УДК 517. 9

А. М. Самойленко, О. А. Бойчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
С. А. Кривошея (Нац. ун-т, Київ)

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ*

By using methods of the theory of generalized inverse matrices, we establish a criterion of solvability and study the structure of the set of solutions of a general linear Noether boundary-value problem for systems of integro-differential equations of Fredholm type with degenerate kernel.

За допомогою апарату теорії узагальнено-обернених матриць одержано критерій розв'язності та досліджено структуру множини розв'язків загальної лінійної нетерової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром.

Розглянемо крайову задачу, яка визначається системою рівнянь

$$\dot{x} - \Phi(t)\int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]\,ds = f(t) \tag{1}$$

та крайовими умовами

$$lx = \alpha. \tag{2}$$

Припускається, що $\Phi(t)$ — $(n\times m)$-, $A(t)$, $B(t)$ — $(m\times n)$-, $f(t)$ — $(n\times 1)$-вимірні матриці, елементи яких належать простору $L_2[a, b]$, $l = \mathrm{col}\,(l_1, \ldots, l_p)$ — лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $D_2^n[a, b]$ n-вимірних абсолютно неперервних на $[a, b]$ функцій, $\alpha = \mathrm{col}\,(\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_p) \in R^p$, $t \in [a, b]$, стовпчики матриці $\Phi(t)$ лінійно незалежні на $[a, b]$. Розв'язок задачі (1), (2) шукається в класі вектор-функцій $x(t)$ таких, що $x(t) \in D_2^n[a, b]$, $\dot{x}(t) \in L_2^n[a, b]$.

Одержаний в статті критерій розв'язності задачі (1), (2) узагальнює деякі результати робіт [1, 2].

1. Розглянемо спочатку питання про розв'язність та структуру множини розв'язків системи (1). З (1) маємо

$$\dot{x} = f(t) + \Phi(t)c_0,$$

$$c_0 = \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]\,ds \in R^m,$$

$$x = \tilde{f}(t) + \Psi(t)c_0 + \tilde{c} = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t)c, \tag{3}$$

де

$$\tilde{f}(t) = \int_a^t f(s)\,ds, \quad \Psi(t) = \int_a^t \Phi(s)\,ds, \quad \tilde{c} = \mathrm{col}\,(c_{m+1}, \ldots, c_{m+n}) \in R^n,$$

$\Psi_0(t) = [\Psi(t), I_n]$ — $(n\times(m+n))$-вимірна матриця, I_n — одинична матриця порядку n, $c = \mathrm{col}\,(c_0, \tilde{c}) \in R^{m+n}$. Підставивши (3) в (1), дістанемо алгебраїчну систему для визначення вектора c:

$$Dc = \tilde{b}, \tag{4}$$

*Робота частково підтримана Міжнародною соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук, грант № SPU 061052.

де

$$D = \left[I_m - \int_a^b [A(s)\Psi(s) + B(s)\Phi(s)]\,ds, \ -\int_a^b A(s)\,ds \right]$$

— $(m \times (m+n))$-вимірна матриця,

$$\tilde{b} = \int_a^b [A(s)\tilde{f}(s) + B(s)f(s)]\,ds.$$

Система (4) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли вектор $\tilde{b}$ задовольняє умову [1]

$$P_{D^T_{d_1}}\tilde{b} = 0, \quad d_1 = m - n_1, \quad n_1 = \operatorname{rank} D, \tag{5}$$

де $P_{D^T_{d_1}}$ — $(d_1 \times m)$-вимірна матриця, яка складається з повної системи d_1 лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_{D^T}. При виконанні умови (5) система (4) має r_1-параметричну сім'ю розв'язків

$$c = P_{D_{r_1}} c_{r_1} + D^+\tilde{b}, \quad c_r \in R^{r_1}, \tag{6}$$

де $P_{D_{r_1}}$ — $((m+n) \times r_1)$-вимірна матриця, яка складається з повної системи r_1 лінійно незалежних стовпчиків матриці-проектора P_D, D^+ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) до D матриця [3].

Отже, має місце такий критерій розв'язності системи рівнянь (1).

Теорема 1. *Нехай* $\operatorname{rank} D = n_1$. *Система інтегро-диференціальних рівнянь* (1) *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли функція* $f(t)$ *задовольняє умову* (5). *При виконанні цієї умови система* (1) *має* r_1*-параметричну* $(r_1 = m + n - n_1)$ *сім'ю розв'язків*

$$x = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} c_{r_1} + F(t), \tag{7}$$

де

$$F(t) = \tilde{f}(t) + \Psi_0(t) D^+ \tilde{b}. \tag{8}$$

З теореми 1 випливає, що однорідна система рівнянь $(f = 0)$ завжди має $r_1 = m + n - n_1 > 0$ лінійно незалежних розв'язків. Якщо $\operatorname{rank} D = n_1 = m$, то $d_1 = 0$, $P_{D^T_{d_1}} = 0$ і умова розв'язності (5) виконується при всіх $f(t)$. Цей факт є характерним для нетерових задач.

2. Розглянемо тепер питання про розв'язність та структуру множини розв'язків крайової задачі (1), (2). Припускаємо, що умова розв'язності (5) виконується. Розв'язок (7) підставимо в крайові умови (2):

$$lx \equiv l(F(\cdot)) + l(\Psi_0(\cdot) P_{D_{r_1}} c_{r_1}) = \alpha. \tag{9}$$

З (9) дістаємо алгебраїчну систему для визначення вектора c_r:

$$Qc_{r_1} = \alpha - l(F(\cdot)), \tag{10}$$

де $Q = l(\Psi_0(\cdot)) P_{D_{r_1}}$ — $(p \times r_1)$-вимірна матриця. Використовуючи теорему 1 та критерії розв'язності алгебраїчної системи (10), одержуємо необхідну і достатню умову розв'язності крайової задачі (1), (2).

