УДК 517.9: 519.3

В. Е. Капустян
(Днепропетр. техн. ун-т ж.-д. трансп.)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМ ПОЛЕМ В ТОНКИХ ТЕЛАХ. ЛОКАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА УПРАВЛЕНИЕ

Asymptotic solutions of problems of optimal locally restricted control of heat field in thin bodies are constructed and justified. These problems relate to a critical case of singularly disturbed systems (the degenerate problem has a family of solutions).

Побудовано та обгрунтовано асимптотичні розв'язки в задачах оптимального локально обмеженого керування тепловим полем у тонких тілах. Ці задачі відносяться до критичного випадку сингулярно збурених систем (вироджена задача має сім'ю розв'язків).

В [1] построено и обосновано полное асимптотическое решение задачи оптимального глобально ограниченного управления тепловым полем в тонких телах. Такие задачи относятся к критическому случаю сингулярно возмущенных систем (вырожденная задача имеет семейство решений) [2] и при этом укороченная система оптимальности не совпадает с вырожденной. В работах [3, 4], посвященных асимптотическому анализу распределенных сингулярно возмущенных оптимальных систем с ограниченным управлением, коэффициенты внешних разложений определялись как решения некоторых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для рассматриваемых в настоящей статье задач, как и в [1], коэффициенты внешнего разложения находятся из решений бесконечномерных систем. Это обстоятельство и возможность получения конструктивных результатов послужило основой для выбора исследуемых задач. В отличие от [1], в данной работе строятся и обосновываются асимптотики локально ограниченных управлений. Получено уточнение времени схода управления с ограничения до любого порядка асимптотической точности.

1. Постановка задачи. Условия оптимальности. Пусть в плоском стержне (тонком прямоугольнике) управляемое тепловое поле описывается функцией $y(x, t)$, $x=(x_1, x_2)$, удовлетворяющей в области

$$Q_T = \{(x, t)\colon 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le \varepsilon,\ t_0 \le t \le T\}$$

краевой задаче [1, 2]

$$y_t - \Delta_{x_1 x_2} y = g(x) u(t); \tag{1}$$

$$y(x, t_0) = \varphi(x), \quad y(0, x_2, t) = \psi_1(x_2, t), \quad y(1, x_2, t) = \psi_1(x_2, t); \tag{2}$$

$$y_{x_2}(x_1, 0, t) - A\varepsilon y(x_1, 0, t) = 0, \quad y_{x_2}(x_1, \varepsilon, t) + A\varepsilon y(x_1, \varepsilon, t) = 0, \tag{3}$$

где $A = \mathrm{const} > 0$, $\Delta_{x_1 x_2}$ — оператор Лапласа,

$$\varphi(x), g(x) \in L_2[(0,1)\times(0,\varepsilon)], \quad \psi_i \in L_2[(0,\varepsilon)\times(t_0, T)], \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Требуется найти $u \in U$, доставляющее минимум функционалу

$$I(u) = \varepsilon^{-1}\left(\int_0^1 \int_0^\varepsilon q(x_1) y(x, T)\, dx\right)^2 + \nu\varepsilon \int_{t_0}^T u^2(t)\, dt, \quad \nu = \mathrm{const} > 0, \tag{4}$$

где $q(x_1) \in L_2[0, 1]$, а допустимые управления задаются условием

$$U = \{u \in L_2(t_0, T)\colon |u(t)| \le \overline{\xi}(t) \ \text{п. в. в}\ (t_0, T),\ 0 < \overline{\xi}(t) \in L_\infty(t_0, T)\}. \tag{5}$$

