УДК 512. 544

Н. С. Черников (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Г. А. Маланьина (Перм. ун-т, Россия)

ОДНО УСЛОВИЕ ДОПОЛНЯЕМОСТИ В ГРУППАХ

We consider groups satisfying the following condition: Any subgroup of such a group that can be complemented in a larger subgroup can also be complemented in the entire group. A complete description of such groups is obtained under some weak conditions of finiteness.

Розглядаються групи, кожна підгрупа яких, що має доповнення в довільній більшій підгрупі, має доповнення і в усій групі. При деяких слабких умовах скінченності одержано повний їх опис.

Группы, в которых все подгруппы инвариантны, как известно, полностью описаны Р. Дедекиндом [1] и Р. Бэром [2], а группы, в которых все подгруппы дополняемы (вполне факторизуемые группы), — Н. В. Черниковой [3]. Н. С. Черников изучил группы, любая подгруппа которых, инвариантная в какой-нибудь большей подгруппе, инвариантна и во всей группе [4, 5].

В настоящей работе рассматриваются группы, любая подгруппа которых, дополняемая в какой-нибудь большей подгруппе, дополняема и во всей группе. Класс всех таких групп будем обозначать через $\mathfrak{C}$. Обозначим также через $\mathfrak{L}$ минимальный локальный класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и образования возрастающих нормальных рядов и содержащий вместе с произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом R с единицей и конечнопорожденным модулем M над R группу $\mathrm{Aut}_R(M)$. Класс $\mathfrak{L}$ весьма широк и включает в себя, например, все группы матриц над коммутативно-ассоциативными кольцами с единицей (в частности, все линейные группы), все локально разрешимые, локально конечные, локально почти разрешимые группы, RN^*-группы. Напомним также, что локально ступенчатой называется группа, любая отличная от единицы конечнопорожденная подгруппа которой имеет подгруппу отличного от единицы конечного индекса (С. Н. Черников — см., например, [6]). Класс локально ступенчатых групп включает в себя класс $\mathfrak{L}$ и многие другие классы групп, например: финитно аппроксимируемых групп; групп, имеющих нормальную систему с конечными факторами; RN-групп (и вместе с последним все классы групп Куроша – Черникова [7]).

Лемма 1. *Конечная примарная группа принадлежит классу $\mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда она либо элементарная абелева, либо неединичная примарная циклическая непростого порядка, либо группа кватернионов, либо обобщенная группа кватернионов.*

Доказательство. *Достаточность* утверждения леммы очевидна.

Необходимость. Пусть G — конечная p-группа из класса $\mathfrak{C}$. Если G не содержит элементарную абелеву подгруппу порядка p^2, то в группе G подгруппа порядка p единственная. Тогда группа G является либо примарной циклической, либо группой кватернионов, либо обобщенной группой кватернионов (см., например, [8], теорема 12.5.2).

Пусть группа G имеет элементарную абелеву подгруппу F порядка p^2 (последняя вполне факторизуема). Тогда любая подгруппа простого порядка F дополняема в G.

Пусть H — дополняемая в G подгруппа простого порядка. Если $H \not\subseteq Z(G)$, то $\langle H, Z(G)\rangle = H \times Z(G)$. Тогда подгруппа $Z(G)$ дополняема в G, что возможно лишь при условии $Z(G) = G$. Получили противоречие. Следовательно, $H \subseteq Z(G)$ и $F \subseteq Z(G)$.

Нижний слой группы $Z(G)$ обозначим через K. Группа K элементарная абелева порядка $> p$, все ее истинные подгруппы дополняемы в ней, а потому и в группе G. Тогда группа K дополняема в G [9]. Если M — дополнение к K в M, то $G=K\times M$. Поскольку K — нижний слой группы $Z(G)$, то $M=1$ и G — элементарная абелева группа. Лемма доказана.

Лемма 2. *Конечная группа принадлежит классу* $\mathfrak{C}$ *тогда и только тогда, когда она является либо вполне факторизуемой, либо неединичной примарной циклической непростого порядка, либо группой кватернионов, либо обобщенной группой кватернионов.*

Доказательство. Достаточность утверждения леммы очевидна.

