УДК 512.64

В. М. Прокіп (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ПРО ФАКТОРИЗАЦІЮ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ НАД ОБЛАСТЮ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

We consider the problem of decomposition of polynomial matrices over the domain of principal ideals into a product of factors of lower degree with given characteristic polynomials. We establish necessary and, under certain restrictions, sufficient conditions of the existence of such a factorization.

Розглядається задача про розкладання многочленних матриць над областю головних ідеалів у вигляді добутку множників менших степенів з наперед заданими характеристичними многочленами. Одержано необхідні, а при деяких обмеженнях і достатні умови існування шуканої факторизації.

Нехай R — область головних ідеалів, тобто R — комутативне кільце з одиницею без дільників нуля, в якому кожен ідеал є головним. Введемо позначення: e — одиничний, o — нульовий елементи кільця R; $R[x]$ — кільце многочленів над R; R_n і $R_n[x]$ — кільця матриць розміру $n \times n$ над R і $R[x]$ відповідно. Розглянемо матрицю $A(x) \in R_n[x]$. Очевидно, що $A(x)$ можна записати у вигляді $A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s$, $A_i \in R_n$, $i = 0, 1, \ldots, s$ $(\deg A(x) = s \geq 1)$. Якщо $A_0 = I$ — одинична матриця розміру $n \times n$ над R, то многочленну матрицю $A(x)$ будемо називати унітальною. Якщо $A(x)$ — неособлива матриця $(\det A(x) \not\equiv 0)$, то через $a(x) = \det A(x)$ позначатимемо визначник матриці $A(x)$, який надалі називатимемо характеристичним многочленом матриці $A(x)$.

У даній роботі досліджується задача про зображення неособливої матриці $A(x) \in R_n[x]$ $(\det A(x) \not\equiv \mathrm{const})$. у вигляді

$$A(x) = B(x)C(x), \tag{1}$$

де $B(x) = Ix^r - B_1 x^{r-1} - \ldots - B_r$, $B_i \in R_n$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $(1 \leq r)$, і $\det B(x) = b(x) = x^{nr} + b_1 x^{nr-1} + \ldots + b_{nr}$. Перейшовши до визначників в обох частинах рівності (1), одержимо

$$a(x) = b(x)c(x). \tag{2}$$

Пошук розкладів матриці $A(x)$ у вигляді (1) розчленуємо на частини, шукаючи спочатку розклади її характеристичного многочлена $a(x)$ у вигляді (2), а потім ті розклади $A(x)$ у вигляді (1), які відповідають фіксованому розкладові (2). У зв'язку з цим у роботі вказано необхідні, а при деяких обмеженнях і достатні умови існування лівого унітального дільника $B(x)$ із заданим характеристичним многочленом $b(x)$ матриці $A(x)$ та запропоновано застосування одержаних результатів.

У випадку, коли R — поле, така задача розглядалась у роботах [1 – 4].

Нехай $b(x) = x^{nr} + b_1 x^{nr-1} + \ldots + b_{nr}$, $b(x) \in R[x]$, — дільник характеристичного многочлена $a(x)$ неособливої матриці

$$A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s, \quad A_i \in R_n, \quad i = 0, 1, \ldots, s.$$

Матрицям $A(x)$ та $Ib(x)$ поставимо у відповідність матриці

$$
M(A,b) = \left\| \begin{array}{cccccccc}
A_0 & A_1 & \dots & A_{s-1} & A_s & & & \\
 & A_0 & A_1 & \dots & A_{s-1} & A_s & & \\
\hline
 & & & A_0 & A_1 & \dots & A_{s-1} & A_s \\
I & Ib_1 & \dots & Ib_{nr-1} & Ib_{nr} & & & \\
 & I & Ib_1 & \dots & Ib_{nr-1} & Ib_{nr} & & \\
\hline
 & & I & Ib_1 & \dots & Ib_{nr-1} & & Ib_{nr}
\end{array} \right\| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} A \\ A \\ A \end{array}}\right\} (n-1)r \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} A \\ A \\ A \end{array}}\right\} s-r \end{array},
$$

$$
N(A,b) = \| A_0 b_1 - A_1 \dots A_0 b_s - A_s \dots A_0 b_{s+1} \dots A_0 b_{nr} \underbrace{O \dots O}_{t} \|,
$$

$$
K(A,b) = \left\| \begin{matrix} M(A,b) \\ N(A,b) \end{matrix} \right\|,
$$

де O — нульова, I — одинична розміру $n \times n$ матриці і $t = nr + s - r - \max(s, nr)$.

