УДК 517.5

Ю. В. Великина (ун-т штата Висконсин, Мэдисон (США)),
В. Л. Великин (Днепропетр. ун-т)

ПОПЕРЕЧНИКИ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИЙ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТА*

We obtain exact values of Kolmogorov and linear widths of arbitrary dimension for sets of functions of discrete variable with bounded difference of a given order.

Знайдені точні значення колмогоровських та лінійних поперечників будь-якої вимірності множин функцій дискретного аргументу з обмеженою різницею заданого порядку.

1. Введение. Пусть l — линейное пространство последовательностей $x = (x_i)_{i=-\infty}^{\infty} = (x_i)$, $x_i \in \mathbb{R}$. Будем рассматривать его подпространство l^{2p} периодических последовательностей с периодом $2p$, т. е. таких, у которых $x_{i+2p} = x_i$, $i \in \mathbb{Z}$. Через l_ρ^{2p}, $1 \le \rho \le \infty$, будем обозначать нормированное пространство последовательностей $x \in l^{2p}$ с ρ-нормой

$$\|x\|_\rho = \left(\sum_{i=1}^{2p} |x_i|^\rho\right)^{1/\rho}, \quad 1 \le \rho \le \infty, \qquad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Ясно, что l_ρ^{2p} изометрично $\mathbb{R}_\rho^{2p}$, скалярное произведение элементов $x, y \in l_\rho^{2p}$ определяем как в пространстве $\mathbb{R}_\rho^{2p}$.

Для $x \in l$ положим

$$\Delta^1 x = \Delta x = (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i), \qquad \Delta^k x = (\Delta^k x_i = \Delta^{k-1} x_{i+1} - \Delta^{k-1} x_i), \quad k = 2, 3, \ldots,$$

и $\Delta^{-k} x$, $k \in \mathbb{N}$ — k-ю первообразную последовательности x — определяем как последовательность, для которой $\Delta^k(\Delta^{-k} x) = x$ и

$$\sum_{i=1}^{2p} \Delta^{-\nu} x_i = 0, \quad \nu = \overline{1, k-1}.$$

Для произвольного тригонометрического полинома

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

положим $t^n = \left(t_i^n\right)$, $t_i^n = T_n(i\pi/p)$, $i \in \mathbb{Z}$, и последовательность t^n будем называть t-последовательностью порядка n. Линейное подпространство пространства l^{2p} всех t-последовательностей порядка n обозначим через F_{2n-1}. Отметим, что последовательности $(p_n(i))$, где p_n — алгебраический полином степени n, рассматривались еще Валле Пуссеном в [1] в задачах наилучшей дискретной аппроксимации полиномами. Эти вопросы в дальнейшем были развиты в работах [2 – 6]. В более общем виде с вопросами дискретной аппроксимации можно ознакомиться в [7 – 9].

Пусть (см., например, [10], § 10.1)

$$d_n(M) = \inf_{\Phi_n} \sup_{x \in M} \inf_{u \in \Phi_n} \|x - u\|_\infty \text{ и } d_n'(M) = \inf_{\Phi_n} \inf_{A:\, l^{2p} \to \Phi_n} \sup_{x \in M} \|x - u\|_\infty,$$

* Частично поддержана Международной Соросовской Программой поддержки образования в области точных наук в Украине (гранты № GSU041014 и APU051025).

© Ю. В. ВЕЛИКИНА, В. Л. ВЕЛИКИН, 1996

— соответственно колмогоровский и линейный поперечник размерности n центрально-симметричного множества $M \subset l^{2p}$, где Φ_n — произвольное подпространство в l^{2p} размерности n, а A — линейный оператор, отображающий l^{2p} в Φ_n.

Положим

$$\Omega_\mu^r = \{x \in l^{2p}: \|\Delta^r x\|_\mu \leq 1\}, \quad 1 \leq \mu \leq \infty.$$

В работе [11] рассмотрены множества

$$\Omega_\mu^a = \left\{ \left(c_a + \sum_{j=1}^{2p} x_i a_{i-j} \right)_{i=-\infty}^{\infty}, \ \|x_i\|_\mu \leq 1, \ c_a \in \mathbb{R} \right\}, \quad 1 \leq \mu \leq \infty,$$

с рядом условий, наложенных на последовательность $a = (a_i)$, в частности Ω_μ^1. В [11] найдены колмогоровские поперечники нечетной размерности множеств Ω_μ^a в пространстве l_∞^{2p}, $p = 2qn$, $q, n \in \mathbb{N}$, где для оценки сверху указанных поперечников доказан дискретный аналог теоремы (см., например, [10], гл. 5) Фавара – Ахиезера – Крейна.

