УДК 513.83

Л. П. Плахта (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ОБМЕЖЕННЯ НА ВІЛЬНІ ДІЇ ЗНАКОЗМІННОЇ ГРУПИ A_6 НА ДОБУТКАХ СФЕР

It is proved that the alternating group A_6 cannot freely act on $(S^n)^5$. We give an example of free action of the alternating group A_4 on $(S^n)^3$.

Доведено, що знакозмінна група A_6 не може діяти вільно на $(S^n)^5$. Наведено приклад вільної дії групи A_4 на $(S^n)^3$.

П. Коннер [1] показав, що максимальний ранг скінченної групи, яка вільно діє на скінченному CW-комплексі X з когомологіями $H^*(X, \mathbb{Z}) \cong H^*(S^n \times S^n, \mathbb{Z})$, не більший, ніж 2 (тут і надалі S^n позначає стандартну n-вимірну сферу). Інтерес до дій знакозмінних груп на добутках сфер виник у зв'язку з працею Р. Олівера [2]. Він встановив, зокрема, що не існує вільної дії знакозмінної групи A_4 на скінченновимірному CW-комплексі X з когомологіями $H^*(X, \mathbb{Z}) \cong H^*(S^n \times S^n, \mathbb{Z})$. З останнього випливає, що обернене до теореми Коннера твердження не виконується. Ми побудуємо приклад вільної дії групи A_4 на $(S^n)^3 = S^n \times S^n \times S^n$.

В даній праці використовуються стандартні позначення: $\mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел, $\mathbb{Q}$ — поле раціональних чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел і $\mathbb{F}_p$ — поле лишків за модулем простого числа p.

Нехай M — модуль над груповим кільцем ΛG. Будемо говорити, що M — G-модуль, якщо кільце Λ зафіксовано. Ми не будемо розрізняти $\mathbb{Z}G$-модуль M і цілочисельне зображення групи G в $\mathbb{Z}$-модулі M (аналогічно ΛG-модуль M і зображення групи G в Λ-модулі M). Якщо H — підгрупа групи G, а M — G-модуль, то M є одночасно H-модулем, який позначається $\mathrm{res}_H^G M$.

Той факт, що простори X і Y мають ізоморфні кільця когомологій з коефіцієнтами в $\mathbb{Z}$ (відповідно в $\mathbb{F}_p$), позначається $X \sim Y$ (відповідно $X \sim_p Y$). Р. Олівер показав також [2] (теорема 1), що група A_4 не може діяти вільно на скінченновимірному просторі X, $X \sim_2 (S^n)^k$, з тривіальною дією в когомологіях $H^*(X, \mathbb{F}_2)$. З останнього факту і з результату А. Адема [3] (теорема 4.7) випливає, що не існує вільної дії знакозмінної групи A_5 на скінченновимірному CW-комплексі X з $X \sim (S^n)^4$. Основним результатом даної праці є така теорема.

Теорема 1. *Не існує вільної дії знакозмінної групи A_6 на скінченновимірному CW-комплексі X, де $X \sim (S^n)^5$.*

Дану теорему можна вважати розширенням відміченого вище результату Р. Олівера на знакозмінну групу A_6. Доведення теореми суттєво використовує теорію зображень групи A_6 над $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{C}$.

Наступне твердження безпосередньо випливає з теорії зображень знакозмінних A_n та симетричних Σ_n, $n \geq 1$, груп над полем характеристики 0 (див. [4, 5]).

Твердження. *Існує рівно два неізоморфних нетривіальних зображення знакозмінної групи A_6 над полем $\mathbb{C}$ характеристики 0, виміру 5:* $\varphi = \mathrm{res}_{A_6}^{\Sigma_6} \varphi'$,

$\psi = \operatorname{res}_{A_6}^{\Sigma_6} \psi'$, *де* φ' — *незвідне зображення групи* Σ_6 *над полем* $\mathbb{C}$, *яке відповідає розбиттю* $6 = 3 + 3$ *числа* 6, *а* ψ' — *незвідне зображення групи* Σ_6 *над полем* $\mathbb{C}$, *яке відповідає розбиттю* $6 = 5 + 1$ *числа* 6.

Цілочисельні зображення групи $\mathbb{Z} \mid p$, де p — просте число, повністю описані теоремою Дідеріхсена – Райнера [6], яка стверджує, що існує скінченне число ізоморфних класів нерозкладних цілочисельних $\mathbb{Z} \mid p$-модулів, які можна розбити на три різні типи:

1) $\mathbb{Z}$, тривіальний $\mathbb{Z} \mid p$-модуль;

2) $\mathbb{Z} \mid p$-модулі $\mathcal{A}_i$, що асоціюються з елементами класу ідеалів поля $\mathbb{Q}(\theta)$, $\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}_i = p - 1$, де θ — первісний корінь p-го степеня з 1;

3) проективні модулі P_i, $\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} P_i = p$, причому кожному модулю $\mathcal{A}_i$ відповідає рівно один модуль P_i.

