УДК 519.21

М. Л. Свердан (Чернів. ун-т),
Є. Ф. Царков (Риз. техн. ун-т),
В. К. Ясинський (Чернів. ун-т)

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ТА МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ. I. РІВНОМІРНА ОБМЕЖЕНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ

We consider pulse systems with Markov switches. We study the problems of uniform boundedness of solutions of these systems and the stability of the systems with respect to the limit equation.

Розглядаються імпульсні системи з марковськими перемиканнями, а саме: їх рівномірна обмеженість, аналіз стійкості систем за граничним рівнянням.

Одним з найбільш розповсюджених методів дослідження динамічних систем є метод усереднення за часом [1]. Цей метод також успішно застосовується і в теорії випадкових збурень [2 – 13]. При цьому вдається не тільки побудувати усереднену систему, яка наближено описує динаміку вихідної моделі, але й виписати стохастичне диференціальне рівняння [4] для нормованих відхилень розв'язків вихідного рівняння від відповідних розв'язків усередненого руху.

У випадку імпульсних систем принцип усереднення обгрунтовано у монографії [1], а при наявності випадкових збурень — у роботі [3].

Слід особливо відзначити роботи [11 – 13] про принцип усереднення для процесів, що перемикаються.

У пропонованій роботі досліджуються динамічні системи з швидкими марковськими перемиканнями з додатковими стрибками в моменти перемикань.

1. Імпульсні системи з марковськими перемиканнями. Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega, F, \mathbb{P})$. Однорідний марковський процес $\{ y(t),\ t \ge 0 \}$ із значеннями у метричному фазовому просторі $\mathbb{Y}$ має кусково-постійні реалізації, а інтервали між моментами часу перемикання $\{ \tau_j,\ j \in \mathbb{N} \}$ цього процесу мають умовний експоненціальний розподіл

$$\mathbb{P}\{ (\tau_j - \tau_{j-1}) > t / y(\tau_{j-1}) = y \} = e^{-a(y)t}$$

для всіх $j \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Y}$ та $t \in R_+$. Тут і в подальшому $\tau_0 = 0$. Функція $a(y)$ — додатна і неперервна. У моменти часу перемикання фазова координата процесу $\{ y(t) \}$ утворює однорідний феллерівський ланцюг Маркова з перехідною ймовірністю $p(y, A)$, тобто

$$\mathbb{P}\{ y(\tau_j) \in A / y(\tau_{j-1}) = y \} = p(y, A)$$

для довільних $j \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Y}$ і $A \in \Sigma_{\mathbb{Y}}$, де $\Sigma_{\mathbb{Y}}$ — σ-алгебра борелівських підмножин фазового простору $\mathbb{Y}$. Оскільки ми припустимо, що в момент часу τ_j обов'язково відбувається перемикання фазової координати, то домовимося вважати $p(y, \{ y \}) = 0$. Для задання марковського процесу $\{ y(t) \}$ можна скористатись його локальними характеристиками [14], які визначають так званий C-інфінітезимальний оператор Q цього процесу

$$(QV)(y) := \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[\mathbb{E}_y V((y(\Delta)) - V(y)) \right],$$

де V належить простору всіх обмежених неперервних функцій $C(\mathbb{Y})$. У нашому випадку легко знайти явний вираз C-інфінітезимального оператора

$$(QV)(y) = a(y)\int_{\mathbb{Y}} [V(z)-V(y)]p(y, dz). \tag{1}$$

Для спрощення наступних викладок припустимо, що $\mathbb{Y}$ є компактом [15]. Тоді Q належить простору лінійних функціоналів $L(C(\mathbb{Y}))$, а з додатності $a(y)$ випливає експоненціальна ергодичність процесу $\{y(t)\}$ [4]. Це означає, що існує єдина інваріантна міра $\mu \in C^*(\mathbb{Y})$ в ядрі спряженого оператора Q^*, причому при будь-якому $y \in \mathbb{Y}$ і $A \in \Sigma_{\mathbb{Y}}$ перехідна ймовірність $p(t, y, A)$ процесу $\{y(t)\}$ експоненціально прямує до $\mu(A)$, тобто існує така константа $\rho > 0$, що

$$|P(t, y, A) - \mu(A)| \le e^{-\rho t}$$

при всіх $t \ge 0$ [6].