В настоящей работе найдены колмогоровские и линейные поперечники любой размерности множеств Ω_∞^r, $r \in \mathbb{N}$. Для оценки сверху указанных поперечников доказан дискретный аналог теоремы Фавара – Ахиезера – Крейна. Эти результаты, как отмечено выше, в случае $r = 1$ исследованы в [11].

2. Вспомогательные результаты. Следующие $2p$ последовательности

$$(1), \ \left(\cos\frac{k\pi}{p} i\right), \quad k = \overline{1, p}, \qquad \left(\sin\frac{k\pi}{p} i\right), \quad k = \overline{1, p-1}, \tag{1}$$

образуют ортогональный базис в пространстве l_ρ^{2p}.

Введем в рассмотрение последовательности

$$b^1 = (b_i^1) \in l^{2p}, \qquad b_i^1 = \frac{p-i}{2} + \frac{1}{4}, \qquad i = \overline{1, 2p},$$

и

$$b^m = (b_i^m), \qquad b^m = \Delta^{-(m-1)} b^1, \qquad \sum_{i=1}^{2p} b_i^m = 0.$$

Непосредственно убеждаемся, что разложение последовательности b^m по базису (1) имеет вид

$$b_i^m = \sum_{k=1}^{p-1} \cos\left(\frac{k\pi}{p}\left(i - \frac{m}{2}\right) + \frac{m\pi}{2}\right)\left(-2\sin\frac{k\pi}{2p}\right)^{-m} + (-1)^{m+i} 2^{-m-1}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Используя формулу суммирования Абеля (см., например, [12, с. 408]), для любой последовательности $x = (x_i) \in l^{2p}$ получаем

$$x_i = \frac{1}{2p}\sum_{j=1}^{2p} x_j + \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{2p} \Delta^r x_j b_{i-j}^r, \quad r \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Далее будем говорить, что последовательность $x \in l$ имеет в точке i перемену знака, если выполняется одно из следующих условий:

а) x_i и x_{i+1} отличны от нуля и имеют разные знаки;

б) $x_i = \ldots = x_{i+k} = 0$, $k \geq 0$, а x_{i-1} и x_{i+k+1} отличны от нуля и имеют различные знаки.

Будем еще говорить, что последовательность $x \in l$ имеет нуль в точке i, если выполнено одно из следующих условий:

а*) x_i и x_{i+1} отличны от нуля и имеют разные знаки;

б*) $x_i = \ldots = x_{i+k} = 0$, $k \geq 0$, а x_{i-1} и x_{i+k+1} не равны нулю.

Легко проверить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если последовательность $x \in l$ имеет нули в точках i и j, $i < j$, то последовательность Δx имеет перемену знака в некоторой точке ξ, $i \leq \xi < j$.*

Будем говорить, что последовательность $x \in l$ имеет в точке j локальный максимум (минимум), если $x_{j\pm1} < x_j$ $(x_{j\pm1} > x_j)$, либо

$$x_{j-k} < x_{j-k+1} = \ldots x_j = \ldots = x_{j+l-1} > x_{j+l}$$

$$(x_{j-k} > x_{j-k+1} = \ldots = x_{j+l-1} < x_{j+l}).$$

Заметим, что если последовательность x имеет в точке j локальный экстремум, то последовательность Δx имеет в точке $j-1$ (в случае строгого экстремума) или в точке $j-k$ (в случае нестрогого экстремума) перемену знака.

Всюду в дальнейшем рассматриваем пространство l^{2p}, $p = nq$, $n, q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$.

Определим дискретные аналоги функций Эйлера (см., например, [10, с. 104]). Пусть

$$\varphi^{q,0} = (\varphi_i^{q,0}), \qquad \varphi_i^{q,0} = (-1)^{\nu}, \quad i \in [\nu q + 1, (\nu+1)q] \cap \mathbb{Z}, \quad \nu = \overline{0, 2n-1},$$

и

$$\varphi^{q,m} = \Delta^{-m} \varphi^{q,0}, \qquad \sum_{i=1}^{2p} \varphi_i^{q,m} = 0.$$

Разлагая последовательность $\varphi^{q,0}$ по базису (1) и беря затем первообразную порядка m, получаем

$$\varphi_i^{q,m} = \frac{4}{q} \sum_{l=0}^{[(q-1)/2]} \left(-2 \sin \frac{2l+1}{2q}\pi\right)^{-m-1} \cos\left(\frac{2l+1}{q}\pi\left(i - \frac{m+1}{2}\right) + \frac{m-1}{2}\pi\right) +$$
$$+ (-1)^{m+i}(1-(-1)^q)/2^m q. \tag{4}$$