Необходимость. Пусть конечные группы класса $\mathfrak{C}$ не исчерпываются группами отмеченных типов и G — конечная группа из класса $\mathfrak{C}$ наименьшего порядка, не принадлежащая ни к одному из них. Тогда G непримарна (лемма 1) и каждая ее собственная подгруппа является группой одного из этих типов. Пусть в случае, когда G имеет в точности одну инволюцию (т. е. элемент порядка 2), H — какая-нибудь ее подгруппа порядка $2q$ для простого $q\neq 2$, а в случаях, когда $2\nmid |G|$ и G имеет какие-нибудь две инволюции i и j, H — минимальная не примарная циклическая подгруппа соответственно группы G и подгруппы $\langle i, j\rangle$. Тогда с учетом теоремы Миллера – Морено [10] $|H|=pq$ для простых p и q. Пусть $K<H$ и $|K|=p$. Так как H вполне факторизуема и $G\in\mathfrak{C}$, то K имеет некоторое дополнение D в G. Очевидно, $|D\cap H|=q$.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда D — вполне факторизуемая группа. Возьмем произвольную подгруппу R какого-нибудь простого порядка r группы G.

Если $r\neq p$, то D содержит силовскую r-подгруппу группы G. В силу теоремы Силова для некоторого элемента g из G $g^{-1}Rg$ принадлежит этой силовской r-подгруппе, т. е. принадлежит D. Поэтому $g^{-1}Rg$ дополняема в D. Поскольку $G\in\mathfrak{C}$, подгруппа $g^{-1}Rg$ дополняема в G, и вместе с тем подгруппа R дополняема в G.

Пусть $r=p$ и P — силовская p-подгруппа группы G, содержащая K. Тогда $P\cap D$ — дополнение к K в P. Если $K=P$, то P — элементарная абелева. Если же $K\neq P$, то подгруппа P содержит более одной подгруппы порядка p и согласно лемме 1 также является элементарной абелевой. Ввиду теоремы Силова для некоторого g из G $g^{-1}Rg\subseteq P$. Тогда подгруппа $g^{-1}Rg$ дополняема в P. Поскольку $G\in\mathfrak{C}$, отсюда вытекает, что $g^{-1}Rg$ и вместе с тем подгруппа R дополняемы в G.

Итак, произвольная подгруппа R простого порядка (конечной) группы G дополняема в G. Тогда группа G вполне факторизуема [9]. Противоречие.

Значит, такая ситуация невозможна.

Следовательно, $D\cap H$ — единственная подгруппа простого порядка группы D. Так как подгруппа $D\cap H$ дополняема в H, то она дополняема в G, а значит, и в D. Следовательно, $D\cap H=D$ и $G=H$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

Теорема 1. *Локально конечная группа* G *принадлежит классу* $\mathfrak{C}$ *тогда и только тогда, когда она или вполне факторизуемая, или примарная локально циклическая, или локально кватернионная группа.*

Доказательство. Достаточность. Если группа G вполне факторизуема, то она принадлежит классу $\mathfrak{C}$. Пусть группа G либо примарная локально циклическая, не вполне факторизуемая группа, либо локально кватернионная группа. В группе G существует единственная подгруппа простого порядка, поэтому никакая ее собственная подгруппа не дополняема ни в какой большей подгруппе. Значит, и в этом случае группа $G\in\mathfrak{C}$.

Необходимость. Пусть $G\in\mathfrak{C}$ и G не является ни примарной локально циклической, ни локально кватернионной группой. Тогда ввиду леммы 2 группа G содержит некоторую конечную вполне факторизуемую подгруппу H непростого порядка. Согласно лемме 2 все конечные подгруппы группы G, содержащие H, вполне факторизуемы, а потому и любая конечная подгруппа группы G вполне факторизуема. Тогда в группе G любая конечная подгруппа дополняема [9].

Докажем, что произвольная абелева подгруппа A группы G, отличная от единицы, дополняема в G. Действительно, если B — какая-нибудь подгруппа простого порядка из A и D — дополнение к ней в G, то $G = BD$, $B \cap D = 1$ и $D \cap A$ — дополнение B в A (см., например, [11], лемма 1.8). Так как $G \in \mathfrak{C}$, то $D \cap A$ дополняема в G с помощью некоторой подгруппы D^*. Но тогда (согласно лемме 1.8 из [11]) $D^* \cap D$ дополняет $A \cap D$ в D. Нетрудно убедиться, что $D^* \cap D$ дополняет A в G.

Так как любая абелева подгруппа группы G дополняема в ней, то ввиду [12] группа G вполне факторизуема. Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{L}_0$ — единичный класс групп, $\mathfrak{L}_1$ — класс всех групп автоморфизмов конечнопорожденных модулей над коммутативно-ассоциативными кольцами с единицей. Для каждого порядкового $\alpha > 1$ определим индуктивно класс $\mathfrak{L}_\alpha$: $\mathfrak{L}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{L}_\beta$, если α — предельное; если α — непредельное, то $\mathfrak{L}_\alpha$ — класс всех групп, имеющих локальную систему подгрупп, каждая из которых имеет возрастающий нормальный ряд с $\mathfrak{L}_{\alpha-1}$ факторами.

