УДК 517.968

М. Азизов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СЛОЖНОСТИ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ

We find the exact order of the ε-complexity of weakly singular integral equations with periodic and analytic coefficients near logarithmic singularity. This class of equations includes boundary equations for outer boundary-value problems for the two-dimensional Helmholtz equation.

Знайдено точний порядок складності слабко сингулярних інтегральних рівнянь з періодичними аналітичними коефіцієнтами при логарифмічній сингулярності. Цей клас рівнянь містить у собі граничні рівняння зовнішніх граничних задач для двовимірного рівняння Гельмгольца.

1. Введение и постановка задачи. Исследования сложности интегральных уравнений были инициированы вопросом Х. Вожьняковского [1] о точном порядке сложности уравнений Фредгольма второго рода с ядрами и свободными членами, имеющими фиксированное число производных. Ответ на этот вопрос был дан в работах [2 – 4]. Что же касается слабо сингулярных интегральных уравнений, то, как отмечалось в [5], задача об оценке их сложности была поставлена Г. М. Вайникко в 1989 г. В случае малой гладкости коэффициентов при логарифмической и степенной особенностях двусторонние оценки сложности слабо сингулярных уравнений, отличающихся по порядку на логарифмический множитель, были получены в [5, 6]. Вместе с тем слабо сингулярные уравнения с достаточно гладкими коэффициентами при особенностях представляют особый интерес в связи с тем, что они естественно возникают в методе граничных интегральных уравнений применительно к краевым задачам для уравнений математической физики. Так, в [7] рассматривается уравнение вида

$$z(t) = Hz(t) + f(t) := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-a(t,\tau)}{\pi} \ln\left|2\sin\frac{t-\tau}{2}\right| z(\tau)\,d\tau + f(t), \qquad (1)$$

являющееся граничным интегральным уравнением внешней краевой задачи для двумерного уравнения Гельмгольца. При этом предполагается, что коэффициенты $a(t,\tau)$ и свободные члены $f(t)$ являются по каждой переменной 2π-периодическими функциями достаточной гладкости. Более того, если граница области, в которой ищется решение краевой задачи, является замкнутой аналитической кривой, то свойство аналитичности наследуется и коэффициентом $a(t,\tau)$. Таким образом, в свете упоминающегося выше вопроса Г. М. Вайникко представляется интересным получение точного порядка сложности уравнений вида (1) с аналитическими коэффициентами $a(t,\tau)$ и дифференцируемыми свободными членами $f(t)$. Этому посвящена настоящая статья.

Уравнения (1) будем рассматривать в гильбертовом пространстве L_2 функций с интегрируемым на $(-\pi,\pi)$ квадратом, в котором скалярное произведение определяется формулой

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt,$$

а норма $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$. Кроме того, будем предполагать, что свободные члены $f(t)$ уравнений (1) принадлежат соболевскому пространству W_2^r 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_r = \|f\|_{W_2^r} := \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(1+|l|^2\right)^r \left|\hat{f}(l)\right|^2\right)^{1/2} < \infty,$$

где $\hat{f}(l) = (f, e^{-il\tau})$ — коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $\left\{e^{-il\tau}\right\}_{l=-\infty}^{\infty}$. Очевидно, что $f^{(r)} \in L_2$ для $f \in W_2^r$. В соотношениях общего характера $W_2^0 = L_2$.

Как отмечалось выше, будем рассматривать уравнения (1) с 2π-периодическими аналитическими коэффициентами $a(t,\tau)$. Говоря о периодических функциях, будем иметь в виду функции, допускающие по каждой переменной аналитическое продолжение в некоторую полосу $\sigma_h = \{u = x+iy,\ x \in (-\infty,\infty),$ $y \in (-h,h)\}$ комплексной плоскости шириной $2h$. Пространство таких функций будем обозначать через $\mathbb{A}_h$. Как известно [8, с. 185], функции $a(t,\tau)$ из $\mathbb{A}_h$ удовлетворяют условию

$$\|a\|_h := \left(\sum_{\nu,\mu=-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^2|\nu h|\operatorname{ch}^2|\mu h|\,|\hat{a}(\nu,\mu)|^2\right)^{1/2} < \infty,$$

где

$$\hat{a}(\nu,\mu) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(t,\tau)e^{-i(\nu t+\mu\tau)}\,dt\,d\tau$$

— двумерные коэффициенты Фурье функции $a(t,\tau)$ по тригонометрической системе.

Следуя [5], рассмотрим задачу о сложности приближенного решения однозначно разрешимых уравнений (1) с операторами $H \in \mathcal{H}$ и свободными членами $f \in \Phi$. Класс таких уравнений будем обозначать через $[\mathcal{H}, \Phi]$.

Под способом задания информации об уравнениях класса $[\mathcal{H}, \Phi]$ будем понимать произвольный набор $T = \{\delta_i\}_{i=1}^m$ непрерывных функционалов δ_i, из которых $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ определены на множестве $\mathcal{H}$, а $\delta_{k+1}, \ldots, \delta_m$ — на множестве Φ. Общее число функционалов, входящих в набор T, будем обозначать через $\operatorname{card}(T)$. При фиксированном T каждому уравнению (1) ставится в соответствие числовой вектор

$$T(H,f) = (\delta_1(H), \delta_2(H), \ldots, \delta_k(H), \delta_{k+1}(f), \ldots, \delta_m(f)), \tag{2}$$

называемый информацией об уравнении (1). Положим $\mathcal{T}_M = \{T : \operatorname{card}(T) \le M\}$.