Більш того, кожне цілочисельне зображення групи $\mathbb{Z} \mid p$ однозначно зображується у вигляді прямої суми $\mathbb{Z} \mid p$-модулів типів $1 - 3$.

Означення. *Будемо говорити, що* $\mathbb{Z} \mid p$-*модуль* M *має тип* (r, s, t), *якщо* $M \cong (\oplus^r \mathcal{A}_i) \oplus (\oplus^s P_i) \oplus (\oplus^t \mathbb{Z})$.

Якщо G — група і $g \in G$, то через $\langle g \rangle$ позначимо циклічну підгрупу групи G, яка породжується елементом g.

Доведення теореми. Нехай X — скінченновимірний CW-комплекс, $X \sim \sim (S^n)^5$, на якому задана дія групи A_6. Індукована дія групи A_6 на модулі $H^n(X, \mathbb{Z})$, $H^n(X, \mathbb{Z}) \cong H^n((S^n)^5, \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z})^5$, задає в $H^n(X, \mathbb{Z})$ структуру A_6-модуля. Згідно з твердженням цілочисельне зображення групи A_6 в $H^n(X, \mathbb{Z})$ є або тривіальним, або ізоморфним над $\mathbb{C}$ одному із зображень φ, ψ. Позначимо це зображення через L. Якщо L — тривіальне зображення, то з теореми 1 Олівера [2, с. 542] випливає, що дія групи A_6 на X не є вільною. Припустимо, що L — нетривіальне зображення. Розглянемо два випадки:

а) $L \cong \varphi$ над $\mathbb{C}$. Розглянемо елементи $h = (134)(265)$ і $g = (14235)$ знакозмінної групи A_6. Нехай $B' = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ — стандартна база модуля Шпехта (асоційованого із зображенням φ), породжена політаблоїдами [4]. Матриця оператора φ_h відносно бази $B_1 = \{f_1, f_2 - f_3, -f_5, f_4 - f_5, f_4 - f_2\}$ має вигляд

$$\varphi_h^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

З (1) випливає, що $\mathbb{Z} \mid 3$-модулі $\operatorname{res}_{\langle h \rangle}^{A_6} \varphi$ і $P_3 \oplus (\mathbb{Z})^2$ ізоморфні над $\mathbb{Z}$. Далі, матриця оператора φ_g відносно бази $B_2 = \{f_1 - f_2, f_2, f_3 - f_2, f_4 - f_5, f_5\}$ має такий вигляд:

$$\varphi_g^{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

З (2) випливає, що $\mathbb{Z}\,|\,5$-модуль $\operatorname{res}_{\langle g\rangle}^{A_6}\varphi$ ізоморфний над $\mathbb{Z}$ проективному модулю P_5. Нехай A — матриця переходу від B_1 до B_2. Маємо

$$\varphi_h^{B_2} = A^{-1}\varphi_h^{B_1}A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Далі, за припущенням $\operatorname{res}_{\langle g\rangle}^{A_6}L$ і $\operatorname{res}_{\langle g\rangle}^{A_6}\varphi$ — еквівалентні над $\mathbb{C}$ і $\mathbb{Q}$ цілочисельні зображення групи $\langle g\rangle \cong \mathbb{Z}\,|\,5$. З теореми Дідеріхсена – Райнера [6] випливає, що виконується одна з наступних умов:

1) $\operatorname{res}_{\langle g\rangle}^{A_6}L \cong P_5$ як $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}\,|\,5]$-модулі;
2) $\operatorname{res}_{\langle g\rangle}^{A_6}L \cong \mathcal{A}_5 \oplus \mathbb{Z}$ як $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}\,|\,5]$-модулі.

Зауважимо, що при $p < 23$ будь-який проективний $\mathbb{Z}\,|\,p$-модуль є вільним [7]. Припустимо, що виконується умова 2. Із наведеного вище зауваження і з теореми Дідеріхсена – Райнера випливає, що існує тільки один $\mathbb{Z}\,|\,5$-модуль типу $\mathcal{A}_5$ рангу 4, який, власне, відповідає вільному $\mathbb{Z}\,|\,5$-модулю P_5, $\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}_5 = 4$. Такий модуль $\mathcal{A}_5$ задається у відповідній базі матрицею

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Отже, існує $\mathbb{Z}$-база B модуля $H^n(X, \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z})^5$, в якій оператор $\operatorname{res}_{\langle g\rangle}^{A_6}L$ задається матрицею

$$D = \left[\begin{array}{c:c} D_1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right].$$

Оскільки φ і L — еквівалентні зображення групи A_6 над $\mathbb{C}$, то існує така невироджена матриця $T = \| t_{ij} \|$, що $T\varphi^{B_2}T^{-1} = L^B$. Нехай $T^{-1} = \| t'_{ij} \|$. Із співвідношень $T\varphi_g^{B_2}T^{-1} = D$ і (3) випливає, що існують такі τ, ε, для яких виконуються рівності

$$t_{51} = \ldots = t_{55} = \varepsilon, \quad t'_{15} = \ldots = t'_{55} = \tau, \quad 5\varepsilon\tau = 1.$$