Единственное оптимальное управление характеризуется локальными задачами [5, с. 127], которые в переменных $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \varepsilon\xi_2$ [1] имеют вид

$$(\xi, t) \in \Omega_1: \begin{cases} \varepsilon^2 y_t - (\varepsilon^2 y_{\xi_1\xi_1} + y_{\xi_2\xi_2}) = -\varepsilon^2 g(\xi_1, \varepsilon\xi_2)\overline{\xi}(t), \\ \varepsilon^2 p_t + \varepsilon^2 p_{\xi_1\xi_1} + p_{\xi_2\xi_2} = 0, \\ \int_0^1 \int_0^1 g(\xi_1, \varepsilon\xi_2) p(\xi, t)\, d\xi - \nu\overline{\xi}(t) > 0; \end{cases} \tag{6}$$

$$(\xi, t) \in \Omega_2: \begin{cases} \varepsilon^2 y_t - (\varepsilon^2 y_{\xi_1\xi_1} + y_{\xi_2\xi_2}) = \varepsilon^2 g(\xi_1, \varepsilon\xi_2)\overline{\xi}(t), \\ \varepsilon^2 p_t + \varepsilon^2 p_{\xi_1\xi_1} + p_{\xi_2\xi_2} = 0, \\ \int_0^1 \int_0^1 g(\xi_1, \varepsilon\xi_2) p(\xi, t)\, d\xi + \nu\overline{\xi}(t) < 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$(\xi, t) \in \Omega_3: \begin{cases} \varepsilon^2 y_t - (\varepsilon^2 y_{\xi_1\xi_1} + y_{\xi_2\xi_2}) + \nu^{-1} g(\xi_1, \varepsilon\xi_2)\varepsilon^2 \times \\ \quad \times \int_0^1 \int_0^1 g(\xi_1, \varepsilon\xi_2) p(\xi, t)\, d\xi = 0, \\ \varepsilon^2 p_t + \varepsilon^2 p_{\xi_1\xi_1} + p_{\xi_2\xi_2} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

и при этом оптимальное управление задается выражением

$$u(t) = \begin{cases} -\overline{\xi}(t), & (\xi, t) \in \Omega_1, \\ -\nu^{-1} \int_0^1 \int_0^1 g(x) p(x, t)\, dx, & (\xi, t) \in \Omega_3, \\ \overline{\xi}(t), & (\xi, t) \in \Omega_2, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\Omega = \{ (\xi, t) \colon \xi_1, \xi_2 \in [0, 1],\ t \in [t_0, T] \} = \bigcup_{i=1}^{3} \Omega_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing.$$

Системы (6)–(8) дополняются условиями

$$\begin{gathered} y(\xi, t_0) = \varphi(\xi), \quad y(0, \xi_2, t) = \psi_1(\varepsilon\xi_2, t), \quad y(1, \xi_2, t) = \psi_2(\varepsilon\xi_2, t); \\ p(0, \xi_2, t) = p(1, \xi_2, t) = 0; \\ p(\xi, T) = q(\xi_1) \int_0^1 \int_0^1 q(\kappa_1) y(\kappa, T)\, d\kappa; \end{gathered} \tag{10}$$

краевые условия для y, p по ξ_2 имеют вид

$$\begin{gathered} y_{\xi_2}(\xi_1, 0, t) - A\varepsilon^2 y(\xi_1, 0, t) = 0, \\ y_{\xi_2}(\xi_1, 1, t) + A\varepsilon^2 y(\xi_1, 1, t) = 0; \\ p_{\xi_2}(\xi_1, 0, t) - A\varepsilon^2 p(\xi_1, 0, t) = 0, \\ p_{\xi_2}(\xi_1, 1, t) + A\varepsilon^2 p(\xi_1, 1, t) = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

2. Построение асимптотик. Пусть далее выполняется следующее условие.

Предположение 1. *Исходные данные задачи* (1)–(5) — *достаточно гладкие функции, условия* (2), (3) *согласованы по непрерывности. Кроме того, для простоты изложения пусть* $\psi_1(x_2, t) = \psi_2(x_2, t) = 0$.

Внешнее разложение решений задач (6)–(8), (10), (11) ищем в виде

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{y}_i(\xi, t), \quad \bar{p} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{p}_i(\xi, t). \tag{12}$$

Тогда для $\bar{y}_0$, $\bar{p}_0$ имеем

$$\frac{\partial^2 \bar{y}_0}{\partial \xi_2^2} = \frac{\partial^2 \bar{p}_0}{\partial \xi_2^2} = 0.$$