Под алгоритмом A приближенного решения уравнений из класса $[\mathcal{H}, \Phi]$ будем понимать оператор, сопоставляющий информации (2) в качестве приближенного решения уравнения (1) элемент $A(T,H,f) \in L_2$. Имеется в виду, что с каждым алгоритмом A связано параметрическое семейство $F_A \subset L_2$ элементов $\varphi(b_1, b_2, \ldots, b_l) \in L_2$, определяемых значениями числовых параметров b_1,

$b_2, \ldots, b_l$. При этом $A(T,H,f)=\varphi(b_1,b_2,\ldots,b_l)\in F_A$, а значения b_l находятся в результате выполнения элементарных арифметических операций (э. а. о.) над компонентами вектора информации $T(H,f)$ (к э. а. о мы относим операции сложения, вычитания, умножения, деления и сравнения с нулем).

Через $\operatorname{cost}\{A(T,H,f)\}$ обозначим число э. а. о., необходимых для определения $A(T,H,f)$. Положим $\mathcal{A}_N(T)=\{A:\ \operatorname{cost}\{A(T,H,f)\}\le N\}$. Рассматривая алгоритмы из $\mathcal{A}_N(T)$, естественно полагать, что $T\in\mathcal{T}_M$ при $M\le N$. В противном случае алгоритмы из $\mathcal{A}_N(T)$ не используют всю информацию, представленную компонентами вектора $T(H,f)$.

Погрешностью алгоритма A на классе $[\mathcal{H},\Phi]$, как обычно, будем называть величину

$$\mathcal{E}(A,[\mathcal{H},\Phi]) = \sup_{\substack{z=Hz+f\\ H\in\mathcal{H},\, f\in\Phi}} \|z-A(T,H,f)\|.$$

Положим

$$E_N([\mathcal{H},\Phi]) = \inf_{T\in\mathcal{T}_M,\, M\le N}\ \inf_{A\in\mathcal{A}_N(T)} \mathcal{E}(A,[\mathcal{H},\Phi]).$$

Под ε-сложностью задачи приближенного решения уравнений из класса $[\mathcal{H},\Phi]$ будем понимать величину

$$\operatorname{comp}(\mathcal{E},[\mathcal{H},\Phi]) = \inf\{N:\ E_N([\mathcal{H},\Phi])\le\varepsilon\}, \tag{3}$$

равную минимальному числу э. а. о., которые необходимо выполнить для достижения точности ε на классе $[\mathcal{H},\Phi]$.

Пусть $\mathcal{M}_N$ — множество всех возможных непрерывных отображений φ, действующих из W_2^r в N-мерное евклидово пространство R_N, а

$$\varphi^{-1}\circ\varphi(g) = \{f:\ f\in W_2^r,\ \varphi(g)=\varphi(f)\}$$

— полный прообраз элемента $\varphi(g)\in R_N$. Предтабличным поперечником по К. И. Бабенко шара $W_{2,\gamma}^r=\{f:\ f\in W_2^r,\ \|f\|_{W_2^r}\le\gamma\}$ в пространстве L_2 называется величина

$$\Delta_N(W_{2,\gamma}^r, L_2) = \inf_{\varphi\in\mathcal{M}_N}\ \sup_{g\in W_{2,\gamma}^r}\ \sup_{f_1,f_2\in\varphi^{-1}\circ\varphi(g)} \|f_1-f_2\|.$$

Известно [8, с. 247], что

$$\Delta_N(W_{2,\gamma}^r, L_2) \asymp N^{-r}. \tag{4}$$

Пусть $\mathcal{L}(W_2^\nu, W_2^\mu)$ — пространство линейных непрерывных операторов H из W_2^ν в W_2^μ с обычной нормой

$$\|H\|_{\mathcal{L}(W_2^\nu,W_2^\mu)} = \|H\|_{\nu\to\mu} := \sup_{\|f\|_\nu\le1}\|Hf\|_\mu.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 [5]. *Пусть* $\|H\|_{r\to r}\le\alpha$ *для любого оператора* $H\in\mathcal{H}$. *Тогда*

$$E_N([\mathcal{H},W_{2,1}^r]) \ge 2^{-1}\Delta_N(W_{2,\gamma}^r,L_2),\quad \gamma=(I+\alpha)^{-1}.$$

2. Вспомогательные утверждения. Используя разложение в ряд Фурье

$$-\ln\left|2\sin\frac{t-\tau}{2}\right| = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(mt-m\tau)}{m} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m}\left(e^{-im(t-\tau)}+e^{im(t-\tau)}\right) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\theta(m)e^{im(t-\tau)}, \qquad \theta(m) = \begin{cases}0, & m=0;\\ \left|m^{-1}\right|, & m=\pm 1, \pm 2, \ldots,\end{cases}$$

получаем следующее представление для операторов из уравнений (1):

$$Hg(t) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{-a(t,\tau)}{\pi}\ln\left|2\sin\frac{t-\tau}{2}\right|g(\tau)\,d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ikt}\sum_{l=-\infty}^{\infty}H_{kl}\hat{g}(l), \tag{5}$$

где

$$H_{kl} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{a}(k-m, m-l)\,\theta(m).$$