Если G — произвольная группа из класса $\mathfrak{L}$, то, очевидно, при некотором α $G \in \mathfrak{L}_\alpha$.

Лемма 3. *В классе $\mathfrak{L}$ все периодические группы локально конечны.*

Доказательство. Пусть лемма неверна и α — наименьшее порядковое число, при котором в классе $\mathfrak{L}_\alpha$ есть некоторая периодическая не локально конечная группа G. В классе $\mathfrak{L}_1$ все периодические группы локально конечны (см. [13], предложение 13.35). Поэтому $\alpha > 1$. Очевидно, α — непредельное число. Группа G имеет локальную систему подгрупп, каждая из которых имеет возрастающий нормальный ряд с $\mathfrak{L}_{\alpha-1}$-факторами. Так как G не локально конечна, то в этой системе найдется не локально конечная подгруппа H. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $G = H$.

Пусть $1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\gamma = G$ — возрастающий нормальный ряд с $\mathfrak{L}_{\alpha-1}$-факторами и δ — наименьшее порядковое число, для которого G_δ не локально конечна. Тогда очевидно, что δ — непредельное число. Но в таком случае $G_{\delta-1}$ локально конечна и фактор-группа $G_\delta / G_{\delta-1}$ локально конечна ($G_\delta / G_{\delta-1} \in \mathfrak{L}_{\alpha-1}$). Значит, группа G_δ локально конечна [14]. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

Лемма 4. *Пусть $G \neq 1$ — группа из класса $\mathfrak{C}$ и $H \neq 1$ — ее подгруппа. Тогда фактор-группа $N_G(H) / H$ периодическая.*

Доказательство. Действительно, пусть $N_G(H) / H$ содержит некоторый элемент gH бесконечного порядка. Тогда $\langle g \rangle$ — бесконечная циклическая подгруппа и $\langle g \rangle \cap H = 1$. Так как подгруппа $\langle g^2 \rangle$ дополняема в подгруппе $H \leftthreetimes \langle g^2 \rangle$, то она дополняема в G, а значит, и в подгруппе $\langle g \rangle$. Противоречие. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{L}$ — минимальный локальный класс групп, замкнутый относительно образования возрастающих нормальных рядов и содержащий все конечные группы и бесконечную циклическую группу. Исходя из класса $\mathcal{L}_1$, состоящего из всех бесконечных циклических и конечных групп, определим для каждого порядкового $\alpha > 1$ класс $\mathcal{L}_\alpha$ так же, как выше определен класс $\mathfrak{L}_\alpha$ исходя из класса $\mathfrak{L}_1$. Очевидно, произвольная группа из класса $\mathscr{L}$ при подходящем α содержится в классе $\mathscr{L}_\alpha$.

Пусть $\mathfrak{L}^*$ — подкласс класса $\mathfrak{L}$, состоящий из всех его групп, не содержащих нециклических свободных подгрупп. Нетрудно видеть, что класс $\mathfrak{L}^*$ локален и замкнут относительно взятия подгрупп и образования возрастающих нормальных рядов.

Лемма 5. *Классы $\mathfrak{L}^*$ и $\mathscr{L}$ совпадают.*

Доказательство. Действительно, очевидно, $\mathscr{L}_1 \subset \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}^*$. Поэтому с учетом локальности и замкнутости относительно образования возрастающих нормальных рядов класса $\mathfrak{L}^*$ $\mathscr{L}_\alpha \subseteq \mathfrak{L}^*$ при любом порядковом α. Следовательно, $\mathscr{L} \subseteq \mathfrak{L}^*$.

Покажем, что $\mathfrak{L}^* \subseteq \mathscr{L}$. В самом деле, пусть это не так и α — наименьшее порядковое число, при котором в классе $\mathfrak{L}_\alpha \cap \mathfrak{L}^*$ найдется группа $G \notin \mathscr{L}$. Очевидно, α — непредельное порядковое число.

Если $\alpha > 1$, то G имеет локальную систему подгрупп, каждая из которых имеет возрастающий нормальный ряд с $\mathfrak{L}_{\alpha-1}$-факторами. Но, очевидно, эти факторы принадлежат $\mathfrak{L}^*$. Следовательно, они принадлежат $\mathscr{L}$. Но тогда ввиду локальности и замкнутости относительно образования возрастающих нормальных рядов класса $\mathscr{L}$ $G \in \mathscr{L}$. Противоречие.

