УДК 512.552.1

В. В. Кириченко, Ю. В. Яременко (Нац. ун-т, Киев)

МНОГОРЯДНЫЕ КОЛЬЦА

We introduce multiserial (n-serial) rings and consider their properties, in particular, their minors of order 2. We also find all possible forms of quivers for Noetherian and hereditary multiserial rings and describe the structure of semiprime and hereditary multiserial rings.

Введено многорядні (n-рядні) кільця та розглянуто їх властивості. Вивчено мінори 2-го порядку таких кілець. Наведено вигляд сагайдаків нетерових та спадкових n-рядних кілець. Описано будову навіпервинних та спадкових n-рядних кілець.

Одним из основных понятий теории колец и модулей является понятие простого модуля. Кольца, над которыми все неразложимые модули просты, характеризуются классической теоремой Веддербарна – Артина.

Более широкий класс модулей (цепных модулей) рассматривали Кете, Асано, Накаяма и Л. А. Скорняков.

Мы будем следовать терминологии Л. А. Скорнякова [1]. Изучению полуцепных колец и модулей над ними посвящена многочисленная литература. Отметим только, что Ю. А. Дрозд [2] и Уорфилд [3] независимо доказали, что кольцо полуцепное тогда и только тогда, когда над ним все конечно представимые модули полуцепные (см. также [4], гл. 25).

Более широким классом модулей, чем класс цепных модулей, является класс дистрибутивных модулей, т. е. класс модулей, у которых структура всех подмодулей дистрибутивна. Точно так же, как и в случае цепных модулей, приходим к понятию дистрибутивного справа (слева) кольца, дистрибутивного кольца, полудистрибутивного справа (слева) кольца и полудистрибутивного кольца.

Изучению дистрибутивных и полудистрибутивных колец и модулей над ними посвящено много работ, в частности работы Брунгса, Камило, Колби, Фуллера, А. А. Туганбаева и др.

В [5] введены бирядные артиновы кольца и показано, что если всякий модуль на артиновым кольцом полудистрибутивен, то такое кольцо бирядно. В [6] введены бирядные полусовершенные кольца (без всяких условий конечности), свойства которых изучались в [7, 8].

Необходимые для нас сведения о полусовершенных полудистрибутивных кольцах и их колчанах содержатся в [9, 10]. Следует отметить важную роль различных понятий колчана полусовершенного кольца, обобщающих понятие колчана Габриеля конечномерной алгебры над полем [11].

Все кольца, рассматриваемые в настоящей статье, ассоциативные и с единицей, модули — правые и унитарные. Термины: нетерово, артиново, полудистрибутивное и т. д. для колец означают наличие этого свойства с двух сторон.

Статья состоит из пяти пунктов. В п. 1 вводятся многорядные (n-рядные) полусовершенные кольца. При $n = 1$ получены полуцепные кольца, а при $n = 2$ — бирядные кольца. Доказано, что для любого ненулевого идемпотента e многорядного кольца A кольцо eAe также многорядно. П. 2 посвящен рассмотрению многорядных колец, единица которых раскладывается в сумму двух локальных идемпотентов. В п. 3 доказывается, что полупервичное многорядное кольцо распадается в конечное прямое произведение первичных полуцепных колец. П. 4 посвящен характеризации колчанов нетеровых многорядных колец. В п. 5 описаны наследственные многорядные кольца и нетеровы многорядные кольца с нулевым цоколем.

1. Основные определения. Известно, что модуль M называется дистрибутивным, если для любых его подмодулей K, L, N справедливо равенство

$K \cap (L+N) = K \cap L + K \cap N$. Имеет место следующий критерий дистрибутивности модуля.

Теорема 1 [12]. *Модуль дистрибутивен тогда и только тогда, когда каждый его фактор-модуль содержит в своем цоколе не более одного экземпляра каждого простого модуля.*

В этом случае говорят, что цоколь свободен от квадратов.

Очевидно, любой подмодуль и любой фактор-модуль дистрибутивного модуля дистрибутивен.