Лемма 2 [9]. *Пусть* $a \in \mathbb{A}_h$ *и* $\lambda \geq 0$. *Тогда для оператора* H *вида* (5) *справедлива оценка* $\|H\|_{\lambda\to\lambda+1} \leq c_\lambda \|a\|_{\lambda+1,\lambda+1}$, *где* c_λ *— некоторая постоянная, зависящая лишь от* λ,

$$\|a\|_{p,p} := \left(\sum_{\nu,\mu=-\infty}^{\infty}|\underline{\nu}|^{2p}\,|\underline{\mu}|^{2p}\,|\hat{a}(\nu,\mu)|^2\right)^{1/2}, \qquad \underline{b} := \begin{cases}b, & b\neq 0;\\ 1, & b=0.\end{cases}$$

Рассмотрим оператор H_n, задаваемый соотношением

$$H_n g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ikt}\sum_{l=-\infty}^{\infty}H_{kl}^n\,\hat{g}(l), \tag{6}$$

где

$$\hat{H}_{kl}^n = \sum_{m:\,|k-m|+|m-l|\leq n}\hat{a}(k-m, m-l)\,\theta(m).$$

Лемма 3. *Для* $a \in \mathbb{A}_h$ *и* $\lambda \geq 0$ *при* $n \geq 2(\lambda+1)h^{-1}$ *справедливо*

$$\|H-H_n\|_{\lambda\to\lambda+1} \leq d_\lambda n^{2(\lambda+1)}e^{-nh}\|a\|_h,$$

где d_λ *— некоторая постоянная, зависящая лишь от* λ.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$a_n(t,\tau) = \sum_{|\nu|+|\mu|\leq n}e^{i\nu t}e^{i\mu\tau}\hat{a}(\nu,\mu).$$

Легко видеть, что

$$\hat{a}_n(\nu,\mu) = \begin{cases}\hat{a}(\nu,\mu), & |\nu|+|\mu|\leq n;\\ 0, & |\nu|+|\mu|>n.\end{cases}$$

Но тогда из (5) находим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-a_n(t,\tau)}{\pi}\ln\left|2\sin\frac{t-\tau}{2}\right|g(\tau)\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{a}_n(k-m, m-l)\theta(m) \right)\hat{g}(l) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m:\,|k-m|+|m-l|\le n} \hat{a}(k-m, m-l)\theta(m) \right)\hat{g}(l) = H_n g(t). \tag{7}$$

Теперь в силу леммы 2

$$\| H - H_n \|_{\lambda\to\lambda} \le c_\lambda \| a - a_n \|_{\lambda+1,\lambda+1}. \tag{8}$$

Заметим, что для $a \in \mathbb{A}_h$ при $q > 0$

$$\| a - a_n \|_{q,q}^2 = \left\| \sum_{|\nu|+|\mu|>n} e^{i\nu t} e^{i\mu\tau} \hat{a}(\nu,\mu) \right\|_{q,q}^2 =$$

$$= \sum_{|\nu|+|\mu|>n} |\underline{\nu}|^{2q} |\underline{\mu}|^{2q} |\hat{a}(\nu,\mu)|^2 \le 16 \sum_{|\nu|+|\mu|>n} \frac{|\underline{\nu}|^{2q} |\underline{\mu}|^{2q}}{e^{2h(|\nu|+|\mu|)}} \operatorname{ch}^2 \nu h \operatorname{ch}^2 \mu h |\hat{a}(\nu,\mu)|^2 =$$

$$= 16 \sum_{p=n+1}^{\infty} \sum_{|\nu|+|\mu|=p} \frac{|\underline{\nu}|^{2q} |\underline{\mu}|^{2q}}{e^{2h(|\nu|+|\mu|)}} \operatorname{ch}^2 \nu h \operatorname{ch}^2 \mu h |\hat{a}(\nu,\mu)|^2. \tag{9}$$

С другой стороны, для $|\nu| + |\mu| = p \ge 2$

$$|\underline{\nu}||\underline{\mu}| \le \frac{(2+|\nu|+|\mu|)^2}{4} = \frac{(p+2)^2}{4} \le p^2.$$

Кроме того, для $p > n \ge 2(\lambda+1)h^{-1}$ $p^{4(\lambda+1)}e^{-2ph} \le n^{4(\lambda+1)}e^{-2nh}$. Учитывая эти два обстоятельства, из (9) находим

$$\| a - a_n \|_{\lambda+1,\lambda+1}^2 \le 16 \sum_{p=n+1}^{\infty} p^{4(\lambda+1)} e^{-2ph} \sum_{|\nu|+|\mu|=p} \operatorname{ch}^2 \nu h \operatorname{ch}^2 \mu h |\hat{a}(\nu,\mu)|^2 \le$$

$$\le 16 n^{4(\lambda+1)} e^{-2nh} \sum_{|\nu|+|\mu|>n} \operatorname{ch}^2 \nu h \operatorname{ch}^2 \mu h |\hat{a}(\nu,\mu)|^2 \le 16 n^{4(\lambda+1)} e^{-2nh} \| a \|_h^2.$$

Утверждение леммы 3 следует из последнего неравенства и (8).