Итак, $\alpha = 1$. Но в силу утверждения 13.31 из [13] произвольная группа из класса $\mathfrak{L}_1$ либо локально почти разрешима, либо содержит нециклическую свободную подгруппу. Значит, G локально почти разрешима. Легко видеть, однако, что произвольная конечнопорожденная почти разрешимая группа имеет возрастающий нормальный ряд, все факторы которого за исключением, быть может, одного конечного (и при этом последнего) циклические. Следовательно, она принадлежит классу $\mathscr{L}_2$. Поэтому $\mathscr{L}_2$ принадлежит и произвольная локально почти разрешимая группа. Таким образом, $G \in \mathscr{L}$.

Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. *Справедливо соотношение*

$$\mathfrak{C} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{C} \cap \mathscr{L}.$$

Доказательство. Действительно, произвольная нециклическая свободная группа имеет нормальные делители с бесконечными циклическими фактор-группами по ним. Поэтому ввиду леммы 4 она не принадлежит $\mathfrak{C}$. Следовательно, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{L}^*$ и, значит, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{L} = \mathfrak{C} \cap \mathscr{L}$ в силу леммы 5. Лемма доказана.

Теорема 2. *Класс $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{L}$ исчерпывается вполне факторизуемыми, примарными локально циклическими, локально циклическими без кручения и локально кватернионными группами.*

Доказательство. Пусть теорема не верна. Тогда с учетом леммы 6 найдется такое порядковое α, что класс $\mathfrak{C} \cap \mathscr{L}_\alpha$ включает в себя некоторую группу G — контрпример к утверждению теоремы, но ни при каком $\beta < \alpha$ класс $\mathfrak{C} \cap \cap \mathscr{L}_\beta$ контрпримеров не содержит. Ввиду леммы 3 и теоремы 1 G имеет элемент бесконечного порядка. Так как, очевидно, число α непредельное и $\alpha \neq 1$, то группа G имеет локальную систему подгрупп, каждая из которых имеет возрастающий нормальный ряд с $\mathscr{L}_{\alpha-1}$-факторами. Очевидно, среди членов этой локальной системы найдется некоторая не локально циклическая подгруппа H, содержащая элемент бесконечного порядка. Не теряя общности рассуждений, далее можно считать, что $G = H$.

Пусть $G_0 = 1 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\gamma = G$ — возрастающий нормальный ряд с $\mathscr{L}_{\alpha-1}$-факторами группы G и δ — наименьшее порядковое число такое, что G_δ содержит элемент бесконечного порядка, но не является локально циклической группой. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $\gamma = \delta$.

Очевидно, число γ непредельное. Так как $G \notin \mathfrak{C} \cap \mathscr{L}_{\alpha-1}$, то $\gamma \neq 1$. Следовательно, ввиду леммы 4 фактор-группа $G / G_{\gamma-1}$ периодическая и, значит, согласно леммам 3 и 5 локально конечная группа. Тогда $G_{\gamma-1}$ содержит элемент бесконечного порядка и, значит, является локально циклической группой без кручения. Так как группа G не является локально циклической, то в ней найдется 2-порожденная подгруппа H, содержащая элемент бесконечного порядка и не являющаяся локально циклической. Поскольку $G / G_{\gamma-1}$ локально конечна, то $H / (H \cap G_{\gamma-1})$ конечна. Поэтому $H \cap G_{\gamma-1}$ — бесконечная циклическая группа. Пусть $H \cap G_{\gamma-1} = \langle g \rangle$.

Далее, не теряя общности рассуждений, можно считать, что $G = H$. Тогда $\langle g \rangle \lhd G$ и $|G : \langle g \rangle| < \infty$. Пусть L — любая собственная подгруппа группы G. Подгруппа $\langle g^2 \rangle$ не дополняема в $\langle g \rangle$. Значит, она не дополняема в G и, следовательно, не дополняема в $\langle g^2 \rangle L$. Поэтому $\langle g^2 \rangle \cap L \neq 1$. Так как $|\langle g \rangle : (L \cap \langle g \rangle)| < \infty$ и $|G : \langle g \rangle| < \infty$, то $|G : L| < \infty$. Итак, произвольная собственная подгруппа бесконечной группы G имеет в ней конечный индекс. Поэтому группа G бесконечная циклическая [15]. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Из теоремы 2 вытекают, например, такие следствия.