Положим

$$\tau_{k,m} = \begin{cases} kq - \left[\dfrac{q}{2}\right] + \dfrac{m}{2}, & m = 2, 4, 6, \ldots; \\ (k-1)q + (m+1)/2, & m = 1, 3, 5, \ldots. \end{cases} \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем

$$\varphi_{\tau_{k,m}}^{q,m-1} = 0, \qquad \varphi_{\tau_{k,m}-1}^{q,m-1} = -\varphi_{\tau_{k,m}+1}^{q,m-1}, \quad k = \overline{1, 2n}, \tag{6}$$

для четных m и q, а для остальных значений m и q

$$\varphi_{\tau_{k,m}}^{q,m-1} = -\varphi_{\tau_{k,m}-1}^{q,m-1}, \quad k = \overline{1, 2n}. \tag{7}$$

Отметим теперь, что $\varphi^{q,m}$ имеет в точности $2n$ перемен знака и столько же локальных экстремумов на периоде $2p$. В самом деле, по определению последовательность $\varphi^{q,0}$ имеет $2n$ перемен знака на периоде $2p$, и поэтому в силу леммы 1 и периодичности $\varphi^{q,m-1}$ имеет не более чем $2n$ перемен знака на периоде $2p$. С другой стороны, в силу (6), (7) последовательность $\varphi^{q,m-1}$ имеет в точности $2n$ перемен знака. Поэтому последовательность $\varphi^{q,m}$ имеет в точности $2n$ локальных экстремумов в точках τ_{km}, $k=\overline{1,2n}$. А так как в силу (4) и (5)

$$\varphi^{q,m}_{\tau_{k,m}} = -\varphi^{q,m}_{\tau_{k+1,m}}, \quad k=\overline{1,2n-1},$$

то приходим к выводу, что все $2n$ локальных экстремумов $\varphi^{q,m}$ равны между собой по модулю.

В дальнейшем наряду с $\varphi^{q,m}$ будем рассматривать последовательность $\overline{\varphi}^{q,m}=\left(\overline{\varphi}_i^{q,m}\right)$, определяемую следующим образом:

$$\overline{\varphi}_i^{q,m} = \frac{1}{2}\left(\varphi^{q,m}_{i-1}+\varphi^{q,m}_i\right). \tag{8}$$

Из соотношений (6), (7) следует, что $\overline{\varphi}^{q,m-1}_{\tau_{k,m}} = -\overline{\varphi}^{q,m-1}_{\tau_{k,m}+1}$, $k=\overline{1,2n}$, если q и m четные, и $\overline{\varphi}^{q,m-1}_{\tau_{k,m}}=0$, $k=\overline{1,2n}$ — в остальных случаях.

Как и для последовательностей $\varphi^{q,m}$, приходим к выводу, что $\overline{\varphi}^{q,m}$ имеет в точности $2n$ перемен знака и в точности $2n$ локальных экстремумов в точках $\tau_{k,m}+1$, причем все эти экстремумы равны между собой по модулю и $\overline{\varphi}^{q,m}_{\tau_{k,m}+1} = -\overline{\varphi}^{q,m}_{\tau_{k+1,m+1}}$.

В заключение этого пункта докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $x=(x_i)\in l^{2p}$ — $2q$-периодическая последовательность, $p=nq$. Тогда последовательность x ортогональна последовательностям*

$$\left(\cos\frac{k\pi}{p}i\right)_{i=-\infty}^{\infty}, \quad \left(\sin\frac{k\pi}{p}i\right)_{i=-\infty}^{\infty}, \quad k=\overline{1,n-1}.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{j=1}^{2p} x_j e^{jik\pi/p} = \sum_{l=1-2q}^{2p-2q} x_{l+2q} e^{(l-2q)ik\pi/p} = e^{-2qik\pi/p}\sum_{l=1}^{2p} x_l e^{lik\pi/p},$$

т. е.

$$\left(1-e^{-2qik\pi/p}\right)\sum_{l=1}^{2p} x_l e^{lik\pi/p} = 0.$$

Лемма 2 доказана.

3. Оценки поперечников сверху. Положим

$$E(x,F)_\rho = \inf_{u\in F}\|x-u\|_\rho, \quad E(M,F)_\rho = \sup_{x\in M}E(x,F)_\rho, \quad M,F\subset l^{2p}.$$

С учетом (3) имеем

$$E(x,F_{2n-1})_\infty \le \inf_{t^n}\max_k\left| x_k - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{2p} t_i^n \Delta^r x_{k-i}\right| =$$

$$= \inf_{t^n}\max_k\left|\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{2p}(b_i^r-t_i^n)\Delta^r x_{k-i}\right| \le \frac{1}{p}E(b^r,F_{2n-1})_1\|\Delta^r x\|_\infty. \tag{9}$$

Рассмотрим $E(b^r, F_{2n-1})_1$. В дальнейшем будем различать четность r.