Пусть A — полусовершенное кольцо, R — его радикал Джекобсона. Неразложимые проективные A-модули будем называть главными A-модулями. Аналогично, левые неразложимые проективные A-модули называются главными левыми A-модулями.

Неразложимый модуль M называется n-рядным, если он дистрибутивен и содержит цепные подмодули $K_1, \ldots, K_n$ (возможно и нулевые) такие, что $K_1 + \ldots + K_n$ есть либо M, либо наибольший собственный подмодуль в M, а $K_i \cap K_j$, $i \neq j$, — нуль или простой модуль.

Полусовершенное кольцо A будем называть n-рядным, если каждый главный правый и каждый главный левый A-модуль является n-рядным. Естественно, что можно рассматривать и n-рядные только справа или слева кольца. Часто, не уточняя n, n-рядное кольцо будем называть многорядным.

Ясно, что при $n-1$ мы получаем полуцепные кольца, а при $n=2$ — бирядные кольца.

Обозначим через M^m прямую сумму m экземпляров модуля M, $M^0 = 0$. Пусть $A = P_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus P_s^{n_s}$ — разложение полусовершенного кольца A в прямую сумму главных A-модулей, где модули $P_1, \ldots, P_s$ — попарно неизоморфны и фактор-модули $P_i / P_i R = U_i$, $i = 1, \ldots, s$, простые. Модулями $P_1, \ldots, P_s$ исчерпываются с точностью до изоморфизма все неразложимые проективные A-модули, а модулями $U_1, \ldots, U_s$ — все попарно неизоморфные простые A-модули.

Напомним определение колчана нетерова справа полусовершенного кольца (схемы в терминологии [13, 14]).

Пусть A — нетерово справа полусовершенное кольцо, R — его радикал Джекобсона, $P_1, \ldots, P_s$ — все попарно неизоморфные проективные неразложимые модули. Пусть также проективное накрытие $P(P_i R)$ модуля $P_i R$ имеет вид

$$P(P_i R) = \bigoplus_{j=1}^{s} P_j^{t_{ij}}, \quad i, j = 1, \ldots, s.$$

Сопоставим модулям $P_1, \ldots, P_s$ вершины (точки) $1, \ldots, s$ и соединим вершину i с вершиной j t_{ij} стрелками. Полученный граф называется колчаном нетерова справа полусовершенного кольца A и обозначается через $Q(A)$.

Пример. Обозначим через A_{n+1} алгебру квадратных матриц порядка $n+1$ над произвольным полем k вида

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} k & k & k & \ldots & k \\ 0 & k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & k & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & k \end{pmatrix}$$

(ненулевые элементы стоят в первой строке и по главной диагонали). Ясно, что это n-рядная алгебра (модуль $P_1 = e_{11}A_{n+1}$ является n-рядным), причем A_{n+1} — полуцепная слева алгебра.

Отметим также, что правый колчан $Q(A_{n+1})$ имеет вид

$$Q(A_{n+1}) = \left\{ \begin{tikzcd}[row sep=small] & 2 \\ & 3 \\ 1 \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \vdots \\ & n+1 \end{tikzcd} \right\},$$

а левый колчан $Q'(A_{n+1})$ имеет вид

$$Q'(A_{n+1}) = \left\{ \begin{tikzcd}[row sep=small] & 2 \arrow[ddl] \\ & 3 \arrow[dl] \\ 1 & \vdots \arrow[l] \\ & n+1 \arrow[ul] \end{tikzcd} \right\}.$$

Рассмотрим двустороннее пирсово разложение кольца A и его радикала Джекобсона R [13]. Пусть $1 = f_1 + \ldots + f_s$ — такое разложение $1 \in A$ в сумму попарно ортогональных идемпотентов, что $f_i A = P_i^{n_i}$, $i = 1, \ldots, s$. Положим $A_{ij} = f_i A f_j$. Получим следующее двустороннее пирсово разложение кольца A:

$$A = \bigoplus_{i,j=1}^{s} A_{ij}. \tag{1}$$

Кольцо A_{ii} изоморфно кольцу $\mathrm{End}_A P_i^{n_i} \simeq M_{n_i}(\mathrm{End}_A P_i)$, где $\mathrm{End}_A P_i = \mathfrak{O}_i$ — локальное кольцо с единственным максимальным идеалом $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots, s$. (Через $M_n(B)$ обозначается кольцо всех квадратных матриц порядка n с коэффициентами из B.)