Тем самым $\bar{y}_0(\xi, t) = \alpha_0(\xi_1, t)$, $\bar{p}_0(\xi, t) = \beta_0(\xi_1, t)$, α_0, β_0 — произвольные функции. Аналогично, $\bar{y}_1(\xi, t) = \alpha_1(\xi_1, t)$, $\bar{p}_1(\xi, t) = \beta_1(\xi_1, t)$, α_1, β_1 — произвольные функции. Для $(\bar{y}_2, \bar{p}_2)$ согласно [1] находим

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 &= -A\alpha_0(\xi_1, t)\xi_2^2 + A\alpha_0(\xi_1, t)\xi_2 + \alpha_2(\xi_1, t), \\ \bar{p}_2 &= -A\beta_0(\xi_1, t)\xi_2^2 + A\beta_0(\xi_1, t)\xi_2 + \beta_2(\xi_1, t), \end{aligned} \tag{13}$$

где функции (α_0, β_0) определяются как решения задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_0}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \xi_1^2} + 2A\alpha_0 = -g(\xi_1, 0)\bar{\xi}(t), \\ -\dfrac{\partial \beta_0}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \beta_0}{\partial \xi_1^2} + 2A\beta_0 = 0, \\ \int_0^1 g(\xi_1, 0)\beta_0(\xi_1, t)\,d\xi_1 - \nu\bar{\xi}(t) > 0; \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_0}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \xi_1^2} + 2A\alpha_0 = g(\xi_1, 0)\bar{\xi}(t), \\ -\dfrac{\partial \beta_0}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \beta_0}{\partial \xi_1^2} + 2A\beta_0 = 0, \\ \int_0^1 g(\xi_1, 0)\beta_0(\xi_1, t)\,d\xi_1 - \nu\bar{\xi}(t) < 0; \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_0}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \xi_1^2} + 2A\alpha_0 + \nu^{-1} g(\xi_1, 0)\int_0^1 g(\kappa, 0)\beta_0(\kappa, t)\,d\kappa = 0, \\ -\dfrac{\partial \beta_0}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 \beta_0}{\partial \xi_1^2} + 2A\beta_0 = 0, \end{cases} \tag{16}$$

а (α_0, β_0) — произвольные функции.

Системы (14)–(16) дополняются условиями

$$\alpha_0(\xi_1, t_0) = \varphi(\xi_1, 0); \quad \alpha_0(0, t) = \alpha_0(1, t) = \beta_0(0, t) = \beta_0(1, t) = 0;$$

$$\beta_0(\xi_1, T) = q(\xi_1)\int_0^1 q(\kappa)\alpha_0(\kappa, T)\,d\kappa. \tag{17}$$

В силу (5) область схода управления с ограничения определяется некоторыми значениями $t = \text{const} \in (t_0, T)$. Поэтому будем считать, что система (14) определена при $t \in [t_0, \tau_0)$, а при $[\tau_0, T]$ справедлива система (16). Найдем условия, реализующие это предположение. Задачи (14)–(16) с условиями (17) представляют собой условия оптимальности для задачи оптимального управления

$$I_0 = \left(\int_0^1 q(\xi_1)\alpha_0(\xi_1, T)\,d\xi_1 \right)^2 + \nu \int_{t_0}^{T} \overline{u}_0^2(t)\,dt, \quad \overline{u}_0 \in U,$$

$$\frac{\partial\alpha_0}{\partial t} - \frac{\partial^2\alpha_0}{\partial\xi_1^2} + 2A\alpha_0 = g(\xi_1, 0)\overline{u}_0(t), \tag{18}$$

$$\alpha_0(\xi_1, t_0) = \varphi(\xi_1, 0), \quad \alpha_0(0, t) = \alpha_0(1, t) = 0.$$

В терминах коэффициентов Фурье по системе ортонормированных в $L_2(0, 1)$ функций спектральной задачи

$$X_k'' + \lambda_k^2 X_k = 0, \quad X_k(0) = X_k(1) = 0 \tag{19}$$

задача (18) принимает вид

$$I_0 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} q_k \alpha_{0k}(T) \right)^2 + \nu \int_{t_0}^{T} \overline{u}_0^2(t)\,dt, \quad \overline{u}_0 \in U,$$

$$\dot{\alpha}_{0i} + (\lambda_i^2 + 2A)\alpha_{0i} = g_i \overline{u}_0(t), \quad \alpha_{0i}(t_0) = \varphi_i, \tag{20}$$