***Следствие* 1.** *Не вполне факторизуемая группа матриц над коммутативно-ассоциативным кольцом с единицей, принадлежащая классу $\mathfrak{C}$, является либо примарной локально циклической, либо локально циклической без кручения, либо локально кватернионной группой.*

***Следствие* 2.** *Не вполне факторизуемая линейная группа, принадлежащая классу $\mathfrak{C}$, является либо примарной локально циклической, либо локально циклической без кручения, либо локально кватернионной группой.*

***Следствие* 3.** *Класс локально разрешимых $\mathfrak{C}$-групп исчерпывается группами из теоремы* 2.

Напомним, что радикальная (в смысле Б.И. Плоткина) группа — это группа, имеющая возрастающий нормальный ряд с локально нильпотентными факторами. Частный случай радикальных групп — RN^*-группы.

***Следствие* 4.** *Класс радикальных $\mathfrak{C}$-групп исчерпывается группами из теоремы* 2.

***Следствие* 5.** *Класс локально радикальных $\mathfrak{C}$-групп исчерпывается группами из теоремы* 2.

Напомним, что простая неабелева группа, у которой нет нетривиальных нормальных систем, называется абсолютно простой; группа, не имеющая истинных подгрупп конечного индекса, называется квазиполной. Класс квазиполных групп включает в себя все бесконечные простые группы.

Предложение 1. *Для группы $G \in \mathfrak{C}$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Подгруппа G'' не содержит отличных от единицы конечных дополняемых в ней подгрупп.*

2. *Если $G'' \neq 1$, то для любых двух отличных от единицы подгрупп $H \subseteq G$ и $K \subseteq G'' \cap N_G(H)$ имеет место $H \cap K \neq 1$.*

3. *Если $G'' \neq 1$, то пересечение произвольной конечной совокупности отличных от единицы взаимонормализуемых подгрупп группы G'' отлично от единицы.*

4. *Если группа G содержит в точности одну подгруппу простого порядка,*

то она примарна по некоторому простому числу p, причем при $p = 2$ является локально циклической или локально кватернионной группой.

5. *Если группа G содержит более одной подгруппы простого порядка, то для любой ее подгруппы H, порожденной элементами простых порядков и имеющей непростой порядок, пересечение $H \cap G''$ является либо бесконечной абсолютно простой не локально конечной квазиполной группой, либо равно единице.*

Доказательство. 1. Пусть F — конечная дополняемая подгруппа группы G'' и D — дополнение к ней в G''. Тогда по теореме Пуанкаре найдется подгруппа $N \subseteq D$, $N \trianglelefteq G''$ и $|G'' : N| < \infty$. Пусть $L = \bigcap_{g \in G} N^g$. Как известно, в произвольной группе пересечение всех подгрупп, индексы которых не превышают фиксированного натурального числа, определяет локально конечную фактор-группу (М. Холл — см., например, [16, с. 250]). Таким образом, фактор-группа G''/L локально конечна.

Если $F \neq 1$, то подгруппа L дополняема в $L \leftthreetimes F$, а значит, и в G. Пусть D^* — дополнение к L в G. Тогда D^* — расширение локально конечной группы с помощью метабелевой. В таком случае в силу теоремы 2 $(D^*)'' = 1$ и, значит, $G'' \subseteq L \subset G''$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения 1.

2. Пусть $H \cap K = 1$. Возьмем в K произвольную циклическую подгруппу $\langle g \rangle \neq 1$. Тогда $\langle g \rangle$ дополняема в $H \leftthreetimes \langle g \rangle$ и, значит, в G. Следовательно, $\langle g \rangle$ дополняема в G''. Ввиду леммы 4 $\langle g \rangle$ имеет конечный порядок, что невозможно в силу утверждения 1. Полученное противоречие доказывает утверждение 2.

3. Утверждение непосредственно вытекает из утверждения 2.

4. Действительно, если H — единственная подгруппа простого порядка группы G, то $H \trianglelefteq G$ и по лемме 4 фактор-группа G/H периодическая, поэтому G периодическая, Значит, группа G примарна по некоторому p. Очевидно, каждая абелева подгруппа группы G локально циклическая. Поэтому G удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп. Тогда в случае $p = 2$ группа G локально конечна [17]. Поэтому произвольная конечная подгруппа группы G либо циклическая, либо группа кватернионов (см., например, [8], теорема 12.5.2). Следовательно, группа G либо локально кватернионная, либо локально циклическая 2-группа.