Для радикала Джекобсона R кольца A справедливо следующее двустороннее пирсово разложение:

$$R = \bigoplus_{i,j=1}^{s} f_i R f_j, \quad f_i R f_i = R_i, \quad f_i R f_j = A_{ij}, \quad i \neq j, \quad i,j = 1, \ldots, s, \tag{2}$$

$R_i = M_{n_i}(\mathfrak{M}_i)$ — радикал Джекобсона кольца A_{ii}, $i = 1, \ldots, s$.

Известен следующий критерий полудистрибутивности полусовершенного кольца, принадлежащий А. А. Туганбаеву [15] (см. также [10]).

Теорема 2. *Полусовершенное кольцо A полудистрибутивно справа (слева) тогда и только тогда, когда для любых локальных идемпотентов e и f кольца A множество eAf является цепным правым fAf-модулем (цепным левым eAe-модулем).*

***Следствие* 1** [10]. *Пусть A — полусовершенное кольцо, $1 = e_1 + \ldots + e_s$ — разложение единицы кольца A в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов. Кольцо A полудистрибутивно справа (слева) тогда и только тогда, когда для любых идемпотентов e_i и e_j, $i \neq j$, из указанного разложения кольцо $(e_i + e_j)A(e_i + e_j)$ полудистрибутивно справа (слева).*

Полусовершенное кольцо A называется приведенным, если фактор-кольцо A/R является прямым произведением тел. По теореме Мориты (см., например, [16]) категория модулей над произвольным полусовершенным кольцом естественно эквивалентна категории модулей над приведенным кольцом. Такие кольца называются эквивалентными в смысле Мориты.

Пусть $e^2 = e$ — ненулевой идемпотент кольца A. Покажем, что многорядность сохраняется при переходе к кольцу eAe.

Теорема 3. *Если кольцо A многорядно справа (слева), e — ненулевой идемпотент кольца A, то кольцо eAe многорядно справа (слева). В частности, если кольцо A многорядно, то и кольцо eAe многорядно.*

Доказательство проведем для многорядного справа кольца A. В силу теоремы 2 кольцо eAe полудистрибутивно справа. Пусть $P = gA$ — главный A-модуль. Учитывая двустороннее пирсово разложение (2) для радикала Джекобсона, получаем, что модуль $gRe = PRe$ является единственным максимальным подмодулем модуля Pe. Очевидно также, что если K — цепной A-модуль, то и Ke — цепной eAe-модуль.

Пусть модуль P n-рядный, т. е. $PR = K_1 + \ldots + K_n$, где $K_1, \ldots, K_n$ — цепные модули $K_i \cap K_j$ равны нулю или просты $(i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, s)$. Тогда $PRe = K_1 e + \ldots + K_n e$ — сумма цепных eAe-модулей $K_1 e, \ldots, K_n e$. Если $K_i \cap K_j = 0$, то и $K_i e \cap K_j e = 0$. Пусть $K_i \cap K_j = U$, где U — простой A-модуль. Тогда $K_i e \cap K_j e = Ue$. Если $Ue = 0$, то доказательство завершено.

Пусть $Ue \neq 0$. Покажем, что eAe-модуль Ue прост. Если это не так, то Ue содержит нетривиальный eAe-подмодуль Ve, порождающий нетривиальный A-подмодуль в U, что приводит к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 4. *Локальное многорядное кольцо A является цепным.*

Доказательство снова проведем для правого случая. Предположим, что кольцо A не является цепным справа модулем. Тогда в A существуют два подмодуля M_1 и M_2 такие, что $M_1 \cap M_2 \neq M_1$ и $M_1 \cap M_2 \neq M_2$. Это означает существование элементов $m_1 \in M_1$ и $m_2 \in M_2$ таких, что $m_2 \notin M_1$, а $m_1 \notin M_2$. Ясно, что цоколь фактор-модуля $(m_1 A + m_2 A)/(m_1 R + m_2 R)$ не свободен от квадратов. По теореме 1 кольцо A не дистрибутивно справа. Теорема доказана.