Лема 1. *Нехай* $b(x) = x^{nr} + b_1 x^{nr-1} + b_2 x^{nr-2} + \dots + b_{nr}$ $(b(x) \in R[x])$ — *дільник характеристичного многочлена неособливої матриці* $A(x) \in R_n[x]$ $(\deg A(x) = s)$, *тобто* $a(x) = b(x)c(x)$. *Відповідні інваріантні множники матриць* $M(A, b)$ *і* $K(A, b)$ *асоційовані тоді і тільки тоді, коли існують многочленні матриці*

$$
D(x) = Ix^{(n-1)r} + D_1 x^{(n-1)r-1} + \dots + D_{(n-1)r}
$$

та

$$
C(x) = A_0 x^{s-r} + C_1 x^{s-r-1} + \dots + C_{s-r}, \quad D_i, \quad C_j \in R_n,
$$
$$
j = 1, 2, \dots, s-r; \quad i = 1, 2, \dots, (n-1)r;
$$

такі, що $D(x)A(x) = b(x)C(x)$.

Доведення. *Достатність.* Якщо відповідні інваріантні множники матриць $M(A, b)$ і $K(A, b)$ асоційовані, то рівняння $ZM(A, b) = N(A, b)$ розв'язне. Нехай $Z_0 = \| D_1 D_2 \dots D_{(n-1)r} - C_1 - C_2 \dots - C_{s-r} \|$, D_i, $C_j \in R_n$, $i = 1, 2, \dots, (n-1)r$; $j = 1, 2, \dots, s-r$, — розв'язок цього рівняння, тобто $Z_0 M(A, b) = N(A, b)$. Остання рівність еквівалентна системі рівностей

$$
\sum_{j+i=k} D_j A_i - \sum_{l+t=k} b_l C_t = A_0 b_k - A_k, \tag{3}
$$

де $k = 1, 2, \dots, nr + s - r$, $j = 1, 2, \dots, (n-1)r$; $i = 0, 1, \dots, s$; $l = 0, 1, \dots, nr$; $t = 1, 2, \dots, s-r$, причому $b_0 = e$ і $b_k = o$, якщо $k > nr$, а $A_k = O$, якщо $k > s$. Якщо покладемо $C_0 = A_0$, $D_0 = I$, то система (3) разом з тотожністю $A_0 = A_0$ буде рівносильна системі рівностей

$$
\sum_{j+i=k-1} D_j A_i = \sum_{l+t=k-1} b_l C_t, \quad k = 1, 2, \dots, nr + s - r + 1, \tag{4}
$$
$$
j = 0, 1, \dots, (n-1)r; \quad i = 0, 1, \dots, s; \quad l = 0, 1, \dots, nr; \quad t = 1, 2, \dots, s-r.
$$

Помноживши обидві частини кожної k-ї рівності з (3) на $x^{nr+s-r+1-k}$, $k = 1, 2, \dots, nr + s - r + 1$, і додавши відповідно ліві та праві частини одержаних рівностей, дістанемо

$$\sum_{k=1}^{nr+s-r+1} \sum_{j+i=k-1} D_j A_i x^{nr+s-r+1-k} = \sum_{k=1}^{nr+s-r+1} \sum_{l+t=k-1} b_l C_t x^{nr+s-r+1-k},$$

$$k = 1, 2, \ldots, nr+s-r+1, \quad j = 0, 1, \ldots, (n-1)r;$$

$$i = 0, 1, \ldots, s; \quad l = 0, 1, \ldots, nr; \quad t = 0, 1, \ldots, s-r.$$

Після нескладних перетворень в лівій та правій частинах останньої рівності дістанемо $D(x)A(x) = b(x)C(x)$, де $C(x) = A_0 x^{s-r} + C_1 x^{s-r-1} + \ldots + C_{s-r}$ і $D(x) = Ix^{(n-1)r} + D_1 x^{(n-1)r-1} + \ldots + D_{(n-1)r}$. Достатність доведена.

Необхідність. Нехай для многочленних матриць $D(x)$ та $C(x)$ виконується рівність $D(x)A(x) = b(x)C(x)$. Перемноживши ліву та праву частини останньої рівності та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівностей (4), з якої знайдемо систему рівностей (3). Оскільки система (3) еквівалентна рівності $Z_0 M(A, b) = N(A, b)$, то з останньої випливає, що відповідні інваріантні множники матриць $M(A, b)$ і $K(A, b)$ асоційовані, що і доводить необхідність. Лема доведена.

