УДК 512. 83

Е. Ф. Галба (Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

ВЗВЕШЕННОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И ВЗВЕШЕННОЕ ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ

For a rectangular real matrix, we obtain a decomposition in weighted singular values. On the basis of this decomposition, we obtain a representation of a weighted pseudoinverse matrix in terms of weighted orthogonal matrices and weighted singular values.

Для прямокутної дійсної матриці одержано розклад через зважені сингулярні числа. На основі цього розкладу дано зображення зваженої псевдооберненої матриці через зважені ортогональні матриці і зважені сингулярні числа.

Известно (см., например, [1, 2]), что для любой вещественной прямоугольной матрицы размера $m \times n$ существуют такие две ортогональные матрицы, с помощью которых исходную матрицу можно привести к прямоугольной „диагональной" матрице, а именно, к матрице, состоящей из двух блоков: один из них — диагональная матрица размера $m \times m$ при $m < n$ и размера $n \times n$ при $m > n$, а другой — нулевая матрица, или другими словами такая прямоугольная матрица D, что из $d_{ij} \neq 0 \Rightarrow i = j$. Из полученного соотношения следует формула разложения матрицы по сингулярным числам. А на основании сингулярного разложения матрицы можно получить представление для псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза [2].

В настоящей работе рассматриваются только вещественные матрицы и указанные выше результаты обобщаются с целью использования в соответствующих преобразованиях взвешенных ортогональных матриц. Рассмотрен вопрос приведения прямоугольной матрицы к матрице указанного выше вида с помощью взвешенного ортогонального преобразования. Получено разложение матрицы по взвешенным сингулярным числам. На основании этого разложения матрицы дано представление взвешенной псевдообратной матрицы через взвешенные ортогональные матрицы и взвешенные сингулярные числа. Полученные в работе результаты, связанные со взвешенными сингулярными числами, обобщают соответствующие соотношения, полученные для обычных сингулярных чисел.

Обозначим через T символ транспонирования матрицы, R_H^s — s-мерное векторное пространство над полем действительных чисел со скалярным произведением $(u, v)_H = (Hu, v)$ и нормой $\| u \|_H = (u, u)_H^{1/2}$, где H — симметричная положительно определенная матрица порядка s, $(u, v) = \sum_{i=1}^{s} u_i v_i$.

Определение [3]. *Вещественная матрица P называется симметризуемой, если существует такая симметричная положительно определенная матрица H, что выполняется равенство*

$$P^T H = HP. \tag{1}$$

Матрица H называется матрицей симметризации.

Матрица P, определенная выше, является частным случаем H-симметричных матриц, изучаемых в ряде работ (см., например, [4]), где H предполагается симметричной невырожденной знакоопределенной матрицей.

Квадратную матрицу Q будем называть H-взвешенной ортогональной (ортогональной с весом H), если ее столбцы ортонормальны в R_H, т. е. если выполняется равенство $Q^T H Q = E$, где E — единичная матрица.

Собственные значения симметризуемой матрицы вещественны, а собственные векторы симметризуемой матрицы с матрицей симметризации H, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_H$. В [5] рассмотрен вопрос о приведении симметризуемой матрицы с матрицей симметризации H к диагональной форме с помощью H-взвешенного ортогонального преобразования, а также дано спектральное разложение симметризуемой матрицы.

Пусть A и X — матрицы размеров соответственно $m \times n$ и $n \times m$, B и C — квадратные симметричные положительно определенные матрицы порядков m и n соответственно. Тогда взвешенная псевдообратная матрица для матрицы A определяется (см., например, [6]) как единственная матрица $X = A^+_{BC}$, удовлетворяющая четырем условиям

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (BAX)^T = BAX, \quad (CXA)^T = CXA. \tag{2}$$

Очевидно, что третье и четвертое условия в (2) означают, что матрицы AX и XA симметризуемые с матрицами симметризации B и C соответственно. При $B = C = E$ система матричных уравнений (2) будет определять псевдообратную матрицу Мура–Пенроуза [7].