где

$$q_i = \int_0^1 X_i(\xi_1) q(\xi_1)\,d\xi_1, \quad g_i = \int_0^1 X_i(\xi_1) g(\xi_1, 0)\,d\xi_1,$$

$$\varphi_i = \int_0^1 X_i(\xi_1)\varphi(\xi_1, 0)\,d\xi_1.$$

Задача (20) эквивалентна задаче

$$I_0 = \alpha^2(T) + \nu \int_{t_0}^{T} \overline{u}_0^2(t)\,dt, \quad \overline{u}_0 \in U,$$

$$\dot{\alpha}(t) = \gamma(t)\overline{u}_0(t), \quad \gamma(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i g_i \exp\left(-(\lambda_i^2 + 2A)(T - t)\right), \tag{21}$$

$$\alpha(t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \varphi_i \exp\left(-(\lambda_i^2 + 2A)(T - t_0)\right),$$

причем

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \alpha_{0i}(t) \exp\left(-(\lambda_i^2 + 2A)(T - t)\right).$$

Предположение 2. *Пусть уравнение*

$$\gamma(t)\alpha(\tau_0) = \overline{\xi}(t)\left(\nu + \int_{t_0}^{T} \gamma^2(t)\,dt \right)$$

на отрезке (t_0, T) *имеет единственное решение* $t = \tau_0$ *и при* $t \in [t_0, \tau_0)$ *выполняется неравенство*

$$\gamma(t)\alpha(t_0) < \overline{\xi}(t)\left(\nu + \int\limits_{t_0}^{T} \gamma^2(t)\,dt\right), \tag{22}$$

где

$$\alpha(\tau_0) = \alpha(t_0) - \int\limits_{t_0}^{T} \gamma(t)\overline{\xi}(t)\,dt.$$

Тогда оптимальное управление в задаче (21) (или (18)) имеет вид

$$\overline{u}_0(t) = \begin{cases} -\overline{\xi}(t), & t \in [t_0, \tau_0), \\ -\gamma(t)\alpha(t_0)\Big/\left(\nu + \int_{t_0}^{T} \gamma^2(t)\,dt\right) & t \in [\tau_0, T), \end{cases} \tag{23}$$

а задачи (14), (16), (17) имеют решения в форме рядов Фурье по системе функций (19):

$$\alpha_0(\xi_1, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{0i}(t) X_i(\xi_1),$$
$$\beta_0(\xi_1, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{0i}(t) X_i(\xi_1), \tag{24}$$

причем коэффициенты α_{0i}, β_{0i} определяются аналитически.

Функции (24) непрерывны при $t = \tau_0$ и являются классическим решением задач (14), (16), (17). Тем самым мы полностью построили вырожденное решение исходной задачи. В силу свойств исходной задачи в данном случае удается уточнить время схода управления с ограничения. Момент времени τ схода управления с ограничения в исходной задаче будем искать в виде асимптотического ряда

$$\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i \varepsilon^i. \tag{25}$$

Найдем первые коэффициенты указанного разложения. Пусть $\tau^1 = \tau_0 + \varepsilon\tau_1$, $\tau_1 > 0$. Для $\alpha_1(\xi_1, t)$, $\beta_1(\xi_1, t)$ получаем системы уравнений при $t_0 < t < \tau^1$:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \xi_1^2} + 2A\alpha_1 = -\frac{\partial g(\xi_1, 0)}{\partial x_2 \overline{\xi}(t)} 0{,}5,$$
$$-\frac{\partial \beta_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial \xi_1^2} + 2A\beta_1 = 0; \tag{26}$$

при $\tau^1 < t < T$:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \xi_1^2} + 2A\alpha_1 + \nu^{-1} g(\xi_1, 0) \int\limits_0^1 g(\kappa, 0)\beta_1(\kappa, t)\,d\kappa =$$
$$= -0{,}5\nu^{-1}\left[\frac{\partial g(\xi_1, 0)}{\partial x_2} \int\limits_0^1 g(\kappa, 0)\beta_0(\kappa, t)\,d\kappa + \right.$$

$$+ g(\xi_1, 0) \int_0^1 \frac{\partial g(\kappa, 0)}{\partial x_2} \beta_0(\kappa, t)\, d\kappa \Bigg],$$

$$-\frac{\partial \beta_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial \xi_1^2} + 2A\beta_0 = 0. \tag{27}$$