Описаний вище процес $\{y(t)\}$ можна також задати за допомогою стохастичного диференціального рівняння з інтегралом за пуассонівською мірою. У монографії [14] доведено, що існують вимірний простір (θ, Σ_θ), міра $\pi(d\theta)$, вимірне відображення $r\colon \mathbb{Y}\times\theta \to \mathbb{Y}$ такі, що $\{y(t)\}$ задовольняє рівняння

$$dy(t) = \int_{\theta} r(y(t), \theta)\nu(d\theta, dt), \tag{2}$$

де пуассонівська міра $\nu(d\theta, dt)$ має параметр $\mathbb{E}\,\nu(d\theta, dt) = \pi(d\theta)dt$. Міра $\pi(d\theta)$ і функція $r(y, \theta)$ задовольняють співвідношення

$$\pi(\{r(y(t), \theta)\}) = a(y),$$

$$\pi(\{r(y(t), \theta) \in A\}) = a(y)p(y, A)$$

для всіх $y \in \mathbb{Y}$ і $A \in \Sigma_{\mathbb{Y}}$, $\theta \in A$.

Визначимо потенціал Π марковського процесу $\{y(t)\}$ за допомогою рівності [15]

$$(\Pi V)(y) := \int_0^\infty \int_{\mathbb{Y}} (P(t, y, dz) - \mu(dz))V(z)\,dt. \tag{3}$$

Згідно з припущенням про експоненціальну ергодичність процесу $\{y(t)\}$ оператор Π визначений на всьому $C(\mathbb{Y})$ і діє в $C(\mathbb{Y})$, тобто $\Pi \in L(C(\mathbb{Y}))/0$, причому при всіх $V \in C(\mathbb{Y})$ справедлива рівність [6]

$$Q\Pi V(y) = \Pi Q V(y) = -V(y) + \overline{V}, \tag{4}$$

де за означенням

$$\overline{V} := \int_{\mathbb{Y}} V(y)\mu(dy).$$

Нехай неперервний справа випадковий процес $x(t) \in \mathbb{R}^m$ при всіх $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j \in \mathbb{N}$, задовольняє рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, y(t), \varepsilon), \tag{5}$$

при всіх $t \in \{\tau_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ — умову стрибка

$$x(t) = x(t-) + \varepsilon g(x(t-), y(t-), \varepsilon) \tag{6}$$

і при $t=0$ — початкову умову $x(0)=x$. Припустимо, що функції f і g можуть бути зображені у вигляді

$$f(x, y, \varepsilon) = f_1(x, y) + \varepsilon f_2(x, y) + \varepsilon f_3(x, y, \varepsilon), \tag{7}$$

$$g(x, y, \varepsilon) = g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y) + \varepsilon g_3(x, y, \varepsilon), \tag{8}$$

де $f_1(x, y)$ і $g_1(x, y)$ неперервні і мають дві обмежені неперервні похідні по x, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y, \varepsilon)$, $g_2(x, y)$ і $g_3(x, y, \varepsilon)$ неперервні і мають неперервну обмежену похідну по x, причому для всіх $x \in \mathbb{Y}$ і $\varepsilon \in (0, 1)$ можна записати

$$\| Df_3(x, y, \varepsilon) \| + \| Dg_3(x, y, \varepsilon) \| \le \beta(\varepsilon), \tag{9}$$

де $\beta(\varepsilon)$ — нескінченно мала при $\varepsilon \to 0$. Тут і далі D^k означає k-ту похідну Фреше по $x \in \mathbb{R}^m$. Зрозуміло, що накладені вище обмеження гарантують виконання глобальної умови Ліпшіца для правої частини рівняння (5), і тому процес $x(t)$ однозначно визначається початковим значенням $x(0)=x$.

Лема 1. *Якщо виконані вказані вище припущення, то пара* $\{x(t), y(t)\}$ *є феллерівським марковським процесом на фазовому просторі* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Y}$ *з слабким інфінітезимальним оператором*

$$(\mathcal{L}V)(x, y) = \varepsilon\big(f(x, y, \varepsilon), \nabla\big) V(x, y) + QV(x, y) + \varepsilon G^{\varepsilon} V(x, y), \tag{10}$$

де $\nabla - x$ *— градієнт, оператор* Q *діє по змінній* y, *а оператор* G^{ε} *визначається рівністю* [6]

$$G^{\varepsilon}V(x, y) = \varepsilon^{-1} a(y) \int_{\mathbb{Y}} [\, V(x + \varepsilon g(x, y, \varepsilon), z) - V(x, z)\,]\, p(y, dz).$$

Лема 2. *Якщо виконані вказані вище умови, то розв'язки імпульсної системи* (5), (6) *задовольняють нерівність*

$$\mathbb{E}_{x,y} |x(t)|^2 \le \big(1 + |x(t)|^2\big) \exp\{\varepsilon \alpha t\} \tag{11}$$

при всіх $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{Y}$, $t \ge 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$ *і деякому* $\alpha \in \mathbb{R}$ [6].

