (76) ітераційний метод (71). На основі аналізу формул (74), (75), (71) і (77) робимо висновок, що $w_k = u_k$ і $z_k = x_k$. Отже, наближення, побудовані за проекційно-ітеративним методом (73), (74) для рівняння (72) і ітераційним методом (71) для задачі (72), (76), збігаються. Таким чином, проекційно-ітеративний метод Ю. Д. Соколова для рівняння (72) можна трактувати як частинний випадок ітераційного методу для задачі (67).

***Зауваження* 7.** Аналогічний результат справедливий і у випадку, коли $S: H \Rightarrow E$ — нелінійний оператор такий, що задача (3) має єдиний розв'язок, який визначається формулами (4).

1. *Соколов Ю. Д.* Метод осреднения функциональных поправок. – Киев: Наук. думка, 1967. – 336 с.
2. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1968. – 224 с.
3. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.
4. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.
5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
6. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
7. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. Н.* Обобщенно-обратные операторы и некоторые краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 319 с.
8. *Лучка А. Ю.* Інтегральні рівняння з додатковими умовами та методи їх розв'язування // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложение. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – С. 129–130
9. *Лучка А. Ю.* Методи розв'язування узагальненої крайової задачі для системи диференціальних рівнянь // Міжнародна конференція „Нелінійні диференціальні рівняння". – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – С. 105.
10. *Лучка А. Ю.* Інтегральні рівняння з додатковими умовами // Всеукраїнська наукова конференція „Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях. – Львів „Львівська політехніка", 1995. – Т. 2. – С. 41–42.
11. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.

Одержано 30.04.96