***Замечание* 1.** Очевидно, что при $a \in \mathbb{A}_h$ и любом $\lambda > 0$ найдется постоянная $c_{\lambda,h}$ такая, что $\| a \|_{\lambda+1,\lambda+1} \le c_{\lambda,h} \| a \|_h$. Условимся в дальнейшем обозначать буквой C различные постоянные, зависящие лишь от параметров типа λ, r, h, значения которых фиксированы для данного класса уравнений (1). Таким образом, из лемм 2 и 3 следует, что для $a \in \mathbb{A}_h$ операторы (5) и (6) действуют из W_2^λ в $W_2^{\lambda+1}$, $\lambda > 0$, и

$$\| H \|_{\lambda\to\lambda+1} \le C \| a \|_h, \quad \| H_n \|_{\lambda\to\lambda+1} \le C \| a \|_h. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь функцию $a^*(t,\tau) = a(\tau,t)$. Так как $\| a^* \|_h = \| a \|_h$, то в силу (10) для оператора

$$H_n^* g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-a_n(\tau,t)}{\pi} \ln\left| 2\sin\frac{t-\tau}{2} \right| g(\tau)\,d\tau \tag{11}$$

также справедлива оценка

$$\| H_n^* \|_{\lambda \to \lambda+1} \leq C \| a \|_h. \tag{12}$$

Обозначим через F_ν^T $(2\nu+1)$-мерное подпространство тригонометрических полиномов

$$g(t) = \sum_{l=-\nu}^{\nu} \hat{g}(l) e^{ilt} \tag{13}$$

порядка не выше ν, а через $S_\nu f(t)$ частную сумму порядка ν ряда Фурье функции $f(t)$ по тригонометрической системе, т. е.

$$S_\nu f(t) = \sum_{l=-\nu}^{\nu} \hat{f}(l) e^{ilt}.$$

Известно, что оператор S_ν является ортопроектором на F_ν^T, т. е. $S_\nu^2 = S_\nu$ и $S_\nu^* = S_\nu$. Кроме того, для $p, q > 0$

$$\| I - S_\nu \|_{p \to p-q} \leq \nu^{-q}, \tag{14}$$

где I — единичный оператор.

Лемма 4. *Если* $g \in F_\nu^T$, *то* $H_n g \in F_{\nu+n}^T$. *Более того, если* $\mathrm{cost}(H_n g)$ — *число э. а. о., которые нужно выполнить над коэффициентами Фурье* $\hat{a}(k,l)$, $\hat{g}(l)$ *для вычисления коэффициентов полинома* $H_n g$, *то*

$$\mathrm{cost}(H_n g) \leq C n^2 (\nu + n).$$

Доказательство. Так как для любого полинома $g \in F_\nu^T$ при $|l| > \nu$ следует $\hat{g}(l) = 0$, то в силу (7)

$$H_n g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} \sum_{l=-\nu}^{\nu} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{a}_n(k-m, m-l) \theta(m) \right) \hat{g}(l). \tag{15}$$

Заметим теперь, что для $|l| \leq \nu$, $|k| > \nu + n$ и любого m $|k-m| + |m-l| \geq$ $\geq |k-l| \geq |k| - |l| > \nu + n - \nu = n$. Учитывая это обстоятельство и то, что $\hat{a}_n(k-$ $-m, m-l) = 0$ при $|k-m| + |m-l| > n$, из (15) находим

$$H_n g(t) = \sum_{|k| \leq \nu+n}^{\infty} e^{ikt} \sum_{|l| \leq \nu} \hat{g}(l) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{a}_n(k-m, m-l) \theta(m) \right) =$$

$$= \sum_{k \leq -\nu-n}^{\nu+n} e^{ikt} \sum_{|l| \leq \nu} H_{kl}^n \hat{g}(l) = \sum_{k \leq -\nu-n}^{\nu+n} e^{ikt}\, \widehat{H_n g}(k),$$

где

$$\widehat{H_n g}(k) = \sum_{l=-\nu}^{\nu} H_{kl}^n \hat{g}(l), \quad H_{kl}^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{a}_n(k-m, m-l) \theta(m).$$

Вновь используя тот факт, что $\hat{a}_n(k-m, m-l) = 0$ при $|k-m| + |m-l| > n$, из очевидного соотношения $|k-m| + |m-l| > |k-l|$ и представления для H_{kl}^n находим

$$H_{kl}^n = \begin{cases} 0, & |k-l| > n; \\ \sum\limits_{m:\, |k-m|+|m-l| \leq n} \hat{a}(k-m, m-l) \theta(m), & |k-l| \leq n. \end{cases} \tag{16}$$

Но тогда

$$H_n\hat{g}(k) = \sum_{l=-\nu}^{\nu} H^n_{kl}\hat{g}(l) = \sum_{l:\,|k-l|\le n} H^n_{kl}\hat{g}(l) = \sum_{l=k-n}^{k+n} H^n_{kl}\hat{g}(l).$$

Подставляя это равенство в выражение для $H_n g(t)$, имеем

$$H_n g(t) = \sum_{k\le -\nu-n}^{\nu+n} e^{ikt} \sum_{l=k-n}^{k+n} H^n_{kl}\hat{g}(l).$$

Это означает, что $H_n g \in F^T_{\nu+n}$ и для вычисления всех коэффициентов $\widehat{H_n g}(k)$ достаточно выполнить не более $C(2n+1)(2\nu+2n+1)$ э. а. о. над числами H^n_{kl} и коэффициентами $\hat{g}(l)$.