Системы (26), (27) дополняются условиями

$$\alpha_1(\xi_1, t_0) = 0{,}5 \frac{\partial \varphi(\xi_1, 0)}{\partial x_2};$$

$$\alpha_1(0, t) = \alpha_1(1, t) = \beta_1(0, t) = \beta_1(1, t) = 0;$$

$$\beta_1(\xi_1, T) = q(\xi_1) \int_0^1 q(\kappa) \alpha_1(\kappa, T)\, d\kappa, \tag{28}$$

а неравенство из (6) при $t \in [t_0, \tau^1)$ имеет вид

$$\int_0^1 \Bigg[g(\xi_1, 0)\beta_0(\xi_1, t) + \varepsilon(g(\xi_1, 0))\beta_1(\xi_1, t) +$$

$$+ 0{,}5 \frac{\partial g(\xi_1, 0)}{\partial x_2} \beta_0(\xi_1, t) \Bigg] d\xi_1 - \nu \overline{\xi}(t) > 0. \tag{29}$$

Из (29) при $t = \tau^1$ с точностью $O(\varepsilon^2)$ получаем условие

$$\int_0^1 \Bigg[g(\xi_1, 0) \frac{\partial \beta_0(\xi_1, \tau_0 +)}{\partial t} \tau_1 + g(\xi_1, 0)\beta_1(\xi_1, \tau_0) +$$

$$+ 0{,}5 \frac{\partial g(\xi_1, 0)}{\partial x_2} \beta_0(\xi_1, \tau_0) \Bigg] d\xi_1 - \nu \frac{d\overline{\xi}(\tau_0)}{dt} \tau_1 = 0. \tag{30}$$

В (30) коэффициент при τ_1 имеет вид

$$L = \int_0^1 g(\xi_1, 0) \frac{\partial \beta_0(\xi_1, \tau_0 +)}{\partial t} d\xi_1 - \nu \frac{d\overline{\xi}(\tau_0)}{dt} =$$

$$= r(\tau_0) \sum_{i=1}^{\infty} q_i g_i (\lambda_i^2 + 2A) \exp(-(\lambda_i^2 + 2A)(T - \tau_0)) - \nu \frac{d\overline{\xi}(\tau_0)}{dt}. \tag{31}$$

Из неравенства в (6) вытекает, что $L < 0$, и согласно (30) величина L не меняет значения, если в (31) вместо $\dfrac{\partial \beta_0(\xi_1, \tau_0 +)}{\partial t}$ взять $\dfrac{\partial \beta_0(\xi_1, \tau_0 -)}{\partial t}$.

Построим решение задачи (26)–(28) методом Фурье по системе функций (19). При этом коэффициенты Фурье удовлетворяют системам при $t \in [t_0, \tau^1)$:

$$\dot{\alpha}_{1i} + (\lambda_i^2 + 2A)\alpha_{1i} = f_{1i+}(t),$$

$$-\dot{\beta}_{1i} + (\lambda_i^2 + 2A)\beta_{1i} = 0, \tag{32}$$

где

$$f_{1i+}(t) = -0{,}5\overline{\xi}(t) \int_0^1 \frac{\partial g(\xi_1, 0)}{\partial x_2} X_i(\xi_1) d\xi_1;$$

при $t \in (\tau^1, T)$:

$$\begin{gathered} \dot{\alpha}_{1i} + (\lambda_i^2 + 2A)\alpha_{1i} + \nu^{-1} g_i \sum_{j=1}^{\infty} g_j \beta_{1j}(t) = f_{1i-}(t), \\ -\dot{\beta}_{1i} + (\lambda_i^2 + 2A)\beta_{1i} = 0, \end{gathered} \tag{33}$$