Пусть сначала r четное. Положим $\eta_k = kq - [q/2]$ и рассмотрим t-последовательность

$$\tilde{t}_i^n = \sum_{k=1}^{n} b^r_{\eta_k + r/2} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^{n} \left(\cos\frac{\pi}{p} i - \cos\frac{\pi}{p}\eta_\nu \right) \left(\cos\frac{\pi}{p}\eta_k - \cos\frac{\pi}{p}\eta_\nu \right)^{-1}.$$

Ясно, что $\tilde{t}^n_{\eta_j} = b^r_{\eta_j + r/2}$, $j = \overline{1, n}$. С учетом (2) имеем $b^r_{\eta_j + r/2} = b^r_{2p - \eta_j + r/2}$. А так как еще $\tilde{t}^n_{\eta_j} = \tilde{t}^n_{2p - \eta_j}$, $j = \overline{1, n}$, то $\tilde{t}^n_{\eta_j} = b^r_{\eta_j + r/2}$, $j = \overline{1, 2n}$. Разность $\delta = (\delta_i)$, $\delta_i = b^r_{i+r/2} - \tilde{t}^n_i$, $i \in \mathbb{Z}$, обращается в нуль при $i = \eta_j$, $j = \overline{1, 2n}$. Покажем, что эти нули простые и других перемен знака у последовательности δ нет. Если бы это было не так, то последовательность $\Delta^r \delta$ имела бы не менее $2n + 1$ перемены знака. Однако $\Delta^r \delta_i = \Delta b^1_{i+r/2} - \Delta^r \tilde{t}^n_i$; Δb^1 во всех точках на периоде, кроме одной, равна $-1/2$, а $\Delta^r \tilde{t}^n$ — это t-последовательность порядка n, которая имеет не более чем $2n - 2$ перемены знака. Следовательно, $\Delta^r \delta$ может иметь не более чем $2n$ перемен знака. Таким образом, последовательность $(b^r_{i+r/2} - \tilde{t}^n_i)$ меняет знак только в точках $i = \eta_k$, $k = \overline{1, 2n}$, т. е. последовательность $\operatorname{sign}\left(b^r_{i+r/2} - \tilde{t}^n_i\right)$ является $2q$-периодической. Учитывая лемму 2, получаем, что для любой t-последовательности t^n порядка n

$$\sum_{i=1}^{2n} t^n_i \operatorname{sign}\left(b^r_{i+r/2} - \tilde{t}^n_i\right) = 0.$$

Значит, для любой t-последовательности $t^n \in F_{2n-1}$ имеем

$$\| b^r - \tilde{t}^n \|_1 = \sum_{i=1}^{2p} \left(b^r_{i+r/2} - \tilde{t}^n_i\right) \operatorname{sign}\left(b^r_{i+r/2} - \tilde{t}^n_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} \left(b^r_{i+r/2} - t^n_i\right) \operatorname{sign}\left(b^r_{i+r/2} - \tilde{t}^n_i\right) \leq \| b^r - t^n \|_1,$$

т. е. $E(b^r, F_{2n-1})_1 = \| b^r - \tilde{t}^n \|_1$.

Аналогично находим, что в случае нечетного r $E(b^r, F_{2n-1})_1$ реализуется t-последовательностью

$$\tilde{t}^n_i = \sum_{k=1}^{n} b^r_{\mu_k + (r-1)/2} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^{n} \left(\sin\frac{\pi}{p}\left(i - \frac{1}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{p}\left(\mu_\nu - \frac{1}{2}\right) \right) \times$$

$$\times \left(\sin\frac{\pi}{p}\left(\mu_k - \frac{1}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{p}\left(\mu_\nu - \frac{1}{2}\right) \right)^{-1}, \quad \mu_k = kq.$$

С учетом (8) и (3) получаем, что при четном r

$$E(b^r, F_{2n-1})_1 = \sum_{i=1}^{2p} b^r_{i+r/2} \operatorname{sign}\left(b^r_{i+r/2} - \tilde{t}^n_i\right) =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{2p} b^r_{i+r/2} \overline{\varphi}^{q,0}_{i+\eta_1+1} \right| = \left| \sum_{i=1}^{2p} b^r_{2p+\eta_1+1+r/2-(i+\eta_1+1)} \overline{\varphi}^{q,0}_{i+\eta_1+1} \right| =$$

$$= p \left| \overline{\varphi}^{q,1}_{2p+\eta_1+1+r/2} \right| = p \left| \overline{\varphi}^{q,r}_{\tau_{1,r}-1} \right| = p \| \overline{\varphi}^{q,r} \|_\infty.$$

Аналогично при нечетном r

$$E(b^r, F_{2n-1})_1 = p \| \overline{\varphi}^{q,r} \|_\infty.$$

Следовательно, из (9) имеем

$$E(\Omega^r_\infty, F_{2n-1})_\infty \le \| \overline{\varphi}^{q,r} \|_\infty. \tag{10}$$

4. Оценки поперечников снизу. Отметим, что в этом пункте использованы идеи, изложенные в [10] (§ 10.4).