С другой стороны, для вычисления всех чисел H^n_{kl} нужно выполнить э. а. о. над коэффициентами Фурье функции $a(t,\tau)$. Из (16) следует, что число Q этих операций удовлетворяет неравенству

$$Q < C\operatorname{card}\{m:\ |k-m|+|m-l|\le n\}\operatorname{card}\{(k,l):\ k\in[-\nu-n,\nu+n],$$
$$l\in[-\nu,\nu],\ |k-l|\le n\},$$

где $\operatorname{card}\{B\}$ — число точек с целочисленными координатами из плоского множества B. Легко видеть, что

$$\operatorname{card}\{m:\ |k-m|+|m-l|\le n\} \le \operatorname{card}\{m:\ |k-m|\le n\} =$$
$$= \operatorname{card}\{m:\ m\in[k-n,k+n]\} \le 2n+1.$$

Кроме того,

$$\operatorname{card}\{(k,l):\ k\in[-\nu-n,\nu+n],$$
$$l\in[-\nu,\nu],\ |k-l|\le n\} \le \operatorname{card}\{(k,l):\ k\in[-\nu-n,\nu+n],$$
$$l\in[k-n,k+n]\} \le (2n+1)(2\nu+2n+1).$$

Таким образом, $Q\le C(2n+1)^2(2\nu+2n+1)$. В результате имеем $\operatorname{cost}(H_n g)\le$ $\le C(2\nu+2n+1)(2n+1)+Q\le Cn^2(\nu+n)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если* $a\in\mathbb{A}_h$, *то для операторов* (5), (6) *справедлива оценка* $\|H-H_n\|_{r\to 0}\le Ce^{-nh}\|a\|_h$, *где постоянная* C *зависит лишь от* r.

Доказательство. Используя неравенство Коши – Буняковского, для произвольного элемента $g\in W^r_2$ имеем

$$\|Hg-H_n g\|^2 = \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(H_{kl}-H^n_{kl}\right)\hat{g}(l)\right)\right\|^2 =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(H_{kl}-H^n_{kl}\right)\hat{g}(l)\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{\left(H_{kl}-H^n_{kl}\right)}{\left(1+|l|^2\right)^{r/2}}\left(1+|l|^2\right)^{r/2}\hat{g}(l)\right|^2 \le$$

$$\le \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{\left|H_{kl}-H^n_{kl}\right|^2}{\left(1+|l|^2\right)^r}\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(1+|l|^2\right)^r|\hat{g}(l)|^2\right) \le$$

$$\le \|g\|^2_r \sum_{k,\,l=-\infty}^{\infty}\frac{\left|H_{kl}-H^n_{kl}\right|^2}{\left(1+|l|^2\right)^r}. \tag{17}$$

Из (5) и (6) следует

$$\left|H_{kl}-H_{kl}^{n}\right|^{2} = \left|\sum_{m:\,|k-m|+|m-l|>n} \hat{a}(k-m, m-l)\theta(m)\right|^{2} =$$

$$= \left|\sum_{m:\,|k-m|+|m-l|>n} \operatorname{ch}^{2}(k-m)h\operatorname{ch}^{2}(m-l)h\,|\hat{a}(k-m, m-l)|^{2}\frac{\theta(m)}{\operatorname{ch}^{2}(k-m)h\operatorname{ch}^{2}(m-l)h}\right|^{2} \le$$

$$\le C \sum_{m:\,|k-m|+|m-l|>n} \operatorname{ch}^{2}(k-m)h\operatorname{ch}^{2}(m-l)h\,|\hat{a}(k-m, m-l)|^{2} \times$$

$$\times \sum_{m:\,|k-m|+|m-l|>n} e^{-2h(|k-m|+|m-l|)}\theta^{2}(m) \le$$

$$\le Ce^{-2nh}\sum_{m=-\infty;\,m\neq 0}^{\infty} m^{-2} \sum_{m:\,|k-m|+|m-l|>n} \operatorname{ch}^{2}(k-m)h\operatorname{ch}^{2}(m-l)h\,|\hat{a}(k-m, m-l)|^{2} \le$$

$$\le Ce^{-2nh} \sum_{m:\,|k-m|+|m-l|>n} \operatorname{ch}^{2}(k-m)h\operatorname{ch}^{2}(m-l)h\,|\hat{a}(k-m, m-l)|^{2}.$$

Подставляя эту оценку в (17), находим, что для любого элемента $g \in W_2^r$

$$\|Hg-H_n g\|^{2} \le C\|g\|_r^2 e^{-2nh}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(1+|l|^{2}\right)^{-r} \times$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m:\,|k-m|+|m-l|>n} \operatorname{ch}^{2}(k-m)h\operatorname{ch}^{2}(m-l)h\,|\hat{a}(k-m, m-l)|^{2} \le$$

$$\le C\|a\|_h^2\|g\|_r^2 e^{-2nh}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(1+|l|^{2}\right)^{-r} \le C\|a\|_h^2\|g\|_r^2 e^{-2nh}.$$

Лемма доказана.

3. Основной результат. Будем рассматривать уравнения (1) с коэффициентами $a(t,\tau)\in \mathbb{A}_h$ и свободными членами $f(t)\in W_2^r$, $r = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющими условиям $\|a\|_h\le\alpha$, $\|f\|_r\le\beta$. Кроме того, будем предполагать, что нормы резольвент интегральных операторов H уравнений (1) ограничены в совокупности постоянной γ, т. е. $\|(I-H)^{-1}\|_{0\to 0}\le\gamma$. Класс таких уравнений (1) обозначим через $\Psi^{h,r}=\Psi^{h,r}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Из леммы 2 и замечания 1 следует существование постоянных $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$, зависящих только от α и γ и таких, что для операторов H уравнений (1) из класса $\Psi^{h,r}(\alpha,\beta,\gamma)$

$$\|(I-H)^{-1}\|_{\nu\to\nu} \le \gamma_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots . \tag{18}$$

В самом деле, при $\nu=0$ и $\gamma_0=\gamma$ справедливость (18) следует из определения класса $\Psi^{h,r}(\alpha,\beta,\gamma)$. Пусть теперь при $\nu = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ справедливо (18). Тогда при $\nu = m$ из очевидного тождества $(I-H)^{-1}=I+H(I-H)^{-1}$ и (10) следует

$$\|(I-H)^{-1}\|_{m\to m} = \|I+H(I-H)^{-1}\|_{\nu\to\nu} \le$$

$$\le 1 + \|H\|_{m-1\to m}\|(I-H)^{-1}\|_{m\to m-1} \le 1 + C\|a\|_h\|(I-H)^{-1}\|_{m-1\to m-1} \le$$

$$\le 1 + C\alpha\gamma_{m-1} := \gamma_m .$$

Таким образом, индукцией по ν соотношение (18) доказано.