Нехай $\tilde{x}(t)$ — розв'язок імпульсної системи (5), (6) при

$$f(x, y) \equiv g_2(x, y) \equiv g_3(x, y, \varepsilon) \equiv f_3(x, y, \varepsilon) \equiv 0,$$

а

$$x^{\varepsilon}(t) := \tilde{x}(t/\varepsilon).$$

Лема 3. *Якщо виконані вказані вище обмеження, то для всіх* $T > 0$, $\delta > 0$, $y \in \mathbb{Y}$ *і* $x \in \mathbb{R}^m$ *можна записати*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}_{x,y} \sup_{0 \le t \le \tau} \left| x(t/\varepsilon) - x^{\varepsilon}(t) \right|^2 = 0 \ [6]. \tag{12}$$

Надалі будемо користуватись такими позначеннями: $\{y^{\varepsilon}(t)\}$ — розв'язок стохастичного рівняння

$$dy^{\varepsilon}(t) = \int_{\theta} r\big(y^{\varepsilon}(t), \theta\big) \nu_{\varepsilon}(d\theta, dt), \tag{13}$$

де $\nu_{\varepsilon}(d\theta, dt)$ — пуассонівська міра з параметром $\varepsilon^{-1}\pi(d\theta)dt$; $\{y_{\varepsilon}(t)\}$ — розв'язок стохастичного рівняння

$$d y_\varepsilon(t) = \int_\theta r(y_\varepsilon(t), \theta) \nu_{\varepsilon^2}(d\theta, dt), \tag{14}$$

$$F_j(x, y) = f_j(x, y) + a(y) g_j(x, y), \tag{15}$$

$$b_j(x) = \int_{\mathbb{Y}} F_j(x, y) \mu(dy), \quad j = 1, 2; \tag{16}$$

$\mathbb{V}_p$ — простір неперервних відображень $\mathbb{R}^m \times \mathbb{Y}$ в $\mathbb{R}$, що задовольняють умову

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m,\, y \in \mathbb{Y}} |V(x, y)| (1 + |x|)^{-p} =: \|V\|_p < \infty, \tag{17}$$

$(D \nabla V)(x)$ — матриця Гессе відображення $V \in C^2(\mathbb{R}^m)$.

Якщо $f\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^d$ має елементи з $\mathbb{V}_p$, то будемо писати $|f| \in \mathbb{V}_p$ і користуватись позначеннями (17).

Розв'язки системи імпульсних рівнянь при $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{dx^\varepsilon}{dt} = f_1(x^\varepsilon, y^\varepsilon(t)), \tag{18}$$

при $t \in \{\tau_j, j \in \mathbb{N}\}$

$$x^\varepsilon(t) = x^\varepsilon(t-) + \varepsilon g_1(x^\varepsilon(t-), y(t-)) \tag{19}$$

з початковою умовою

$$x^\varepsilon(0) = x \tag{20}$$

завдяки (12) ε-близькі до розв'язків вихідної системи (5), (6) [6].

Слабкий інфінітезимальний оператор марковського процесу $\{x^\varepsilon(t), y(t)\}$ має форму

$$(\mathcal{L}(\varepsilon) V)(x, y) \doteq (f_1(x, y), \nabla) V(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} Q V(x, y) + G(\varepsilon) V(x, y),$$

де $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток;

$$G(\varepsilon) V(x, y) = \frac{1}{\varepsilon} a(y) \int_{\mathbb{Y}} [V(x + \varepsilon g_1(x, y), z) - V(x, z)] p(y, dz).$$

Разом з (17), (18) розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{du}{dt} = b_1(u), \tag{21}$$

яке будемо називати усередненим для імпульсної системи (5), (6), де $b_1(u)$ визначається (16). Легко бачити [6], що завдяки зробленим припущенням розв'язок (21) існує і єдиний при будь-якій початковій умові

$$u(0) = u. \tag{22}$$

За означенням рівняння

$$(Q V)(x, y) = -F_1(x, y) + b_1(x) \tag{23}$$

має розв'язок

$$V(x, y) = \Pi F_1(x, y),$$

де потенціал Π визначений формулою (3). З цього означення випливає нерівність

$$\sup_{y \in \mathbb{Y}} |\Pi F_1(x, y)| \leq h \sup_{y \in \mathbb{Y}} |F_1(x, y)| \tag{24}$$

при всіх $x \in \mathbb{R}^m$. Легко перевірити, що рівномірно обмежена x-похідна $DF_1(x, y)$ задовольняє співвідношення

$$\int_{\mathbb{Y}} DF_1(x, y)\mu(dy) = Db_1(x),$$

$$\sup_{y \in \mathbb{Y}} \| D\Pi F_1(x, y)\| \leq h \sup_{y \in \mathbb{Y}, x \in \mathbb{R}^m} \| DF_1(x, y)\| := h_1. \tag{25}$$