Теорема 2. *Нехай* $\operatorname{rank} Q = n_2 \le \min(p, r_1)$. *Тоді однорідна крайова задача* (1), (2) $(f = 0, \alpha = 0)$ *має* $r_2 = r_1 - n_2$ *і тільки* r_2 *лінійно незалежних розв'язків вигляду*

$$x = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_{r_2}} c_{r_2}, \quad c_{r_2} \in R^{r_2}. \tag{11}$$

Неоднорідна крайова задача є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\begin{gathered} P_{D^T_{d_1}} \tilde{b} = 0, \qquad P_{D^T_{d_2}} (\alpha - l(F(\cdot))) = 0, \\ d_1 = m - \operatorname{rank} D, \qquad d_2 = p - \operatorname{rank} Q. \end{gathered} \tag{12}$$

При виконанні умов (12) *крайова задача* (1), (2) *має* r_2*-параметричну сім'ю розв'язків*

$$x = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_{r_2}} c_{r_2} + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+(\alpha - l(F(\cdot))) + F(t), \tag{13}$$

де Q^+ — псевдообернена до Q матриця, $F(t)$ визначається формулою (8),

$$r_1 = m + n - \operatorname{rank} D, \qquad r_2 = m + n - \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} Q.$$

З теореми 2, зокрема, випливає, що при виконанні умов $\operatorname{rank} D = m$, $\operatorname{rank} Q = p$, $p \le n$, крайова задача (1), (2) є розв'язною при всіх $f(t)$, причому при $p = n$ розв'язок крайової задачі (1), (2) єдиний.

***Зауваження.* 1.** Система інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x} + R(t)x - \Phi(t)\int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]\,ds = f(t) \tag{14}$$

з неперервною на $[a, b]$ $(n \times n)$-вимірною матрицею $R(t)$ за допомогою заміни $x = X(t)y$, де $X(t)$ — фундаментальна матриця системи $\dot{x} = -R(t)x$, зводиться до системи рівнянь типу (1).

2. До системи рівнянь типу (1) зводиться також система загального вигляду

$$\dot{x} - \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(t)\int_a^b [A_i(s)x(s) + B_i(s)\dot{x}(s)]\,ds = f(t), \tag{15}$$

де $\Phi_i(t)$ — $(n \times q)$-вимірна, $A_i(t)$, $B_i(t)$ — $(q \times n)$-вимірні матриці, $i = 1, \ldots, l$. Дійсно, другий доданок в (15) можна записати у вигляді

$$\dot{x} - f(t) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{q} \varphi^i_j(t) \int_a^b [a_{ij}(s)x(s) + b_{ij}(s)\dot{x}(s)]\,ds, \tag{16}$$

де $\varphi^i_j(t)$ — j-й стовпчик матриці $\Phi_i(t)$, $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ — j-ті рядки матриць $A_i(t)$, $B_i(t)$ відповідно.

Нехай

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)]$$

— $(n \times m)$-вимірна матриця, стовпчики якої утворюють повну систему лінійно незалежних стовпчиків $(n \times ql)$-вимірної матриці $\overline{\Phi}(t) = [\varphi^1_1(t), \ldots, \varphi^l_q(t)]$. Виразивши в (16) вектор-функції $\varphi^i_j(t)$ через $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$, одержимо систему інтегро-диференціальних рівнянь типу (1).

Приклад. Розглянемо періодичну крайову задачу

$$\dot{x} + Rx - \int_0^{2\pi} Mx(s)\,ds = f(t), \tag{17}$$

$$lx = x(0) - x(2\pi) = \mathbf{0}, \tag{18}$$

де

$$x = \operatorname{col}\left(x_1(t), x_2(t)\right),$$

$$f(t) = \operatorname{col}\left(f_1(t), f_2(t)\right),$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що умова розв'язності рівняння (17) досліджувалася в [4]. Виконавши в (17), (18) заміну

$$x = e^{-Rt}y = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} y, \tag{19}$$

відносно y дістанемо крайову задачу типу (1), (2):

$$\dot{y} - e^{Rt}\int_0^{2\pi} Me^{-Rs}y(s)\,ds = e^{Rt}f(t), \tag{20}$$

$$ly \equiv y(0) - y(2\pi) = 0, \tag{21}$$

для якої

$$\Phi(t) = e^{Rt}, \quad A(t) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) = 0, \quad m = n = 2.$$

Використовуючи умови розв'язності (12), знаходимо, що крайова задача (17), (18) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\int_0^{2\pi} \left[f_2(s)(1-\cos s) + f_1(s)\sin s\right] ds = 0, \quad \tilde{f}(0) = \tilde{f}(2\pi). \tag{22}$$

Перша з умов (22) співпадає з умовою розв'язності рівняння (17), отриманою в [4] для випадку $f_1(t) = 0$ іншими методами.

1. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 319 с.
2. *Калайда А. Ф.* Линейные одномерные интегро-дифференциальные уравнения и задачи // Вычисл. и прикл. математика. – 1989. – № 69. – С. 8–16.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
4. *Ландо Ю. К.* О разрешимости интегро-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1967. – 3, № 4. – С. 695–697.

Одержано 13.05.96