Рассмотрим способ задания информации $T_{n,N}$ об уравнениях (1) класса $\Psi^{h,r}$, определяемый набором функционалов

$$\delta_{\nu,\mu}(H) = \hat{a}(\nu,\mu), \quad |\nu| + |\mu| \le n, \qquad \delta_k(f) = \hat{f}(k), \quad |k| \le N.$$

Легко видеть, что

$$\operatorname{card}(T_{n,N}) \asymp N + n^2 \tag{19}$$

и информации $T_{n,N}(H,f)$ достаточно для того, чтобы по уравнению (1) построить уравнение

$$\bar{z} = H_n \bar{z} + S_N f, \tag{20}$$

где H_n определен соотношением (6). Для каждого уравнения (20) определим последовательность элементов

$$z_0 = 0, \quad z_k = z_{k-1} + (I - S_m H_n S_M)^{-1}(H_n S_M z_{k-1} - z_{k-1} + S_N f),$$
$$k = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

и рассмотрим алгоритм $A^r_{m,M} \in \mathcal{A}_{N_1}(T_{n,N})$, при котором каждому уравнению (1) из $\Psi^{h,r}$ сопоставляется в качестве приближенного решения элемент $A^r_{m,M}(T_{n,N}, H, f) = z_{3r}$, определяемый соотношением (21) при $k = 3r$.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Справедливо соотношение* $\operatorname{comp}(\varepsilon, \Psi^{h,r}) \asymp \varepsilon^{-1/r}$. *Способ задания информации* $T_{n,N}$ *и алгоритм* $A^r_{m,M}$ *реализуют оптимальный порядок сложности на классе* $\Psi^{h,r}$ *при* $N \asymp \varepsilon^{-1/r}$, $M \asymp \varepsilon^{-1/(r+1)}$, $n \asymp h^{-1}\log(\varepsilon^{-1})$, $m \asymp \varepsilon^{-1/3r}$.

Доказательство. Прежде всего оценим $\operatorname{cost}\{A^r_{m,M}(T_{n,N}, H, f)\}$. Из (21) следует, что z_k можно представить в виде

$$z_k = z_{k-1} + \delta_{k-1}, \tag{22}$$

где δ_{k-1} является решением уравнения с конечномерным оператором

$$\delta_{k-1} = S_m H_n S_M \delta_{k-1} + H_n S_M z_{k-1} - z_{k-1} + S_N f. \tag{23}$$

Так как по определению $z_0 = 0$ и $m = N^{1/3}$, то в силу (23) $\delta_0, z_1 \in F^T_N$. Кроме того, из леммы 4 следует, что при любом k $H_n S_M z_{k-1} \in F^T_{M+n}$ $M + n \asymp \asymp \varepsilon^{-1/(r+1)} \asymp N^{r/(r+1)} < N$. Таким образом, при любом k $\delta_{k-1}, z_k \in F^T_N$.

Пусть z_{k-1} уже определено. Тогда для определения z_k нужно найти коэффициенты полинома $H_n S_M z_{k-1}$, что в силу леммы 4 потребует выполнения э. а. о., общее число которых определяется соотношением

$$\operatorname{cost}(H_n S_M z_{k-1}) \le C n^2 (M + n) \asymp \varepsilon^{-1/(r+1)} \ln^2(\varepsilon^{-1}).$$

Приводя подобные члены, определяем коэффициенты полинома $H_n S_M z_{k-1} - - z_{k-1} + S_N f \in F^T_N$, что потребует еще $N \asymp \varepsilon^{-1/r}$ э. а. о. После этого поправка δ_{k-1} определяется из уравнения (23). Поскольку оператор $S_m H_n S_M$ этого уравнения является конечномерным оператором ранга $2m+1$, то, как известно, решение (23) сведется к системе $(2m+1)$ линейных алгебраических уравнений. Решение такой системы методом Гаусса потребует $C(2m+1)^3 \asymp \varepsilon^{-1/r}$

э. а. о. Определяя δ_{k-1}, находим $z_k \in F_N^T$ из (22) в виде полинома (13) при $\nu = N$. Для этого потребуется еще раз найти коэффициенты при подобных членах, что потребует $N \asymp \varepsilon^{-1/r}$ э. а. о. Таким образом, если z_{k-1} определено, то

$$\operatorname{cost}(z_k) = \operatorname{cost}(H_n S_M z_{k-1}) + C_1 N + C_2(2m+1)^3 \le$$
$$\le Cn^2(M+n) + C_1 N + C_2(2m+1)^3 \asymp$$
$$\asymp \varepsilon^{-1/(r+1)} \ln^2(\varepsilon^{-1}) + \varepsilon^{-1/r} \asymp \varepsilon^{-1/r}.$$

Но тогда по построению

$$\operatorname{cost}\{A^r_{m,M}(T_{n,N}; H, f)\} = \sum_{k=0}^{3r} \operatorname{cost}(z_k) \asymp \varepsilon^{-1/r}. \tag{24}$$

Оценим теперь величину $\mathcal{E}(A^r_{m,M}, \Psi^{h,r})$, т. е. погрешность алгоритма $A^r_{m,M}$ на классе $\Psi^{h,r}$.