где

$$f_{1i-}(t) = -0{,}5\nu^{-1} \int_0^1 \left[\frac{\partial g(\xi_1, 0)}{\partial x_2} \int_0^1 g(\kappa, 0) \beta_0(\kappa, t) d\kappa + \right.$$
$$\left. + g(\xi_1, 0) \int_0^1 \frac{\partial g(\kappa, 0)}{\partial x_2} \beta_0(\kappa, t) d\kappa \right] X_i(\xi_1) d\xi_1.$$

Системы (32), (33) дополняются условиями

$$\begin{gathered} \alpha_{1i}(t_0) = \varphi_{1i}, \quad \beta_{1i}(T) = q_i \sum_{j=1}^{\infty} q_j \alpha_{1i}(T), \\ \sum_{j=1}^{\infty} g_j \beta_{1j}(\tau_0) = -L\tau_1 - L_1(\tau_0), \end{gathered} \tag{34}$$

где

$$\varphi_{1i} = 0{,}5 \int_0^1 \frac{\partial \varphi(\xi_1, 0)}{\partial x_2} X_i(\xi_1) d\xi_1,$$

$$L_1(\tau_0) = 0{,}5 \int_0^1 \frac{\partial g(\xi_1, 0)}{\partial x_2} \beta_0(\xi_1, \tau_0) d\xi_1.$$

Тогда непрерывное при $t = \tau_0$ решение задачи (32)–(34) задается рядами

$$\alpha_1(\xi_1, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{1i}(t) X_i(\xi_1), \quad \beta_1(\xi_1, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{1i}(t) X_i(\xi_1), \tag{35}$$

причем коэффициенты α_{1i}, β_{1i} определяются аналитически. Из (30), (35) находим

$$\tau_1 = -L^{-1}[L_1(\tau_0) + r_1(\tau_0)\gamma(\tau_0)], \tag{36}$$

причем $r_1(\tau_0)$ — известная функция, выраженная через коэффициенты разложения (35); правая часть (36) должна быть положительной.

Таким образом, если

$$R_1(\tau_0) = L_1(\tau_0) + r_1(\tau_0)\gamma(\tau_0) > 0, \tag{37}$$

то $\tau_1 > 0$, в противном случае $\tau_1 < 0$.

Пусть выполняется неравенство (37). Рассмотрим неравенство (29). При $t \in [t_0, \tau_0)$ оно выполняется в силу (22), а при $t \in [t_0, \tau^1)$ — принимает вид

$$\left(\int_0^1 g(\xi_1, 0)\frac{\partial\beta_0(\xi_1, \tau_0+\theta(t-\tau_0))}{\partial t}d\xi_1\right) - \nu\frac{\partial\overline{\xi}(\tau_0+\theta(t-\tau_0))}{\partial t}\times$$

$$\times(t-\tau_0) + \varepsilon\left(\int_0^1 g(\xi_1, 0)\beta_1(\xi_1, \tau_0)d\xi_1 + L_1(\tau_0)\right) > 0, \quad \theta\in(0, 1),$$

которое с точностью $O(\varepsilon^2)$ может быть записано в виде

$$L_1(t-\tau_0-\varepsilon\tau_1) > 0, \tag{38}$$

поскольку $t-\tau_0-\varepsilon\tau_1<0$.

Если же неравенство (37) не выполняется, то, поступая аналогично предыдущему, убеждаемся, что неравенство (29) не выполняется на интервале $t\in\in[\tau^1, \tau_0]$. Решение (35) дополняется в окрестности прямой $t=t_0$ погранфункцией [1, 2]

$$\Pi_1 y(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\xi_1)\exp(-\pi^2 n^2\tau)\cos(\pi n\xi_2), \tag{39}$$

где

$$b_n(\xi_1) = 0{,}5\frac{\partial\varphi(\xi_1, 0)}{\partial x_2}\int_0^1 \xi_2\cos(\pi n\xi_2)d\xi_2.$$

Однако (39) не оказывает влияния на величину τ_1.