5. Пусть $H \cap G'' \neq 1$. Тогда $H \cap G''$ не локально конечна. Действительно, иначе H, будучи расширением локально конечной группы с помощью метабелевой группы, принадлежит $\mathfrak{L}$. В таком случае H в силу теоремы 2 вполне факторизуема. Но тогда произвольная подгруппа K простого порядка из $H \cap \cap G''$ дополняема в H. Поэтому K дополняема в G и, значит, в G''. Последнее невозможно ввиду утверждения 1.

Покажем, что подгруппа $H \cap G''$ абсолютно проста. Пусть это не так и $H \cap G''$ имеет некоторую нетривиальную нормальную систему $\mathcal{M}$. Так как подгруппы группы H, порожденные конечными множествами ее элементов простых порядков, образуют ее локальную систему, то среди таких подгрупп найдется подгруппа L, все различные пересечения которой с членами $\mathcal{M}$ образуют нетривиальную нормальную систему подгруппы $L \cap G''$. Далее, не умаляя общности рассуждений, можно считать, что $L = H$. Тогда H порождается некоторым конечным множеством M элементов простых порядков. Так как $H \cap \cap G'' \neq 1$, то фактор-группа $H / H \cap G''$ согласно лемме 4 периодическая. Будучи конечнопорожденной периодической разрешимой, она конечна (С. Н. Черников — см., например, [18], предложение 1.1). Следовательно, индекс $|H : (H \cap G'')|$ конечен и подгруппа $H \cap G''$ конечнопорождена.

Пусть S — какая-нибудь конечная система порождающих группы $H \cap G''$ и K — объединение всех членов системы $\mathcal{M}$, отличных от $H \cap G''$. Так как ни один собственный член системы не содержит S, а S конечна, то и их объединение K не содержит S. Следовательно, $K \neq H \cap G''$. Очевидно, $K \lhd H \cap G''$ и $K \neq 1$.

Возьмем произвольный элемент g из M. Пусть $|g| = p$. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ $g^{-n}Kg^n \lhd H \cap G''$ и, значит, ввиду утверждения 3 подгруппа $R = \bigcap_{i=1}^{p} g^{-i}Kg^i$ отлична от единицы. Покажем, что $g \in R$. Пусть это не так. Тогда подгруппа R дополняема в $R \leftthreetimes \langle g \rangle$, а значит, и в G. Поэтому R дополняема в $H \cap G''$. Если D — дополнение к R в $H \cap G''$, то любая циклическая подгруппа $\langle d \rangle \neq 1$ из D дополняема в G''. Ввиду леммы 4 подгруппа $\langle d \rangle$ конечна, что противоречит утверждению 1. Значит, $g \in R$.

Следовательно, $g \in K$ и ввиду произвольности g $M \subseteq K$. Последнее невозможно, так как $K \neq H$. Полученное противоречие доказывает, что $H \cap G''$ абсолютно простая. Тогда, будучи бесконечной, она квазиполная.

Из утверждений 1, 5 предложения 1 и леммы 2 легко вытекает такое следствие.

Следствие 6. *Если группа простой экспоненты из класса* $\mathfrak{C}$ *неабелева, то ее второй коммутант является бесконечной абсолютно простой не локально конечной группой с циклическими конечными подгруппами.*

Предложение 2. *Если группа* $G \in \mathfrak{C}$ *порождается двумя элементами, хотя бы один из которых имеет простой порядок, то индекс* $|G : G''|$ *конечен, и подгруппа* G'' *является бесконечной абсолютно простой не локально конечной и квазиполной группой, либо равна* 1.

Доказательство. Действительно, если бы индекс $|G : G''|$ был бесконечен, то фактор-группа G / G'' содержала бы элемент бесконечного порядка (С. Н. Черников — см., например, предложение 1.1 из [18]). Но тогда согласно лемме 4 $G'' = 1$ и по теореме 2 G — локально циклическая группа без кручения. Получили противоречие. Итак, индекс $|G : G''|$ конечен.