Лема 4. *Існує така константа* $c_1 > 0$, *що для всіх* $y \in \mathbb{Y}$, $x \in \mathbb{R}^m$ *і* $\varepsilon \in (0, 1)$ *виконуються такі нерівності* [6]:

$$|(x - u, \Pi F_1(x, y))| \leq c_1 \left(1 + |x|^2 + |u|^2\right),$$

$$(|f_1(x, y)| + a(y)|g_1(x, y)|)\Pi F_1(x, y) \leq c_1 \left(1 + |x|^2\right),$$

$$|(b_1(u), \Pi F_1(x, y))| \leq c_1 \left(1 + |x|^2 + |u|^2\right),$$

$$|(x - u), [\Pi DF_1(x, y)] f_1(x, y)| \leq c_1 \left(1 + |x|^2 + |u|^2\right),$$

$$\frac{a(y)}{\varepsilon}|(x + \varepsilon g_1(x, y) - u, (\Pi F_1)(x + \varepsilon g_1(x, y), y) - \Pi F_1(x, y))| \leq c_1 \left(1 + |x|^2 + |u|^2\right).$$

За допомогою лем 1 – 4 можна довести [6] принцип усереднення.

Теорема 1. *Якщо виконані згадані вище умови, то для будь-яких* $r > 0$ *і* $T > 0$ *розв'язок* (5), (6) *у формі* $x(t/\varepsilon)$ *збігається за ймовірністю при* $\varepsilon \to 0$ *до розв'язку* $u(t, x)$ *усередненого рівняння* (20) *з початковою умовою* $u(0) = x$ *рівномірно по* $x \in S_r$ *і* $t \in [0, T]$, *тобто при будь-якому* $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{x \in S_r \\ y \in \mathbb{Y}}} P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t/\varepsilon) - u(t, x)| > \delta \right) = 0, \tag{26}$$

де $S_r := \left\{ x \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, |x| < r \right\}$.

2. Оцінка допоміжних функціоналів. Зауважимо, що при $b_1(u) \equiv 0$ усереднене рівняння (21), (22) не несе ніякої інформації про поведінку розв'язків системи (5), (6) на інтервалах часу порядку ε^{-1}. У цьому випадку слід перейти [5] до „дуже повільного" часу $\varepsilon^{-2}t$, а завдяки лемі 3 доданки f_3 та g_3 не впливають на асимптотичну поведінку розв'язків (5), (6). Тому далі в цьому пункті будемо мати справу з імпульсною системою у вигляді

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} f_1(x, y_\varepsilon(t)) + f_2(x, y_\varepsilon(t)) \tag{27}$$

при $t \in (\varepsilon^2 \tau_{j-1}, \varepsilon^2 \tau_j)$, $j \in \mathbb{N}$;

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t-) + \varepsilon g_1(x_\varepsilon(t-), y_\varepsilon(t-)) + \varepsilon^2 g_2(x_\varepsilon(t-), y_\varepsilon(t-)) \tag{28}$$

при $t \in \{\varepsilon^2 \tau_j, j \in \mathbb{N}\}$ з початковою умовою

$$x_\varepsilon(0) = x. \tag{29}$$

Слабкий інфінітезимальний оператор $\tilde{L}(\varepsilon)$ марковського процесу $\{x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\}$ має вигляд [6]

$$\tilde{L}(\varepsilon)V(x, y) = \frac{1}{\varepsilon^2}QV(x, y) + \frac{1}{\varepsilon}(f_1(x, y), \nabla)V(x, y) +$$
$$+ (f_2(x, y), \nabla)V(x, y) + \overline{G}(\varepsilon)V(x, y), \tag{30}$$

де

$$\overline{G}(\varepsilon)V(x, y) = \frac{1}{\varepsilon^2}a(y)\int\limits_{\mathbb{Y}}\left[V\left(x + \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y), z\right) - V(x, z)\right]p(y, dz). \tag{31}$$

Лема 5. *Нехай* $u(x, y)$ *має неперервну* x*-похідну,* $u \in \mathbb{V}_p$, $|\nabla u| \in \mathbb{V}_{p-1}$ *при деякому* $p \geq 1$. *Тоді для довільного* $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\varepsilon\tilde{L}(\varepsilon)u(x, y) = \frac{1}{\varepsilon}Qu(x, y) + (f_1(x, y), \nabla)u(x, y) +$$
$$+ a(y)\int\limits_{\mathbb{Y}}(g_1(x, y), \nabla)u(x, z)\,p(y, dz) + r_{1\varepsilon}(x, y), \tag{32}$$

причому всі доданки правої частини належать $\mathbb{V}_p$ *та, крім того,*

$$\sup_{0 \leq \varepsilon < 1}\|r_{1\varepsilon}\|_p < \infty, \qquad \lim_{\varepsilon \to \infty} r_{1\varepsilon}(x, y) = 0$$

для довільних $x \in \mathbb{R}^m$; $y \in \mathbb{Y}$.