Перейдем к вопросу о взвешенном сингулярном разложении матриц. Сначала установим некоторые свойства двух симметризуемых матриц.

Лемма. *Пусть A — действительная матрица размера $m \times n$, B и C — симметричные действительные положительно определенные матрицы порядков m и n соответственно. Тогда:*

1) *ранги матриц $C^{-1}A^TBA$, $AC^{-1}A^TB$ и A совпадают, т.е.*

$$\operatorname{rk}(C^{-1}A^TBA) = \operatorname{rk}(AC^{-1}A^TB) = \operatorname{rk}(A);$$

2) *собственные значения матриц $C^{-1}A^TBA$ и $AC^{-1}A^TB$ неотрицательны.*

Доказательство. Поскольку для произвольной действительной матрицы Q $\operatorname{rk}(Q) = \operatorname{rk}(Q^TQ) = \operatorname{rk}(QQ^T)$, а B и C — действительные симметричные положительно определенные матрицы, то легко видеть, что

$$\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(B^{1/2}A) = \operatorname{rk}\{(B^{1/2}A)^T(B^{1/2}A)\} =$$

$$= \operatorname{rk}(A^TBA) = \operatorname{rk}(C^{-1}A^TBA).$$

Аналогично получаем $\operatorname{rk}(AC^{-1}A^TB) = \operatorname{rk}(A)$, т. е. приходим к утверждению первой части леммы.

Утверждение второй части леммы вытекает из того обстоятельства, что каждая из рассматриваемых матриц является произведением симметричных действительных положительно определенной и положительно полуопределенной матриц.

Теорема 1. *Для действительной матрицы A размера $m \times n$ существуют две взвешенные ортогональные матрицы U и V порядков m и n, с весом B и C соответственно такие, что*

$$U^TBAV = D = \begin{cases} \left\| \operatorname{diag}\left(d_1, d_2, \ldots, d_r, \overbrace{O, \ldots, O}^{m-r}\right) O_m^{n-m} \right\|, & \text{если } m \le n; \\ \left\| \begin{matrix} \operatorname{diag}\left(d_1, d_2, \ldots, d_r, \overbrace{O, \ldots, O}^{m-r}\right) \\ O_{m-n}^n \end{matrix} \right\|, & \text{если } m \ge n, \end{cases} \tag{3}$$

и

$$A = UDV^TC, \tag{4}$$

где B *и* C *— произвольные симметричные положительно определенные матрицы порядков* m *и* n *соответственно. Столбцы матриц* U *и* V *— ортонормированные собственные векторы в* R_B^m *и* R_C^n *матриц* $AC^{-1}A^TB$ *и* $C^{-1}A^TBA$ *соответственно, а* d_i *— квадратные корни из собственных значений матриц* $AC^{-1}A^TB$, *если* $m \le n$, *и* $C^{-1}A^TBA$, *если* $m \ge n$, O_k^l *— нулевая матрица размера* $k \times l$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $m \le n$. Обозначим $L = AC^{-1}A^TB$. Согласно лемме собственные значения матрицы L неотрицательны. Обозначим их через d_i^2, где $d_1 \ge d_2 \ge \ldots\ d_m \ge 0$. Так как матрица L симметризуема с матрицей симметризации B, то согласно [5] она может быть приведена к диагональному виду с помощью B-взвешенного ортогонального преобразования, т. е.

$$U^TBLU = D_1^2, \tag{5}$$

где U — ортогональная с весом B матрица, D_1 — диагональная матрица с диагональными элементами $d_{ii} = d_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$, причем количество ненулевых диагональных элементов матрицы D_1 равно рангу матрицы L, а согласно лемме — рангу матрицы A.