Пусть $G'' \neq 1$. Тогда подгруппа G'' не локально конечна, так как иначе $G \in \mathfrak{L}$, и значит, согласно теореме 2 $G'' = 1$. Поскольку группа G конечнопорождена и индекс $|G : G''|$ конечен, то подгруппа G'' конечнопорождена. Пусть M — какая-нибудь ее конечная система порождающих. Возьмем в G'' произвольную нормальную систему $\mathcal{M}$ подгрупп. Покажем, что она тривиальна. Пусть это не так. Обозначим через H теоретико-множественное объединение всех членов системы $\mathcal{M}$, отличных от G''. Тогда $H \neq 1$, $H \neq G''$ и $H \lhd G''$. Пусть g — элемент простого порядка p группы G, который с некоторым $h \in G$ порождает группу G. Согласно утверждению 3 предложения 1 подгруппа $L = \bigcap_{k=1}^{p} g^{-k}Hg^k$ отлична от единицы. Очевидно, элемент g нормализует L. Далее, $g \notin L$, так как иначе было бы $G = L\langle h \rangle$ и $G'' \subseteq L$, что невозможно. Тогда подгруппа L дополняема в $L \leftthreetimes \langle g \rangle$, а значит, и в группе G''. Если D — дополнение к L в G'', то любая циклическая подгруппа $\langle d \rangle$ из D дополняема в $L \leftthreetimes \langle d \rangle$. Тогда она дополняема в G, а значит, и в D. Следовательно, $D'' = 1$ [9]. Но поскольку $L \lhd G''$, то в $(G'')'' \subseteq L$, и значит, с учетом теоремы 2 $G'' \subseteq L$. Противоречие.

Предложение 2 доказано.

Теорема 3. *Если группа* G *из класса* $\mathfrak{C}$ *имеет элемент простого порядка, который с каждым своим сопряженным порождает в ней локально ступенчатую подгруппу (или хотя бы подгруппу без отличных от единицы квазиполных под-*

групп конечного индекса), то она либо вполне факторизуема, либо примарна и содержит в точности одну, причем собственную, подгруппу простого порядка.

Доказательство. Пусть g — соответствующий элемент простого порядка. Рассмотрим сначала случай, когда $g \in G''$. Тогда ввиду утверждения 5 из предложения 1 элемент g с каждым своим сопряженным порождает в G подгруппу простого порядка, т. е. $\langle g \rangle \trianglelefteq G$. Пусть $\langle h \rangle$ — отличная от единицы циклическая подгруппа G. Тогда $\langle g \rangle \subseteq \langle h \rangle$. Действительно, иначе подгруппа $\langle g \rangle$ дополняема в $\langle g \rangle \leftthreetimes \langle h \rangle$, а значит, и в G. Поэтому $\langle g \rangle$ дополняема в G''. Последнее невозможно ввиду утверждения 1 из предложения 1. Значит, группа G примарна и содержит в точности одну подгруппу простого порядка.

Рассмотрим теперь случай, когда $g \notin G''$. В этом случае элемент g в подгруппе $G'' \leftthreetimes \langle g \rangle$ с каждым своим сопряженным порождает подгруппу простого порядка. Действительно, если элемент g с некоторым сопряженным в $G'' \leftthreetimes \langle g \rangle$ порождает подгруппу H непростого порядка, то $H \bigcap G'' \neq 1$. Но подгруппа $H \bigcap G''$ конечнопорождена и не является квазиполной. Следовательно, $\langle g \rangle \trianglelefteq G'' \leftthreetimes \langle g \rangle$ и $G'' \leftthreetimes \langle g \rangle = G'' \times \langle g \rangle$. Тогда произвольная циклическая подгруппа $\langle h \rangle \subseteq G''$ дополняема в $\langle h \rangle \times \langle g \rangle$ и потому в G, а значит, и в G''. Но в таком случае G'' разрешима ступени ≤ 2 [9]. Тогда группа G разрешима, и по теореме 2 вполне факторизуема.

Теорема 3 доказана.

Следствие 7. *Если группа G из класса $\mathfrak{C}$ имеет элемент порядка 2, то она либо вполне факторизуема, либо является локально циклической 2-группой порядка > 2, либо локально кватернионной группой.*

Следствие 7 вытекает из теоремы 3 и утверждения 4 предложения 1

Следствие 8. *Бесконечная группа из класса $\mathfrak{C}$, содержащая элемент простого порядка, вполне факторизуема тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Действительно, произвольная вполне факторизуемая группа финитно аппроксимируема. Пусть бесконечная группа G из класса $\mathfrak{C}$ финитно аппроксимируема. Ввиду своей бесконечности и финитной аппроксимируемости группа G содержит более одной подгруппы простого порядка. Тогда группа G согласно теореме 3 вполне факторизуема.

Следствие доказано.

Следствие 9. *Периодическая локально ступенчатая группа принадлежит классу $\mathfrak{C}$ тогдаи только тогда, когда она либо вполне факторизуема, либо примарна и содержит в точности одну, причем собственную, подгруппу простого порядка.*

Следствие 10. *Периодическая RN-группа принадлежит классу $\mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда она либо вполне факторизуема, либо примарна и содержит в точности одну, причем собственную, подгруппу простого порядка.*

Построенные А. Ю. Ольшанским известные примеры бесконечных простых групп с собственными подгруппами простых порядков (см. [19]) показывают, что класс $\mathfrak{C}$ не исчерпывается группами из теорем $1 - 3$.