Положим

$$\Delta_\nu = [(\nu-1)q + [q/2] + 2, \nu q + [q/2] + 1] \cap \mathbb{Z}, \quad \nu = \overline{1, 2n},$$

и

$$\psi^\nu = (\psi^\nu_i), \qquad \psi^\nu_i = \begin{cases} |\varphi^{q,1}_i|, & i \in \Delta_\nu, \\ 0, & i \overline{\in} \Delta_\nu, \end{cases} \qquad i = \overline{1, 2p}.$$

Для остальных $i \in \mathbb{Z}$ ψ^ν определяем по периодичности. Совокупность последовательностей $s = (s_i)$, у которых

$$s_i = \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu \psi^\nu,$$

образует в l^{2p} подпространство размерности $2n$. Обозначим его через M^1_{2n}. Заметим, что если $c_\nu = (-1)^{\nu-1}$, то

$$\sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu \psi^\nu_i = \varphi^{q,1}_i.$$

Обозначим через $M^1_{2n,0}$ подпространство тех $s \in M^1_{2n}$, у которых

$$\sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu = 0.$$

Ясно, что для $g \in M^1_{2n,0}$

$$\sum_{i=1}^{2p} g_i = \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu \sum_{i \in \Delta_\nu} \psi^\nu_i = \sum_{i \in \Delta_\nu} |\varphi^{q,1}_1| \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu = 0.$$

Пусть далее M^m_{2n} — множество $(m-1)$-х первообразных от последовательностей из $M^1_{2n,0}$. Таким образом, если $s \in M^m_{2n}$, то

$$\Delta^{m-1} s_i = \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu \psi^\nu_i, \qquad \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu = 0. \tag{11}$$

В дальнейшем будем использовать следующее обозначение:

$$x(\lambda) = (x_i(\lambda)), \quad x_i(\lambda) = \lambda x_{i-1} + (1-\lambda)x_i,$$

где $x = (x_i) \in l^{2p}$.

Лемма 3. *Если* $s \in M_{2n}^m$ *и для некоторого фиксированного* λ, $0 \le \lambda \le 1$, *выполняются неравенства* $\left|s_{\tau_{k,m}}(\lambda)\right| \le \left|\varphi_{\tau_{k,m}}^{q,m}(\lambda)\right|$, $k = \overline{1, 2n}$, *где* $\tau_{k,m}$ *определены равенствами* (5), *то коэффициенты* c_ν *в* (11) *удовлетворяют неравенствам* $|c_\nu| \le 1$, $\nu = \overline{1, 2n}$.

Доказательство. В случае $m = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что при $m > 1$ $|c_j| = \max_\nu |c_\nu| = c > 1$ и $c_j = (-1)^{j-1} c$. Положим $s^* = (1/c)s$. s^* в разложении (11) имеет коэффициенты $c_\nu^* = (1/c)c_\nu$, т. е. $|c_\nu^*| \le 1$ и $c_j^* = (-1)^{j-1}$. Значит, $\Delta^{m-1} s_i^* = \varphi_i^{q,1}$, $i \in \Delta_j$.

Рассмотрим последовательность $\delta = (\delta_i)$, $\delta_i = \varphi_i^{q,m}(\lambda) - s_i^*(\lambda)$. Так как $|s_{\tau_{k,m}}^*(\lambda)| < |\varphi_{\tau_{k,m}}^{q,m}(\lambda)|$ и $\varphi_{\tau_{1,m}}^{q,m}(\lambda) = -\varphi_{\tau_{2,m}}^{q,m}(\lambda) = \ldots = -\varphi_{\tau_{2n,m}}^{q,m}(\lambda)$, то последовательность δ, принимая в точках $\tau_{k,m}$ значения того же знака, что и $\varphi^{q,m}(\lambda)$, не менее $2n$ раз меняет знак на периоде. Но

$$\Delta^{m-1}\delta_i = \varphi_i^{q,1}(\lambda) - \Delta^{m-1} s_i^*(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{2n} \left((-1)^{\nu-1} - c_\nu^*\right)\psi_i^\nu(\lambda).$$

Поэтому $\Delta^{m-1}\delta_i = 0$, $i \in \Delta_j$, $i \ne (j-1)q + [q/2] + 2$ и $\Delta^{m-1}\delta$ сохраняет знак на остальных Δ_ν, $\nu \ne j$, за исключением, быть может, левых концов этих промежутков. Следовательно, $\Delta^{m-1}\delta$ может иметь не более чем $2n - 1$ перемену знака на периоде. Лемма 3 доказана.