Доведення. За припущенням $\|Dg_j\|, \|Df_j\| \in \mathbb{V}_0$ при $j = 1, 2$. Тоді $|f_j| \in \mathbb{V}_1$, $|g_j| \in \mathbb{V}_1$ при $j = 1, 2$ і для будь-яких $\varepsilon \in (0, 1)$, $s \in [0, 1]$ можна записати

$$|\nabla u(x + s(\varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)), z)| \leq$$
$$\leq \|\nabla u\|_{p-1}(1 + |x| + |g_1(x, y)| + |g_2(x, y)|)^{p-1} \leq$$
$$\leq \|\nabla u\|_{p-1}(1 + \|g_1\|_1 + \|g_2\|_1)^{p-1}(1 + |x|)^{p-1}.$$

Для оператора (31) та згаданого вище $u(x, y)$ можна записати рівність

$$\varepsilon\overline{G}(\varepsilon)u(x, y) =$$
$$= a(y)\int\limits_{\mathbb{Y}}\int\limits_0^1\left(\nabla u\left(x + s\left(\varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)\right), z\right), g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y)\right)ds\,p(y, dz) =$$
$$= a(y)\int\limits_{\mathbb{Y}}(g_1(x, z), \nabla)u(x, y)\,p(y, dz) +$$
$$+ \varepsilon a(y)\int\limits_{\mathbb{Y}}\int\limits_0^1\left(\nabla u\left(x + s\left(\varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)\right), z\right), g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y)\right)ds\,p(y, dz) +$$
$$+ a(y)\int\limits_{\mathbb{Y}}\int\limits_0^1\left(\nabla u\left(x + s\left(\varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)\right), z\right) - \nabla u(x, z), g_1(x, y)\right)ds\,p(y, dz). \tag{33}$$

Легко зрозуміти, що функції $(f_j(x, y), \nabla) u(x)$, $j = 1, 2$, $Q u(x, y)$ та всі доданки правої частини (33) належать простору $\mathbb{W}_p$. Залишилось зауважити, що $\nabla u(x, y)$ є неперервним по x відображенням, а тоді

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{Y}} \int_0^1 \left| \nabla u\big(x + s\big(\varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)\big), z\big) - \nabla u(x, z) \right| ds = 0$$

для довільних $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{Y}$ та $z \in \mathbb{Y}$, що й доводить лему 5.

Лема 6. *Нехай $V_0(x)$ — неперервна функція, яка має неперервні x-похідні, причому $V_0 \in \mathbb{W}_p$, $|\nabla V_0| \in \mathbb{W}_{p-1}$, $\|D \nabla V_0\| \in \mathbb{W}_{p-2}$ для деякого $p \geq 2$. Тоді для всіх $\varepsilon \in (0, 1)$ можна записати*

$$\tilde{L}(\varepsilon) V_0(x) = \frac{1}{\varepsilon}(F_1(x, y), \nabla) V_0(x) + (F_2(x, y), \nabla) V_0(x) +$$

$$+ \frac{1}{2} a(y)([D\nabla V_0(x)] g_1(x, y), g_1(x, y)) + r_{2\varepsilon}(x, y), \tag{34}$$

де всі доданки у правій частині належать $\mathbb{W}_p$, причому

$$\sup_{0 \leq \varepsilon < 1} \|r_{2\varepsilon}\|_p < \infty; \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} r_{2\varepsilon}(x, y) = 0$$

для довільних $x \in \mathbb{R}^m$ та $y \in \mathbb{Y}$.

Доведення. Запишемо очевидну рівність

$$\varepsilon \overline{G}(\varepsilon) V_0(x, y) = a(y)\left[V_0\big(x + \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)\big) - V_0(x) \right] =$$

$$= a(y)\big(\nabla V_0(x), \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)\big) +$$

$$+ a(y) \int_0^1 \Big(\nabla V_0\big(x + s\big(\varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)\big)\big) - \nabla V_0(x), \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)\Big) ds =$$

$$= a(y)\big(\nabla V_0(x), \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)\big) +$$

$$+ a(y) \int_0^1 \int_0^1 s\Big(\big(D\nabla V_0\big(x + ts\big(\varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)\big)\big)\big(\varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)\big), \varepsilon g_1(x, y) +$$

$$+ \varepsilon^2 g_2(x, y)\big)\Big) ds\, dt = a(y)\big(\nabla V_0(x), \varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)\big) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} a(y)([D\nabla V_0(x)] g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y)), g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y) +$$

$$+ \varepsilon^2 a(y) \int_0^1 \int_0^1 s\Big(\big[D\nabla V_0\big(x + ts\big(\varepsilon g_1(x, y) + \varepsilon^2 g_2(x, y)\big) - D\nabla V_0(x)\big]\big(g_1(x, y) +$$

$$+ \varepsilon g_2(x, y)\big), \; g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y)\big), \; g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y)\big)\, ds\, dt.$$