В связи с известными примерами А. Ю. Ольшанского не локально конечных примарных групп с единственной подгруппой простого порядка [19] и теоремой 3 естественно возникает следующий вопрос: *исчерпываются ли периодические локально ступенчатые группы с единственной подгруппой простого порядка примарными локально циклическими группами и локально кватернионными группами?*

Напомним следующие два определения, принадлежащие В. П. Шункову.

Для простого числа p p-сопряженно бипримитивно конечной называется группа G, у которой для любой конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H) / H$ два любых сопряженных элемента порядка p (если такие найдутся) порождают конечную подгруппу.

Сопряженно бипримитивно конечной называется группа, которая p-сопряженно бипримитивно конечна по каждому простому p.

Очевидно, произвольная группа без кручения сопряженно бипримитивно конечна. Далее, очевидно, что класс сопряженно бипримитивно конечных групп включает в себя класс 2-групп и класс бинарно конечных групп (т. е. групп, у которых любые два элемента порождают конечную подгруппу).

Предложение 3. *Пусть группа G содержит элементы порядка p и при этом p-сопряженно бипримитивно конечна. Группа G принадлежит классу $\mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда онаили вполне факторизуема, или является локально циклической p-группой, или является локально кватернионной группой.*

Доказательство. Пусть G не вполне факторизуема. В силу теоремы 3 каждая абелева подгруппа группы G является локально циклической p-группой. В частности, группа G сопряженно бипримитивно конечна и удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп. Но произвольная сопряженно бипримитивно конечная группа с условием минимальности для абелевых подгрупп является черниковской [20]. Поэтому произвольная конечная подгруппа группы G либо циклическая, либо группа кватернионов, либо обобщенная группа кватернионов. Следовательно, группа G либо локально кватернионная, либо локально циклическая p-группа.

***Следствие* 11.** *Периодическая сопряженно бипримитивно конечная группа принадлежит классу $\mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда она или вполне факторизуема, или является примарной локально циклической группой, или локально кватернионной группой.*

***Следствие* 12.** *Бинарно конечная группа принадлежит классу $\mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда она или вполне факторизуема, или является примарной локально циклической группой, или локально кватернионной группой.*

1. *Dedekind R.* Über Gruppen, deren sämmtliche Teiler Normalteir sind // Math. Ann. – 1897. – **48.** – S. 548–561.
2. *Baer R.* Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe // S.-B. Heidelberg. Akad. Math.-Nat. Klasse. – 1933. – **2.** – S. 12–17.
3. *Черникова (Баева) Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. – 1953. – **92,** № 5. – С. 877–880.
4. *Черніков М. С.* Групи, в яких інваріантна кожна абелева підгрупа, що не збігається зі своїм нормалізатором // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 11. – С. 977–978.
5. *Черников Н. С.* Группы, в которых инвариантны все абелевы подгруппы, отличные от своих нормализаторов // Теоретико-групповые исследования. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 117–127.
6. *Черников С. Н.* Бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы // Укр. мат. журн. – 1971. – **23,** № 5. – С. 604–628.
7. *Курош А. Г., Черников С. Н.* Разрешимые и нильпотентные группы // Успехи мат. наук. – 1947. – **2,** № 3. – С. 18–59.
8. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
9. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы // Учен. зап. Перм. ун-та. – 1960. – **17,** вып. 2. – С. 25–31.
10. *Miller G., Moreno H.* Nonabelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – **4.** – P. 398–404.
11. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 206 с.
12. *Черников С. Н.* Группы с системами дополняемых подгрупп // Докл. АН СССР. – 1953. – **92,** № 5. – С. 891–894.
13. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups. – Berlin: Springer, 1973. – 229 p.
14. *Шмидт О. Ю.* Бесконечные разрешимые группы // Мат. сб. – 1945. – **17,** № 1. – С. 145–162.
15. *Федоров Ю. Г.* О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс // Успехи мат. наук. – 1951. – **6,** № 1. – С. 187–189.
16. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
17. *Шунков В. П.* Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. – 1970. – **9,** № 4. – С. 484–496.
18. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
19. *Ольшанский А Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. – М.: Наука, 1989. – 300 с.
20. *Сучкова Н. Г., Шунков В. П.* О группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. – 1986. – **25,** № 4. – С. 445–469.

Одержано 15.09.95