Наслідок. *Нехай унітальна матриця $B(x) \in R_n[x]$ степеня r з характеристичним многочленом $\det B(x) = b(x)$ — лівий дільник матриці $A(x) \in R_n[x]$ степеня s, тобто $A(x) = B(x)C(x)$. Тоді відповідні інваріантні множники матриць $M(A, b)$ і $K(A, b)$ асоційовані.*

Доведення. Оскільки $A(x) = B(x)C(x)$ і $B(x)$ — унітальна матриця степеня r, то очевидно, що $C(x) = A_0 x^{s-r} + C_1 x^{s-r-1} + \ldots + C_{s-r}$. Нехай $B^*(x) = Ix^{(n-1)r} + D_1 x^{(n-1)r-1} + \ldots + D_{(n-1)r}$ — взаємна матриця до матриці $B(x)$. Оскільки $B^*(x)B(x) = Ib(x)$, то, помноживши обидві частини рівності $A(x) = B(x)C(x)$ зліва на $B^*(x)$, знаходимо $B^*(x)A(x) = b(x)C(x)$. На основі леми 1 відповідні інваріантні множники матриць $M(A, b)$ і $K(A, b)$ асоційовані. Наслідок доведений.

Лема 2. *Нехай H, P, Q — неособливі матриці розміру $n \times n$ над факторіальною областю F. Нехай, далі, $f = (\det H, \det Q)$ — н. с. д. визначників матриць H і Q. Якщо добуток матриць H і P ділиться справа на матрицю Q, тобто $HP = SQ$, то матриця fP ділиться справа на Q, тобто $fP = KQ$.*

Доведення. Нехай $\det H = h$, $\det Q = q$, а H^* та Q^* — взаємні матриці до матриць H та Q відповідно. Помноживши обиді частини рівності $HP = SQ$ зліва на H^*, а справа на Q^*, одержимо

$$hPQ^* = H^* S q. \tag{5}$$

Оскільки $h = h_1 f$, $q = q_1 f$ і $(h_1, q_1) = e$, то з рівності (5) отримуємо $h_1 PQ^* = q_1 H^* S$. Звідси випливає, що всі елементи матриці PQ^* діляться на q_1, тобто $PQ^* = Kq_1$, або $fPQ^* = fKq$. Враховуючи, що $Q^*Q = QQ^* = q_1 f$, останню рівність запишемо тепер так: $fPQ^* = KQQ^*$. Звідси випливає $fP = KQ$, що і доводить лему.

Теорема. *Нехай $b(x) = x^{nr} + b_1 x^{nr-1} + b_2 x^{nr-2} + \ldots + b_{nr}$ ($b(x) \in R[x]$) — дільник характеристичного многочлена $a(x)$ неособливої матриці $A(x) \in R_n[x]$, ($\deg A(x) = s$), тобто $a(x) = b(x)c(x)$ і $(b(x), c(x)) = e$ ($b(x)$ та $c(x)$ взаємно прості). Для матриці $A(x)$ існує лівий унітальний дільник $B(x) \in R_n[x]$ степеня r з характеристичним многочленом $\det B(x) = b(x)$ тоді і тільки тоді, коли відповідні інваріантні множники $M(A, b)$ і $K(A, b)$*

асоційовані. Якщо ж шуканий дільник $B(x)$ існує, то він однозначно визначається своїм характеристичним многочленом $b(x)$.

Доведення. Необхідність випливає з наслідку.

Достатність. Оскільки відповідні інваріантні множники матриць $M(A, b)$ і $K(A, b)$ асоційовані, то за лемою 1 існують матриці $D(x)$, $C(x) \in R_n[x]$, $(D(x) = Ix^{(n-1)r} + D_1 x^{(n-1)r-1} + \ldots + D_{(n-1)r}$, $C(x) = A_0 x^{s-r} + C_1 x^{s-r-1} + \ldots + C_{s-r})$, такі, що