Поэтому по индукции устанавливаем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть выполняются предположения* 1, 2. *Тогда ряд* (25) *строится однозначно и при этом* $\tau_i=-L^{-1}R_i(\tau_0, \ldots, \tau_{i-1})$, *где* $R_i(\tau_0, \ldots, \tau_{i-1})$ — *известные функции; причем, если* $R_i>0$, *то* $\tau_i>0$ *и наоборот; коэффициенты внешнего разложения имеют вид*

$$\overline{y}_i(\xi, \tau) = -A\alpha_{i-2}(\xi_1, t)\xi_2^2 + A\alpha_{i-2}(\xi_1, t)\xi_2 + \alpha_i(\xi_1, t) + Y_i(\xi, t),$$

$$\overline{p}_i(\xi, \tau) = -A\beta_{i-2}(\xi_1, t)\xi_2^2 + A\beta_{i-2}(\xi_1, t)\xi_2 + \beta_i(\xi_1, t) + P_i(\xi, t),$$

где Y_i, P_i — *известные функции; функции* α_i, β_i *удовлетворяют системам:*

при $t\in(t_0, \tau_0)$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\alpha_i}{\partial t} - \frac{\partial^2\alpha_i}{\partial\xi_1^2} + 2A\alpha_i = f_{i+}(\xi_1, t),\\ -\frac{\partial\beta_i}{\partial t} - \frac{\partial^2\beta_i}{\partial\xi_1^2} + 2A\beta_i = F_i(\xi_1, t);\end{gathered} \tag{40}$$

при $t\in(\tau_0, T)$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\alpha_i}{\partial t} - \frac{\partial^2\alpha_i}{\partial\xi_1^2} + 2A\alpha_i + \nu^{-1}g(\xi_1, 0)\int_0^1 g(\kappa, 0)\beta_i(\kappa, t) = f_{i-}(\xi_1, t),\\ -\frac{\partial\beta_i}{\partial t} - \frac{\partial^2\beta_i}{\partial\xi_1^2} + 2A\beta_i = F_i(\xi_1, t);\end{gathered} \tag{41}$$

где f_{i+}, f_{i-}, F_i — *известные функции; начальные и краевые условия для систем* (40), (41) *определяются из условия принадлежности решений коэффициентов внутренних разложений в окрестностях точек* $t = t_0, T$; $\xi_1 = 0, 1$ *классу погранфункций* [1].

Замечание. Отметим, что при $i \geq 4$ функции $\bar{y}_i(\xi, t)$, как и функции $\Pi_i y(\eta_1, \xi_2, t)$ $(\eta_1 = \xi_1 \varepsilon^{-1})$, в силу структуры краевых задач для последних терпят разрыв первого рода на прямой $t = \tau_0$, хотя функции $\alpha_i(\xi_1, t)$ остаются непрерывными на указанной прямой. Функции же $\bar{p}_i(\xi, t)$, $\Pi_i p(\eta_1, \xi_2, t)$ являются гладкими для всех i.

Обозначим через $y^{(N)}$, $p^{(N)}$, $u^{(N)}$ суммы частичных сумм как внешних, так и внутренних разложений, включая и угловые погранфункции [1]. Тогда, с учетом замечания, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть выполнены условия леммы. Тогда функции* $y^{(N)}$, $p^{(N)}$, $u^{(N)}$ *представляют асимптотическое решение исходной задачи и справедливы оценки*

$$\| y - y^{(N)} \|_{L_2(\Omega)} + \| (y - y^{(N)}) \xi_1 \|_{L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon^3,$$

$$\| p - p^{(N)} \|_{L_2(\Omega)} + \| (p - p^{(N)}) \xi_1 \|_{L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon^3,$$

$$\| u - u^{(N)} \|_{L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon^3, \quad | I(u) - I(u^{(N)}) | \leq C\varepsilon^7.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующих теорем из [3, 4].

1. *Капустян В. Е.* Оптимальное ограниченное управление тепловым полем в тонких телах // Докл. АН Украины. – 1993. – № 11. – С. 84–88.
2. *Бутузов В. Ф., Уразгильдина Т. А.* Асимптотическое решение задачи о распространении тепла в тонких телах // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 1. – С. 13–21.
3. *Капустян В. Е.* Асимптотический анализ ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Там же. – 1993. – **45**, № 8. – С. 1072–1083.
4. *Капустян В. Е.* Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных сингулярных параболических задачах // Там же. – 1993. – **45**, № 10. – С. 1337–1347.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.

Получено 27.03.95