Формула (34) випливає з неперервності $D\nabla V_0(x)$ та нерівностей

$$|(D \nabla V_0(x))(g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y)), \; g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y))| \leq$$

$$\leq \|D \nabla V_0\|_{p-2} (\|g_1\|_1 + \|g_2\|_1)^2 (1 + |x|)^p,$$

$$|((D\nabla V_0(x+ts(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)))c,c)| \le$$
$$\le |c|^2 \|D\nabla V_0\|_{p-2}(1+|x|+|g_1(x,y)|+|g_2(x,y)|)^{p-2} \le$$
$$\le |c|^2 \|D\nabla V_0\|_{p-2}(1+\|g_1\|_1+\|g_2\|_1)^{p-2}(1+|x|)^{p-2}$$

для всіх $c \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0,1]$, $s \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{Y}$ та $\varepsilon \in (0,1)$. Лема 6 доведена.

Лема 7. *Нехай* $V_0(x)$ *задовольняє умови леми* 6, *а* $u(x,y)$ *задовольняє умови леми* 5,

$$V_1(x,y) = (\Pi F_1(x,y), \nabla) V_0(x),$$
$$V(x,y) = V_0(x) + \varepsilon V_1(x,y) + \varepsilon^2 u(x,y).$$

Тоді $\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) V \in \mathbb{W}_p$ *та* $\sup_{0<\varepsilon<1} \|\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) V\|_p < \infty$.

Доведення. Легко бачити, що

$$|V_1(x,y)| \le \|\nabla V_0\|_{p-1} h \|F_1\|_1 (1+|x|)^p,$$
$$|\nabla V_1(x,y)| \le \|D\nabla V_0(x)\| \times |\Pi F_1(x,y)| + |\nabla V_0(x)| \times |\Pi D F_1(x,y)| \le$$
$$\le [\|D\nabla V_0\|_{p-2} h \|F_1\|_1 + \|\nabla V_0\|_{p-1} h \|DF_1\|_0 (1+|x|)^{p-1}$$

для всіх $y \in \mathbb{Y}$ та $x \in \mathbb{R}^m$. За означенням потенціалу (3) для будь-якого $\hat{v} \in \in C(\mathbb{Y})$ можна записати

$$a(y)\int_{\mathbb{Y}} \Pi \hat{V}(z) p(y,dz) = -\hat{V}(y) + a(y)\Pi \hat{V}(y) + \int_{\mathbb{Y}} \hat{V}(z)\mu(dz).$$

За побудовою $V_1 \in \mathbb{W}_p$, $|\nabla V_1| \in \mathbb{W}_{p-1}$,

$$\int_{\mathbb{Y}} V_1(x,y)\mu(dy) = 0$$

і тоді для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ маємо

$$\varepsilon \tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) V_1(x,y) + \frac{1}{\varepsilon}(F_1(x,y),\nabla) V_0(x) =$$
$$= ([D\nabla V_0(x)] F_1(x,y), \Pi F_1(x,y)) - ([D\nabla V_0(x)] g_1(x,y), F_1(x,y)) +$$
$$+ (\nabla V_0(x), [\Pi D F_1(x,y)] F_1(x,y)) - (\nabla V_0(x), [DF_1(x,y)] g_1(x,y)) + r_{3\varepsilon}(x,y),$$

де всі доданки належать $\mathbb{W}_p$, причому

$$\sup_{0 \le \varepsilon < 1} \|r_{3\varepsilon}\|_p < \infty, \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} r_{3\varepsilon}(x,y) = 0$$

для будь-яких $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{Y}$. З формули (34) випливає рівність

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)[V_0(x) + \varepsilon V_1(x,y)] = (\nabla V_0(x), F_2(x,y)) +$$
$$+ ([D\nabla V_0(x)] F_1(x,y), \Pi F_1(x,y)) - \Big([D\nabla V_0(x)] g_1(x,y), f_1(x,y) +$$
$$+ \frac{1}{2} a(y) g_1(x,y) \Big) + (\nabla V_0(x), [\Pi D F_1(x,y)] F_1(x,y)) -$$

$$- \left(\nabla V_0(x), [DF_1(x, y)]g_1(x, y)\right) + r_{2\varepsilon}(x, y) + r_{3\varepsilon}(x, y). \tag{35}$$

Зауважимо, що всі доданки (35) належать простору $\mathbb{V}_p$. Тому $\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)(V_0(x) + \varepsilon V_1(x, y)) \in \mathbb{V}_p$ та $\sup_{0<\varepsilon<1}\left\| \tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)(V_0(x) + \varepsilon V_1(x, y))\right\|_p < \infty$. Твердження леми 7 випливає з леми 5, оскільки $Qu \in \mathbb{V}_p$.