Наряду с подпространствами M_{2n}^m будем рассматривать их сдвиги $M_{2n}^m(l)$ — множества последовательностей $s = (s_i)$, $s_i = \sigma_{i-l}$, где $\sigma = (\sigma_i) \in M_{2n}^m$, $l \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $M_{2n}^m(l)$ так же, как и M_{2n}^m, является подпространством размерности $2n$.

Обозначим через $\tau_{k,m,l} = \tau_{k,m} + l$, $k = \overline{1, 2n}$, точки экстремума последовательности $\left(\varphi_{i-l}^{q,m}\right)$ на периоде $[l+1, l+2p]$.

Следствие. Если $s \in M_{2n}^m(l)$ *и для некоторого* λ, $0 \le \lambda \le 1$,

$$\left|s_{\tau_{k,m,l}}(\lambda)\right| \le \left|\varphi_{\tau_{k,m}}^{q,m}(\lambda)\right|, \quad k = \overline{1, 2n},$$

то коэффициенты c_ν *в формуле* (11) *удовлетворяют неравенствам* $|c_\nu| \le 1$, $\nu = \overline{1, 2n}$.

Сопоставим подпространству $M_{2n}^m(l)$ множество $Q_{2n}^m(l; \lambda)$ векторов

$$\eta_{l,\lambda}(s) = \left(s_{\tau_{k,m,l}}(\lambda)\right)_{k=1}^{2n}, \quad s \in M_{2n}^m(l), \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

Ясно, что при фиксированных l и λ $Q_{2n}^m(l; \lambda)$ есть линейное многообразие.

Лемма 4. *При любых* $l \in \mathbb{Z}$ *и* $0 \le \lambda \le 1$ *линейное многообразие* $Q_{2n}^m(l; \lambda)$ *имеет размерность* $2n$.

Доказательство. Пусть $s^1, \ldots, s^{2n}$ — базис в подпространстве $M_{2n}^m(l)$. Тогда $Q_{2n}^m(l; \lambda)$ есть линейная оболочка векторов $\eta_{l,\lambda}(s^\nu)$, $\nu = \overline{1, 2n}$. Предположим, что эти векторы линейно зависимы, т. е. для некоторых

$$a_\nu \in \mathbb{R}, \quad \nu = \overline{1, 2n}, \qquad \sum_{\nu=1}^{2n} |a_\nu| > 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{2n} a_\nu \eta_{l,\lambda}(s^\nu) = 0$$

или

$$\sum_{\nu=1}^{2n} a_\nu s^\nu_{\tau_{k,m,l}} = 0, \quad k = \overline{1, 2n}.$$

Рассмотрим последовательность $g = (g_i)$, где

$$g_i = \sum_{\nu=1}^{2n} a_\nu s_i^\nu .$$

Ясно, что $g \in M_{2n}^m(l)$ и

$$g_{\tau_{k,m,l}}(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{2n} a_\nu s^\nu_{\tau_{k,m,l}}(\lambda) = 0, \quad k = \overline{1, 2n}.$$

Любая последовательность Kg, $K \in \mathbb{R}$, очевидно, также принадлежит $M_{2n}^m(l)$ и $Kg_{\tau_{k,m,l}}(\lambda) = 0$, $k = \overline{1, 2n}$. Если c_ν — коэффициенты, определяющие $(m-1)$-ю разность последовательности Kg, то из последнего равенства и следствия вытекает $|c_\nu| \le 1$, $\nu = \overline{1, 2n}$, и, следовательно,

$$\| K\Delta^{m-1} g \|_\infty = \max_{1 \le \nu \le 2n} \{ |c_\nu| \, \| \psi^\nu \|_\infty \} \le \| \varphi^{q,1} \|_\infty .$$

В силу произвольности $K \in \mathbb{R}$ заключаем, что g есть тождественный нуль. Лемма 4 доказана.

Из этой леммы следует, что любой вектор $\eta \in \mathbb{R}^{2n}$ содержится в $Q_{2n}^m(l; \lambda)$, т. е. существует последовательность $s \in M_{2n}^m(l)$, для которой $\eta_{l,\lambda}(s) = \eta$. Рассуждая так же, как и во второй части доказательства леммы 4, заключаем, что такая последовательность s единственная.

Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ положим $\kappa_k^\alpha = (k-1)q + \alpha$, $k = \overline{1, 2n}$, и сопоставим $2p$-периодической функции f вектор

$$\xi_\alpha(f) = \left(f(\kappa_k^\alpha) \right)_{k=1}^{2n} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Пусть Φ_{2n} — произвольное подпространство в l^{2p} размерности $2n$. Сопоставим ему подпространство ломаных

$$\hat{\Phi}_{2n} = \{ \hat{x} = \hat{x}(t) = \{t\} x_{[t]+1} + (1 - \{t\}) x_{[t]} : x \in \Phi_{2n} \},$$

где $\{\beta\}$ и $[\beta]$ — соответственно дробная и целая части числа $\beta \in \mathbb{R}$. Ясно, что размерность $\hat{\Phi}_{2n}$ равна $2n$. При фиксированном α множество векторов $N(\alpha) = N(\alpha, \Phi_{2n}) = \{ \xi_\alpha(\hat{x}) : \hat{x} \in \hat{\Phi}_{2n} \}$ есть линейное многообразие в $\mathbb{R}^{2n}$ размерности не выше чем $2n$. Рассуждая, как и при доказательстве леммы 10.4.3 из [10], получаем, что при некотором α_0, $0 \le \alpha_0 \le q$, $\dim N(\alpha_0) \le 2n - 1$.

Выберем далее $\beta \in \mathbb{R}$ так, чтобы $\tau_{k,m,\beta} = \tau_{k,m} + \beta = \kappa_k^{\alpha_0}$, $k = \overline{1, 2n}$. Положим $\lambda_0 = 1 - \{\alpha_0\}$ и рассмотрим $Q_{2n}^m([\beta]; \lambda_0)$:

$$\dim Q_{2n}^m([\beta];\lambda_0) = 2n.$$

Значит, $N(\alpha_0)$ — подпространство $Q_{2n}^m([\beta];\lambda_0)$. Для заданного числа $\|\varphi^{q,m}(\lambda_0)\|_\infty$ в пространстве $Q_{2n}^m([\beta];\lambda_0)$ найдется вектор $\eta_{[\beta],\lambda_0}(x^*)$, $x^* \in M_{2n}^m([\beta])$ такой, что

$$\left\|\eta_{[\beta],\lambda_0}(x^*)\right\|_{\mathbb{R}_\infty^{2n}} = \|\varphi^{q,m}(\lambda_0)\|_\infty \tag{12}$$

и

$$\inf_{\xi_{\alpha_0}(\hat{x}) \in N(\alpha_0,\Phi_{2n})} \left\|\eta_{[\beta],\lambda_0}(x^*) - \xi_{\alpha_0}(\hat{x})\right\|_{\mathbb{R}_\infty^{2n}} = \|\varphi^{q,m}(\lambda_0)\|_\infty.$$

Вместе с тем

$$\left\|\eta_{[\beta],\lambda_0}(x^*) - \xi_{\alpha_0}(\hat{x})\right\|_{\mathbb{R}_\infty^{2n}} = \max_{1\le k\le 2n}\left|x^*_{\tau_{k,m,[\beta]}}(\lambda_0) - \hat{x}(\kappa_k^{\alpha_0})\right| =$$

$$= \max_{1\le k\le 2n}\left|\lambda_0 x^*_{\tau_{k,m,([\beta])}-1} + (1-\lambda_0)x^*_{\tau_{k,m,([\beta])}} - \left(\lambda_0 x_{\tau_{k,m,([\beta])}} + (1-\lambda_0)x_{\tau_{k,m,([\beta])}}\right)\right| \le$$

$$\le \max_{1\le i\le 2p}\left|x_i^* - x_i\right| = \|x^* - x\|_\infty.$$

Значит,

$$\|\varphi^{q,m}(\lambda_0)\|_\infty = \inf\left\{\left\|\eta_{[\beta],\lambda_0}(x^*) - \xi_{\alpha_0}(\hat{x})\right\| : \xi_{\alpha_0}(\hat{x}) \in N(\alpha_0,\Phi_{2n})\right\} \le$$

$$\le \inf_{x\in\Phi_{2n}}\|x^* - x\|_\infty = E(x^*,\Phi_{2n})_\infty.$$

В силу (12) для последовательности x^* выполнены условия следствия, поэтому для коэффициентов $\Delta^{m-1}x^*$ в разложении (11) выполняются неравенства $|c_\nu| \le 1$, $\nu = \overline{1,2n}$, а это означает, что $x^* \in \Omega_\infty^r$. Таким образом,

$$E(\Omega_\infty^r,\Phi_{2n})_\infty \ge \min_{0\le\lambda\le 1}\|\varphi^{q,r}(\lambda)\|_\infty = \|\varphi^{q,r}(1/2)\|_\infty = \|\overline{\varphi}^{q,r}\|_\infty.$$