Пусть z и $\bar{z}$ — решения уравнений соответственно (1) и (20). Тогда из леммы 5 и (14) находим

$$\| z - \bar{z} \| = \| (I - H_n)^{-1}((H - H_n)z + f - S_N f) \| \le$$
$$\le \| (I-H)^{-1} \|_{0\to 0} (\| (H - H_n) \|_{r\to 0} \| z \|_r +$$
$$+ \| I - S_N \|_{r\to 0} \| f \|_r) \le \| (I-H)^{-1} \|_{0\to 0} (C\alpha e^{-nh} \| z \|_r + \beta N^{-r}). \tag{25}$$

Если уравнение (1) принадлежит классу $\Psi^{h,r}(\alpha, \beta, \gamma)$, то в силу (18)

$$\| z \|_r = \| (I-H)^{-1} f \|_r \le \| (I-H)^{-1} \|_{r\to r} \| f \|_r \le \gamma_r \beta, \tag{26}$$

где r — целое число.

Кроме того, используя теорему об оценке норм резольвент близких операторов [10, с. 517] и лемму 3, при достаточно больших n имеем

$$\| (I - H_n)^{-1} \|_{\nu\to\nu} \le \frac{\left\| (I-H)^{-1} \right\|_{\nu\to\nu}}{1 - \left\| (I-H)^{-1} \right\|_{\nu\to\nu} \| H - H_n \|_{\nu\to\nu+1}} \le$$
$$\le \frac{\gamma_\nu}{1 - \gamma_\nu \| H - H_n \|_{\nu\to\nu+1}} \le \frac{\gamma_\nu}{1 - \alpha \gamma_\nu d_\nu n^{2(\nu+1)} e^{-nh}} \le \gamma_{\nu h}, \tag{27}$$

где постоянная $\gamma_{\nu h}$ не зависит от n. Объединяя (25) – (27), для $n \asymp h^{-1} \times \ln(\varepsilon^{-1})$, $N \asymp \varepsilon^{-1/r}$ получаем

$$\| z - \bar{z} \| \le \gamma_{0h}(C\alpha e^{-nh} \gamma_r \beta + \beta N^{-r}) \asymp \varepsilon. \tag{28}$$

Более того, из (27) находим

$$\| \bar{z}_r \| = \| (I - H_n)^{-1} S_N f \|_r \le \| (I - H_N)^{-1} \|_{r\to r} \| S_N \|_{r\to r} \| f \|_r \le \gamma_{rh} \beta. \tag{29}$$

Наряду с уравнением (20) рассмотрим уравнение

$$\bar{z}_M = H_n S_M \bar{z}_M + S_N f. \tag{30}$$

В силу замечания 1 и (14) имеем

$$\| H_n - H_n S_M \|_{\nu\to\nu} \le \| H_n \|_{\nu-1\to\nu} \| I - S_M \|_{\nu\to\nu-1} \le$$
$$\le C \| a \|_h M^{-1} \le C\alpha M^{-1}, \tag{31}$$

$$\| H_n - H_n S_M \|_{r\to 0} = \sup_{\|\varphi\|_r \le 1} \| H_n\varphi - H_n S_M \varphi \| =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_r \le 1} \sup_{\|\psi\| \le 1} (H_n(I - S_M)\varphi, \psi) = \sup_{\|\varphi\|_r \le 1} \sup_{\|\psi\| \le 1} ((I - S_M)\varphi, (I - S_M) H_n^* \psi) \le$$

$$\le \sup_{\|\varphi\|_r \le 1} \| (I - S_M)\varphi \| \sup_{\|\psi\| \le 1} \| (I - S_M) H_n^* \psi \| \le$$

$$\le \| I - S_M \|_{r\to 0} \| I - S_M \|_{1\to 0} \| H_n^* \|_{0\to 1} \le C\alpha M^{-r-1}. \tag{32}$$

Кроме того, из (27) и (31) следует, что при достаточно большом M

$$\| (I - H_n S_M)^{-1} \|_{\nu\to\nu} \le \frac{\left\|(I - H_n)^{-1}\right\|_{\nu\to\nu}}{1 - \left\|(I - H_n)^{-1}\right\|_{\nu\to\nu} \| H_n - H_n S_M \|_{\nu\to\nu}} \le$$

$$\le \frac{\gamma_{\nu h}}{1 - C\alpha\gamma_{\nu h} M^{-1}} \le \gamma_{\nu 1}, \tag{33}$$

где $\gamma_{\nu 1}$ не зависит от n и M. Таким образом, при $M \asymp \varepsilon^{-1/(r+1)}$ из (29) – (33) имеем

$$\| \bar z - \bar z_M \| = \| (I - H_n S_M)^{-1} (H_n - H_n S_M) \bar z \| \le$$

$$\le \| (I - H_n S_M)^{-1} \|_{0\to 0} \| H_n - H_n S_M \|_{r\to 0} \| \bar z \|_r \le C\gamma_{01}\alpha\gamma_{\nu h}\beta M^{-r-1} \asymp \varepsilon. \tag{34}$$