3. Рівномірна обмеженість розв'язків. Встановимо рівномірну обмеженість розв'язків імпульсних систем з марковськими перемиканнями (27) – (29).

Теорема 2. *Для кожного $p > 0$ існують такі додатні константи ε_p, c_p та γ_p, що розв'язок $\{x_\varepsilon(t)\}$ системи (27) – (29) задовольняє нерівність*

$$\mathbb{E}_{x,y}\left\{|x_\varepsilon(t)|^p\right\} \le c_p e^{\gamma_p t}(1 + |x|)^p \tag{36}$$

для довільних $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{Y}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_p)$, $0 < \varepsilon_p << 1$ та $t \ge 0$.

Доведення. Доведення достатньо провести тільки для $p \ge 2$, оскільки для будь-яких $p_1 \in (0, 2]$

$$\mathbb{E}_{x,y}\left\{|x_\varepsilon(t)|^{p_1}\right\} \le \left(\mathbb{E}_{x,y}\left\{|x_\varepsilon(t)|^2\right\}\right)^{p_1/2}.$$

Нехай $V_0(x) \in C(\mathbb{R}^m)$ задовольняє умови леми 6 та існують додатні сталі l_1 і l_2 такі, що

$$l_1(1 + |x|)^p \le V_0(x) \le l_2(1 + |x|)^p \tag{37}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^m$. Для неперервної функції $V(x, y) = V_0(x) + \varepsilon V_1(x, y)$, де v_1 взято з леми 7, можемо використати формулу Динкіна (див. [15], § 5.1)

$$\mathbb{E}_{x,y} V\left(x_\varepsilon\left(\tau_\rho(t)\right), y_\varepsilon\left(\tau_\rho(t)\right)\right) =$$

$$= V(x, y) + \mathbb{E}_{x,y}\int_0^{\tau_\rho} \left(\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) V(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s))\right) ds, \tag{38}$$

де $\tau_\rho(t) = \min\{\tilde{\tau}_\rho, t\}$, $\tilde{\tau}_\rho = \inf\{t \ge 0 \mid, |x_\varepsilon(s)| > \rho\}$, $\rho > 0$, $x \in \{x \in \mathbb{R}^n|$, $|x| < \rho\}$.

За побудовою

$$h_1(1 + |x|)^p \le V(x, y) \le h_2(1 + |x|)^p, \tag{39}$$

де константи

$$h_1 = l_1 - \varepsilon_p h \|\nabla V_0\|_{p-1} \|F_1\|_1,$$

$$h_2 = l_2 + \varepsilon_p h \|\nabla V_0\|_{p-1} \|F_1\|_1$$

додатні для деякого достатньо малого $\varepsilon_p > 0$, $0 < \varepsilon_p << 1$.

Надалі будемо використовувати формулу (35):

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) V(x, y) = \tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) V_0(x) + \varepsilon \tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) V_1(x, y) =$$

$$= (\nabla V_0(x), F_2(x, y)) - \left([D\nabla V_0(x)] g_1(x, y), f_1(x, y) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} a(y) g_1(x, y)\right) + \left([D\nabla V_0(x)] F_1(x, y), \Pi F_1(x, y)\right) +$$

$$+ \left(\nabla V_0(x), [\Pi DF_1(x, y)]F_1(x, y)\right) - \left(\nabla V_0(x), [DF_1(x, y)]g_1(x, y)\right) + r_{4\varepsilon}(x, y),$$

де $r_{4\varepsilon} \in \mathbb{V}_p$, $\sup_{0<\varepsilon<1} \| r_{4\varepsilon} \|_p < \infty$. Тоді $\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) V \in \mathbb{V}$ і завдяки нерівності (39) можна записати

$$| \tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) V(x, y) | \le \frac{h_3}{h_1} V(x, y),$$

де $h_3 = \sup_{0<\varepsilon<1} \left\| \tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) V \right\|_p$. Легко бачити, що

$$\eta(t) = e^{-h_3 t/h_1} V\left(x_\varepsilon\left(\tau_\rho(t)\right), y_\varepsilon\left(\tau_\rho(t)\right)\right)$$

має недодатну праву похідну умовного математичного сподівання, оскільки

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \mathbb{E}_{x,y}\left\{ (\eta(t+\Delta) - \eta(t)) / \mathcal{F}^{t/\varepsilon^2} \right\} = -\frac{h_3}{h_1}\eta(t) +$$

$$+ e^{-h_3 t/h_1} \tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) V\left(x_\varepsilon\left(\tau_\rho(t)\right), y_\varepsilon\left(\tau_\rho(t)\right)\right).$$