Определим матрицу размера $m \times n$:

$$P = U^TBAC^{-1/2}. \tag{6}$$

Тогда в силу (5)

$$PP^T = (U^TBAC^{-1/2})(C^{-1/2}U^TBU) = D_1^2. \tag{7}$$

Следовательно, матрица PP^T является диагональной. При этом i-й диагональный элемент в (7) указывает, что норма $\|\cdot\|_E$ i-й строки p_i матрицы P равна d_i, т.е. $\|p_i\|_E = d_i$, $i = 1, \ldots, m$. Равенство нулю недиагональных элементов в (7) показывает, что различные строки матрицы P ортогональны между собой. Ранг матрицы P согласно лемме равен рангу матрицы A, и если $r < m$, то первые r строк матрицы P — ненулевые попарно ортогональные векторы $p_1, \ldots, p_r$, а остальные строки $p_{r+1}, \ldots, p_m$ являются нулевыми векторами.

Построим взвешенную ортонормальную систему векторов-строк $v_1, \ldots, v_n$. Обозначим

$$v_i = d_i^{-1}p_iC^{-1/2}, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{8}$$

Тогда в силу определения нормы вектора в R_C^n и равенства $\|p_i\|_E = d_i$ получаем $\|v_i\|_C = 1$, $i = 1, \ldots, r$. Для $i = r+1, \ldots, n$ выберем в качестве v_i такие векторы с единичной нормой, чтобы векторы $v_1, \ldots, v_n$ были взаимно ортонормальны в R_C^n. Такой процесс построения ортонормального базиса в R_C можно провести аналогично тому, как это делается при построении ортонормального базиса в R_E (см., например, [8]).

Пусть V^T — матрица, строками которой являются векторы $v_1, \ldots, v_n$. Тогда ортонормальность в R_C^n векторов $\{v_i\}$ означает, что V является C-взвешенной ортогональной матрицей, т. е. $V^TCV=E$. Из (8) имеем $p_i = d_i v_i C^{1/2}$ и матрицу P можно представить в виде

$$P = DV^TC^{1/2}, \tag{9}$$

где D — матрица размера $m \times n$ вида $D = \| D_1 O \|$.

Из (6) и (9) получаем $U^TBAC^{-1/2} = DV^TC^{1/2}$; откуда следует $U^TBAV=D$, а на основании определения взвешенных ортогональных матриц U и V из этого равенства получим $A=UDV^TC$. Теперь для доказательства утверждения теоремы 1 при $m \le n$ осталось показать, что столбцы C-взвешенной ортогональной матрицы V являются собственными векторами матрицы $C^{-1}A^TBA$.

Из равенства $A=UDV^TC$ вытекает

$$C^{-1}A^TBA = C^{-1}CVD^TU^TBUDV^TC = VD_2^2V^TC,$$

где

$$D_2^2 = \operatorname{diag}\left(d_1^2, \ldots, d_r^2, \overbrace{O, \ldots, O}^{n-r}\right)$$

— диагональная матрица порядка n.

Согласно [9] ненулевые собственные значения матриц $AC^{-1}A^TB$ и $C^{-1}A^TBA$ совпадают, так как эти матрицы получены в результате перестановки матриц-сомножителей, в силу чего диагональные элементы матрицы D_2^2 являются собственными значениями матрицы $C^{-1}A^TBA$.

После умножения последнего равенства справа на V получим

$$C^{-1}A^TBAV = VD_2^2,$$

откуда и следует, что столбцы матрицы V являются собственными векторами матрицы $C^{-1}A^TBA$.

Чтобы убедиться в справедливости равенства (3) для матрицы A при $n \le m$, достаточно рассмотреть это соотношение при $m \le n$ для матрицы A^T, после чего транспонировать обе части полученного матричного равенства.

Теорема доказана.

Замечание. При $m=n$ собственные значения матриц $AC^{-1}A^TB$ и $C^{-1}A^TBA$ согласно [9] совпадают как собственные значения квадратных матриц, полученных в результате перестановки матриц-сомножителей.