Заметим теперь, что решение уравнения (30) допускает представление

$$\bar z_M = z_{k-1} + \Delta_{k-1}, \tag{35}$$

где $\Delta_{k-1} = \bar z_M - z_{k-1}$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{k-1} = H_n S_M \Delta_{k-1} + H_n S_M z_{k-1} - z_{k-1} + S_N f, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{36}$$

С другой стороны, из замечания 1, (14) и (33) следует

$$\| H_n S_M - S_m H_n S_M \|_{0\to 0} \le \| I - S_m \|_{1\to 0} \| H_n \|_{0\to 1} \| S_M \|_{0\to 0} \le C\alpha m^{-1} \tag{37}$$

и при достаточно больших m

$$\| (I - S_m H_n S_M)^{-1} \|_{0\to 0} \le \frac{\left\|(I - H_n S_M)^{-1}\right\|_{0\to 0}}{1 - \left\|(I - H_n S_M)^{-1}\right\|_{0\to 0} C\alpha m^{-1}} \le$$

$$\le \frac{\gamma_{01}}{1 - C\alpha\gamma_{01} m^{-1}} \le \bar\gamma, \tag{38}$$

где $\bar\gamma$ не зависит от m, n, M. Но тогда из (23), (35) – (38) находим

$$\| \Delta_k \| = \| \bar z_M - z_k \| = \| \Delta_{k-1} - \delta_{k-1} \| =$$

$$= \| (I - S_m H_n S_M)^{-1} (H_n S_M - S_m H_n S_M) \Delta_{k-1} \| \le$$

$$\le \bar\gamma C\alpha m^{-1} \| \Delta_{k-1} \| \le (\bar\gamma C\alpha m^{-1})^2 \| \Delta_{k-2} \| \le \ldots \le (\bar\gamma C\alpha m^{-1})^k \| \Delta_0 \| =$$

$$= (\bar\gamma C\alpha m^{-1})^k \| \bar z_M \| \le C m^{-k} \| (I - H_n S_M)^{-1} S_N f \| \le C\gamma_{01}\beta m^{-k}.$$

Это означает, что при $k = 3r$, $m \asymp \varepsilon^{-1/3r}$

$$\| z_M - A^r_{m,M}(T_{n,N}, H, f) \| = \| \bar z_M - z_{3r} \| \le C m^{-3r} \asymp \varepsilon. \tag{39}$$

Таким образом, из (28), (34), (39) окончательно получаем

$$\mathcal{E}\left(A^r_{m,M}, \Psi^{h,r}\right) \leq C\varepsilon, \tag{40}$$

что с учетом (24) приводит к требуемой оценке сверху

$$\operatorname{comp}(\varepsilon, \Psi^{h,r}) \leq C\varepsilon^{-1/r}. \tag{41}$$

С другой стороны, из леммы 1, замечания 1 и (4) следует, что $E_N(\Psi^{h,r}) \geq CN^{-r}$ и неравенство $E_N(\Psi^{h,r}) \leq \varepsilon$ возможно лишь при $N \geq C\varepsilon^{-1/r}$. Но тогда

$$\operatorname{comp}(\varepsilon, \Psi^{h,r}) = \inf\{N\colon E_N(\Psi^{h,r}) \leq \varepsilon\} \geq C\varepsilon^{-1/r}. \tag{42}$$

Утверждение теоремы следует теперь из (40) – (42).

***Замечание* 2.** В работе [7] построен алгоритм, который для уравнений вида (1) из класса $\Psi^{h,r}$ обеспечивает точность ε после выполнения $O(\varepsilon^{-2/r})$ э. а. о. Сравнение этого результата с доказанной теоремой позволяет заключить, что для уравнений (1) из класса $\Psi^{h,r}$ алгоритм из [7] не является оптимальным в смысле сложности. Справедливости ради следует отметить, что алгоритм из [7] применим и к более широкому, чем $\Psi^{h,r}$, классу уравнений.

1. *Wozniakowski H.* Information-based complexity // Ann. Rev. Comput. Sci. – 1986. – **1**. – P. 318–380.
2. *Переверзев С. В.* О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма второго рода с гладкими ядрами. II // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 189–193.
3. *Переверзев С. В.* Гиперболический крест и сложность приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с дифференцируемыми ядрами // Сиб. мат. журн. – 1991. – **32**, № 1. – С. 107–115.
4. *Frank K., Heinrich S., Pereverzev S. V.* Information complexity of multivariate Fredholm integral equations in Sobolev classes. – Kaiserslautern, 1995. – 17 p. – (Technical Report / Univ. Kaiserslautern; 263 / 95).
5. *Pereverzev S. V., Sharipov C. C.* Information complexity of the equations of the second kind with compact operators in Hilbert space // J. Complexity. – 1992. – **8**, № 2. – P. 176–202.
6. *Маккамов К. Ш.* О сложности задачи нахождения решений слабо сингулярных интегральных уравнений // Докл. НАН Украины. – 1994. – № 1. – С. 28–34.
7. *Yan Y.* A fast numerical solution for a second kind boundary integral equation with a logarithmic kernel // SIAM J. Numer. Anal. – 1994. – **31**, № 2. – P. 477–498.
8. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
9. *Saranen J., Vainikko G.* Trigonometric collocation methods with product integration for boundary integral equations on closed curves // SIAM J. Numer. Anal. – 1995. – **32**, № 2. – P. 169–175.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

Получено 29.01.96