Поэтому для четных поперечников по Колмогорову имеем

$$d_{2n}(\Omega_\infty^r) = \inf_{\Phi_{2n}} E(\Omega_\infty^r,\Phi_{2n})_\infty \ge \|\overline{\varphi}^{q,r}\|_\infty,$$

откуда с учетом неравенства (10) получаем

$$d_{2n-1}(\Omega_\infty^r) = d_{2n}(\Omega_\infty^r) = \|\overline{\varphi}^{q,r}\|_\infty.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Справедливы равенства*

$$d_{2n-1}(\Omega_\infty^r) = d'_{2n-1}(\Omega_\infty^r) = d_{2n}(\Omega_\infty^r) =$$

$$= d'_{2n}(\Omega_\infty^r) = \|\overline{\varphi}^{q,r}\|_\infty,$$

где $d'_N(\Omega_\infty^r)$ — *линейный поперечник* Ω_∞^r *в пространстве* l_∞^{2p}.

Доказательство. В п.3 было показано, что линейный метод $L_{2n-1}: l^{2p} \to F_{2n-1}$, определяемый формулой

$$(L_{2n-1}x)_k = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{2p}\Delta^r x_{k-i}\tilde{t}_i^n,$$

где $\tilde{t}^n$ — t-последовательность, интерполирующая последовательность b^r в $2n$ равноотстоящих точках, таков, что

$$\sup_{x \in \Omega_\infty^r} \| x - L_{2n-1} x \|_\infty \le \| \overline{\varphi}^{q,r} \|_\infty.$$

Поэтому

$$\| \overline{\varphi}^{q,r} \|_\infty = d_{2n}(\Omega_\infty^r) \le d'_{2n}(\Omega_\infty^r) \le d'_{2n-1}(\Omega_\infty^r) \le \| \overline{\varphi}^{q,r} \|_\infty.$$

Теорема доказана.

Из неравенства (10) и теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Справедливо равенство* $E(\Omega_\infty^r, F_{2n-1})_\infty = \| \overline{\varphi}^{q,r} \|_\infty$.

В заключение приведем формулы для чисел $\| \overline{\varphi}^{q,r} \|_\infty$. Подставляя $i = \tau_{k,r} + 1$ в формулу (8), с учетом (4) и (5) получаем

$$\| \overline{\varphi}^{q,r} \|_\infty = \begin{cases} \dfrac{4}{q} \displaystyle\sum_{l=0}^{(q-1)/2} \cos^2 \frac{2l+1}{2q}\pi \left(2 \sin \frac{2l+1}{2q}\pi \right)^{-r-1}, & r \text{ — нечетное;} \\ \dfrac{4}{q} \displaystyle\sum_{l=0}^{q/2-1} (-1)^l \cos \frac{2l+1}{2q}\pi \left(2 \sin \frac{2l+1}{2q}\pi \right)^{-r-1}, & r, q \text{ — четные,} \end{cases}$$

$$\| \overline{\varphi}^{q,r} \|_\infty = \frac{4}{q} \sum_{l=0}^{(q-1)/2} (-1)^l \cos^2 \frac{2l+1}{2q}\pi \left(2 \sin \frac{2l+1}{2q}\pi \right)^{-r-1}$$

r — четное, q — нечетное.

1. *Valée Poussen J.* Ch. Lecons sur l'approximation des functions d'une variable réelle. – Paris, 1919. – 464 p.
2. *Калашников М. Д.* О полиномах наилучшего квадратичного приближения в заданной системе точек // Докл. АН СССР. – 1955. – **105**. – С. 634–636.
3. *Рубинштейн Г. Ш.* Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и ее приложение к исследованию конечной системы линейных неравенств // Там же. – **100**. – С. 627–630.
4. *Этерман И. И.* Аппроксимация полиномами и решение некоторых задач прикладной математики. – Пенза: Изд-во Пензен. политехн. ин-та, 1960. – 14 с.
5. *Ремез Е. Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев: Наук. думка, 1969. – 623 с.
6. *Малоземов В. Н.* К нахождению алгебраического полинома наилучшего приближения // Кибернетика. – 1969. – **5**. – С. 125–131.
7. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
8. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964. – 838 с.
9. *Pinkus A.* n-Widths of Sobolev spaces in L^p // Constr. Approxim. – 1985. – **1**. – P. 15–62.
10. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи в теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
11. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Аппроксимация функций дискретного аргумента // Оптимизация методов приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 14–26.
12. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1973. – 432 с.

Получено 13.07.95