Разложение вида (4) будем называть взвешенным сингулярным разложением (разложением по взвешенным сингулярным числам) матрицы в отличие от сингулярного разложения [2], которое является его частным случаем при $B=C=E$. Квадратные корни из собственных значений матриц $AC^{-1}A^TB$ и $C^{-1}A^TBA$ назовем взвешенными сингулярными числами.

Из взвешенного сингулярного разложения матрицы, определенного формулой (4), следует взвешенное спектральное разложение симметризуемой матрицы [5].

Действительно, пусть в теореме 1 A — симметризуемая матрица порядка m с матрицей симметризации H. Положим в (4) $B = C = H$. Нетрудно видеть, что из формулы (1) следует $H^{-1}P^T = PH^{-1}$. В силу этого равенства и равенства (1) имеем $C^{-1}A^TBA = AC^{-1}A^TB = A^2$, так что для рассматриваемого случая $U = V = Q$ и $D = \Lambda$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, λ_i — собственные значения матрицы A, Q — ортогональная с весом H матрица, столбцы которой состоят из ортонормированных в R_H^m собственных векторов матрицы A.

Отметим, что из взвешенного спектрального разложения симметризуемой матрицы [5] очевидным образом следует спектральное разложение симметричной матрицы [3].

Таким образом, из взвешенного сингулярного разложения матрицы следует обычное сингулярное разложение матрицы, взвешенное спектральное разложение симметризуемой матрицы и спектральное разложение симметричной матрицы.

Пусть D_{EE}^+ — „диагональная" матрица размера $n \times m$ с ненулевыми элементами $d_{ii}^+ = d_i$, $i = 1, \ldots, r$, где $d_i^+ = 1 / d_i$, а d_i определены в теореме 1.

Непосредственной проверкой условий (2) при $B = C = E$ нетрудно убедиться, что матрица D_{EE}^+ является псевдообратной матрицей Мура – Пенроуза к матрице D.

Теорема 2. *Взвешенная псевдообратная матрица для матрицы A определяется формулой*

$$A_{BC}^+ = VD_{EE}^+U^TB,$$

где матрицы A, B, C, U, V определены в теореме 1.

Для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение условий (2) для матрицы A_{BC}^+, используя свойства взвешенных ортогональных матриц U и V и псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза D_{EE}^+.

Таким образом, взвешенное сингулярное разложение матрицы позволяет вычислить взвешенную псевдообратную к ней матрицу. Для этого необходимо разработать устойчивую процедуру определения взвешенных сингулярных чисел и собственных векторов матриц $AC^{-1}A^TB$ и $C^{-1}A^TBA$. Отметим, что созданию устойчивой процедуры для вычисления обычных сингулярных чисел посвящено много работ (см., например, [10, 11]).

1. *Форсайт Дж., Молер К.* Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. – М.: Мир, 1969. – 168 с.
2. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
4. *Икрамов Х. Д.* Задачи линейной алгебры с обобщенными симметриями и численные алгоритмы их решения: Дисс … д-ра физ.-мат. наук. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 361 с.
5. *Молчанов И. Н., Галба Е. Ф.* Взвешенное псевдообращение матриц с положительно определенными весами // Докл. АН УССР. Сер. А. – !989. – № 7. – С. 15–17.
6. *Ward J. F., Boullion T. L., Lewis T. O.* A note on the oblique matrix pseudoinverse // SIAM J. Appl. Math. – 1971. – **20**, № 2. – P. 173–175.
7. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1955. – **51**, № 3. – P. 406–413.
8. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1975. – 408 с.
9. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1977. – 564 с.
10. *Golub G. H., Kahan W.* Calculating the singular values and pseudoinverse of a matrix // SIAM J. Numer. Anal. Ser. B. – 1965. – **2**, № 3. – P. 205–224.
11. *Golub G. H., Reinsch C.* Singular value decomposition and least squares solutions // Numer. Math. – 1970. – **14**. – P. 403–420.

Одержано 14.07.95