$$D(x)A(x) = b(x)C(x). \tag{6}$$

Переходячи до визначників в обох частинах рівності (6), знаходимо $\det D(x) b(x) c(x) = b^n(x) \det C(x)$, або $\det D(x) c(x) = b^{n-1}(x) \det C(x)$. Оскільки $(b(x), c(x)) = e$, то з останньої рівності одержуємо $\det D(x) = b^{n-1}(x) d(x)$. Оскільки $D(x)$ — унітальна многочленна матриця степеня $(n-1)r$ і $\deg \det D(x) = \deg b^{n-1}(x) = (n-1)nr$, то очевидно, що $d(x) = e$. Отже, $\det D(x) = b^{n-1}(x)$, $\det C(x) = c(x)$. Застосовуючи тепер лему 2 до рівності (6), дістаємо $D(x)A(x) = D(x)B(x)C(x)$ і $D(x)B(x) = Ib(x)$. З останніх двох рівностей випливає, що $B(x)$ — унітальна матриця степеня r з характеристичним многочленом $\det B(x) = b(x)$ — лівий дільник матриці $A(x)$, тобто $A(x) = B(x)C(x)$. Достатність доведена.

Покажемо, якщо при умовах теореми для матриці $A(x)$ шуканий дільник існує, то він однозначно визначається своїм характеристичним многочленом $b(x)$. Нехай $B(x)$, $B_1(x) \in R_n[x]$ — ліві унітальні дільники степеня r з характеристичним многочленом $b(x)$ матриці $A(x)$, тобто $A(x) = B(x)C(x) = B_1(x)C_1(x)$ $(B(x) \neq B_1(x))$. Оскільки $B(x)$ та $B_1(x)$ — унітальні многочленні матриці степеня r і $(\det B_1(x), \det C(x)) = e$, то з останньої рівності на основі леми 1 одержуємо $B_1(x) = B(x)$, тобто матриця $B(x)$ однозначно визначається своїм характеристичним многочленом $b(x)$. Теорема доведена.

Відзначимо, що з доведення достатності теореми випливає метод побудови шуканого дільника.

***Зауваження* 1.** Доведену вище теорему можна безпосередньо застосувати до факторизації многочленних матриць $A(x, y) \in P_n[x, y]$ від змінних x та y над полем P, оскільки матрицю $A(x, y)$ можна розглядати як матрицю від x над областю головних ідеалів $P_n[y]$, тобто $A(x, y) = A_0(y)x^s + A_1(y)x^{s-1} + \ldots + A_s(y)$, $A_i(y) \in P_n[y]$, $i = 0, 1, \ldots, s$.

***Зауваження* 2.** Матриця $D \in R_n$ — розв'язок матричного рівняння

$$X^s A_0 + X^{s-1} A_1 + \ldots + X A_{s-1} + A_s = 0, \quad A_i \in R_n, \quad i = 0, 1, \ldots, s, \tag{7}$$

над областю головних ідеалів R тоді і тільки тоді, коли для матриці $A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s$, $A_i \in R_n$, $i = 0, 1, \ldots, s$, існує факторизація $A(x) = (Ix - D)B(x)$. Отже, теорема дає умови розв'язності матричного рівняння (7).

Використовуючи дану теорему та лему 2, легко довести наступне.

***Зауваження* 3.** Нехай характеристичний многочлен $a(x)$ неособливої матриці $A(x) \in R_n[x]$ $(\deg A(x) = s)$ зображений у вигляді $a(x) = b_1(x) b_2(x) \ldots b_k(x) b_{k+1}(x)$, де $b_i(x) \in R[x]$ — унітальні многочлени степеня nr_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, і $(b_i(x), b_j(x)) = e$ для всіх $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k+1$. Для матриці $A(x)$ існує факторизація $A(x) = B_1(x) B_2(x) \ldots B_k(x) B_{k+1}(x)$, де $B_i(x) \in R_n[x]$ — унітальні многочленні матриці степеня r_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, і

$\det B_j(x) = b_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, k+1$, тоді і тільки тоді, коли відповідні інваріантні множники матриць $M(A, g_i)$ і $K(A, g_i)$ асоційовані для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$, де $g_i(x) = = b_1(x) b_2(x) \ldots b_i(x)$. Якщо ж шукана факторизація існує, то матриці $B_j(x)$ однозначно визначаються своїми характеристичними многочленами $b_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, k, k+1$.

1. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
2. *Петричкович В. М., Прокип В. М.* О факторизации многочленных матриц над произвольным полем // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 4. – С. 478–483.
3. *Прокіп В. М.* Про розклад матричного многочлена на множники із заданими характеристичними многочленами // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1991. – № 3. – С. 20–22.
4. *Прокіп В. М.* Паралельні факторизації матричних многочленів над довільним полем // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1995. – Вип. 38. – С. 24–28.

Одержано 22.03.95