Маємо $L_h^B = T\varphi_h^{B_2}T^{-1}$ і елемент a_{55} матриці L_h^B дорівнює

$$(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)\varphi_h^{B_2}\begin{bmatrix}\tau \\ \vdots \\ \tau\end{bmatrix} = (\varepsilon, -2\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, -2\varepsilon)\begin{bmatrix}\tau \\ \vdots \\ \tau\end{bmatrix} = -\frac{1}{5}.$$

Останнє суперечить тому, що $L_{\langle h\rangle}$ — цілочисельне зображення групи $\langle h\rangle \cong \mathbb{Z}\,|\,3$. Отримана суперечність показує, що для $\mathbb{Z}\,|\,5$-модуля $\operatorname{res}_{\langle g\rangle}^{A_6}L$ виконується умова 1. Тоді $\operatorname{res}_{\langle g\rangle}^{A_6}L$ має тип $(0, 1, 0)$. З теореми 4.5 Адема [3] випливає, що множина X^g не є порожньою, тобто дія групи A_6 не є вільною на X.

б) $L \cong \psi$ над $\mathbb{C}$. Аналогічно попередньому випадку доводиться, що $\mathbb{Z}|5$-модуль $\operatorname{res}^{A_6}_{\langle g \rangle} L$ має тип $(0, 1, 0)$, де $g = (14235)$. Тоді з теореми 4.5 Адема [3] випливає, що $X^g \neq \varnothing$, і, отже, дія групи A_6 на X не є вільною.

Приклад. Знакозмінна група A_4 задається кодом $A_4 = \langle R^2 = V^3 = (RV)^3 = = 1 \rangle$, або точним розширенням груп

$$1 \to \mathbb{Z}|2 \times \mathbb{Z}|2 \xrightarrow{j} A_4 \xrightarrow{k} \mathbb{Z}|3 \to 1. \tag{4}$$

Нехай g, h — твірні групи $\mathbb{Z}|2 \times \mathbb{Z}|2$, u — твірна групи $\mathbb{Z}|3$. Нехай $S^3 = = \{ z \in H \,|\, |z| = 1 \}$, де H — тіло кватерніонів. Покладемо

$$g(x, y) = (-x, y), \quad h(x, y) = (-x, -y), \quad u(x, y) = (y, y^{-1}x^{-1}), \quad (x, y) \in S^3 \times S^3. \tag{5}$$

Легко перевірити, що формули (5) задають дію групи A_4 на $S^3 \times S^3$. Підгрупа $\mathbb{Z}|2 \times \mathbb{Z}|2$ групи A_4 діє вільно на $S^3 \times S^3$ (в той час як $(S^3 \times S^3)^{\mathbb{Z}/3} = = S^3 + \{\text{точка}\}$). Задамо на сфері S^3 стандартну вільну дію групи $\mathbb{Z}|3$ формулою

$$u(z_1, z_2) = (z_1 \exp(2\pi i/3), z_2 \exp(2\pi i/3)), \quad (z_1, z_2) \in S^3 \subseteq \mathbb{C}^2.$$

Така дія групи $\mathbb{Z}|3$ продовжується до дії групи A_4 на S^3 за допомогою епіморфізму $k: A_4 \to \mathbb{Z}|3$ з (4). Добуток дії (5) групи A_4 на $S^3 \times S^3$ і дії групи A_4 на S^3 задає вільну дію групи A_4 на $S^3 \times S^3 \times S^3$. Зауважимо, що A_4-модуль $H^3(X, \mathbb{Z})$ не є тривіальним, $\operatorname{res}^{A_4}_{\mathbb{Z}|3} H^3(X, \mathbb{Z}) \cong \mathcal{A}_3 \oplus \mathbb{Z}$.

1. *Conner P.* On the action of finite group on $S^n \times S^n$ // Ann. Math. – 1957. – **66**. – P. 686–688.
2. *Oliver R.* Free compact group actions on products of spheres // Lect. Notes Math.: Proc. … 1978 Aargus Topol. Conf. – New York: Springer, 1979. – **763**. – P. 539–548.
3. *Adem A.* $\mathbb{Z}|p$ $\mathbb{Z}$-actions on $(S^n)^k$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1987. –**300**, № 2. – P. 789–809.
4. *Джеймс Г.* Теория представлений симметрических групп. Математика. Новое в зарубежной науке. – М.: Мир, 1982. – 214 с.
5. *Мурнаган Ф. Д.* Теория представлений групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1950. – 485 с.
6. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М.: Наука, 1969. – 668 с.
7. *Милнор Дж.* Введение в алгебраическую K-теорию. – М.: Мир, 1974. – 197 с.

Одержано 28.02.95