Отже, $\{\eta(t)\}$ є невід'ємним супермартингалом і тоді

$$\mathbb{P}_{x,y}\left(\sup_{t_0 \le t \le T} \eta(t) \ge \rho \right) \le \frac{1}{\rho} \mathbb{E}_{x,y} \eta(t_0)$$

при всіх $T > t_0 \ge 0$ та $\rho > 0$. Тому

$$\mathbb{P}_{x,y}\left(\sup_{0 \le t \le T} \left| x_\varepsilon\left(\tau_\rho(t)\right) \right| \ge \rho \right) \le$$

$$\le \mathbb{P}_{x,y}\left(\sup_{0 \le t \le T} V\left(x_\varepsilon\left(\tau_\rho(t)\right), y_\varepsilon\left(\tau_\rho(t)\right)\right) \ge h_1 (1+\rho)^p \right) \le$$

$$\le \frac{h_2 (1 + |x|)^p}{h_1 (1+\rho)^p} e^{T h_3 / h_1} \tag{40}$$

для довільних $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{Y}$ та $\varepsilon \in (0, \varepsilon_p)$. Із (38) та (39) маємо нерівність

$$\mathbb{E}_{x,y} | x_\varepsilon(t) |^p \le \lim_{\rho \to \infty} \frac{1}{h_1} \mathbb{E}_{x,y} V\left(x_\varepsilon\left(\tau_\rho(t)\right), y_\varepsilon\left(\tau_\rho(t)\right)\right) \le \frac{h_2}{h_1} e^{h_3 t / h_1} (1 + |x|)^p$$

для довільних $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{Y}$ та $\varepsilon \in (0, \varepsilon_p)$, що й доводить теорему 2.

***Наслідок* 1.** *Якщо* $V \in D(\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon))$, $V \in \mathbb{V}_{p_1}$, $\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) V \in \mathbb{V}_{p_2}$ *при деяких* $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, *то для всіх* $T > 0$, $t \in [0, T)$ *та* $y \in \mathbb{Y}$ *справедливий аналог формули Динкіна*

$$\mathbb{E}_{x,y} V(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) = V(x, y) + \int_0^t \mathbb{E}_{x,y}(\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) V)(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s))\, ds \tag{41}$$

та існує таке число $M_T > 0$, *що*

$$| \mathbb{E}_{x,y} V(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) - V(x, y) | \le t M_T (1 + |x|)^{p_2}. \tag{42}$$

Доведення. Формула (41) випливає з (38) при $\rho \to \infty$, а (42) — з (36).

Наслідок 2. *Для довільного $T > 0$ існує така додатна константа ε_T, що при будь-якому $r > 0$*

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_T} \sup_{|x|\le r} \mathbb{P}_{x,y}\left(\sup_{0\le t\le T} |x_\varepsilon(t)| \ge \rho\right) = 0, \tag{43}$$

де $\rho > r$.

Доведення випливає з формули (40).

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. – Киев: Выща шк., 1987. – 287 с.
2. *Анисимов В. В.* Случайные процессы с дискретной компонентой. – Киев: Наук. думка, 1988. – 242 с.
3. *Самойленко А. М, Станжицкий А. Н.* О флуктуациях в схеме усреднения для дифференциальных уравнений со случайным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 631–641.
4. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
5. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
6. *Свердан М. Л., Царьков Е. Ф.* Устойчивость стохастических импульсных систем. – Рига: РТУ, 1994. – 300 с.
7. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
8. *Blankenship G., Papanicolaou G. C.* Stability and control of stochastic system with wide-band noise disturbances. 1 // SIAM J. Appl. Math. – 1978. – **34**. – P. 437–476.
9. *Korolyuk V. S.* Averaging and stability of dynamical systems with rapid Markov switchings. – Univ. Umea. – Umea, 1991. – № 90167. – 15 p.
10. *Tsarkov Ye.* Averaging in dynamical systems with Markov jumps. – Univ. Bremen, Inst. Dynamical Syst. – Bremen, 1993. – № 282. – 41 p.
11. *Анісімов В. В.* Принцип усереднення для процесів, що перемикаються // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 1992. – № 46. – С. 3–13.
12. *Anisimov V. V.* Asymptotic methods in the theory of switching processes // Proc. 2nd Ukrainian – Hungarian Conference (Mukachevo, Ukraine, 1992). – Kiev: TBiMC, 1995. – P. 1–28.
13. *Anisimov V. V.* Switching processes: averaging principle, diffusion approximation and application // Acta Appl. Math. – 1995. – **40**. – P. 95–141.
14. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
15. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 859 с.

Одержано 20.09.95