2. Миноры многорядных колец. Пусть A — кольцо, p — конечнопорожденный проективный A-модуль, который разлагается в прямую сумму m неразложимых модулей. Следуя [17], его кольцо эндоморфизмов B будем называть минором m-го порядка кольца A.

Кольцо называется неразложимым, если его нельзя представить в виде прямого произведения двух ненулевых колец.

Рассмотрим неразложимые приведенные миноры второго порядка многорядных колец.

***Предложение* 1.** *Неразложимый приведенный минор второго порядка B многорядного кольца A является бирядным кольцом.*

Доказательство. Пусть $1 = e_1 + e_2$ — разложение $1 \in B$ в сумму двух локальных идемпотентов, $B_i = e_i B e_i$, R_i — радикал Джекобсона кольца B_i, $i = 1, 2$, R — радикал Джекобсона кольца B, $X = e_1 B e_2$, $Y = e_2 B e_1$. Тогда в силу представления (2) для R имеем

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix}.$$

По теореме 3 кольцо B многорядно. Без ограничения общности можно считать, что $P_1 R = (R_1, X)$ представляется в виде суммы n цепных B-модулей $K_1, \ldots, K_n$ таких, что $K_i \cap K_j$ просты или равны нулю $(i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n)$. Тогда $P_1 R e_1 = K_1 e_1 + \ldots + K_n e_1$ и $P_1 R e_2 = K_1 e_2 + \ldots + K_n e_2$. Поэтому $P_1 R e_1 = R_1$ является суммой цепных B_1-модулей $K_1 e_1, \ldots, K_n e_1$. Так как по теореме

2 и R_1 — цепной B_1-модуль, можно считать, что $R_1 = K_1 e_1$. Точно так же $X = K_2 e_2$. Поэтому $P_1 R = (R_1, X) = K_1 + K_2$, следовательно, P_1 — бирядный модуль. Точно так же утверждение доказывается для остальных главных модулей.

Для кольца B по предложению 1 введем такие обозначения. Если модуль P_1 не является цепным, то $P_1 R = (R_1, X) = K_1^{(1)} + K_2^{(1)}$. Если то же имеет место для модуля P_2, то $P_2 R = K_1^{(2)} + K_2^{(2)}$. Для главных левых модулей Q_1 и Q_2 в той же ситуации

$$RQ_1 = \begin{pmatrix} R_1 \\ Y \end{pmatrix} = L_1^{(1)} + L_2^{(1)}, \quad RQ_2 = \begin{pmatrix} X \\ R_2 \end{pmatrix} = L_1^{(2)} + L_2^{(2)}.$$

***Следствие* 2.** *Если модуль P_1 нецепной, то $K_1^{(1)} \cap K_2^{(1)} = (XY, R_1 X)$. Если модуль P_2 нецепной, то $K_1^{(2)} \cap K_2^{(2)} = (R_2 Y, YX)$. Если модуль Q_1 нецепной, то*

$$L_1^{(1)} \cap L_2^{(1)} = \begin{pmatrix} XY \\ YR_1 \end{pmatrix}.$$

Если модуль Q_2 нецепной, то

$$L_1^{(2)} \cap L_2^{(2)} = \begin{pmatrix} XR_2 \\ YX \end{pmatrix}.$$

Перейдем к описанию миноров второго порядка нетеровых справа многорядных колец. Ясно, что в силу теоремы Мориты достаточно рассматривать приведенные миноры.

Справедлива следующая теорема [13; 18, с. 48].

Теорема 5. *Пусть A — произвольное кольцо, e — ненулевой идемпотент кольца A, $1 = e + f$. Если кольцо A нетерово (артиново) справа, то кольца eAe и fAf — нетеровы (артиновы) справа, fAf-модуль eAf и eAe-модуль fAe конечно порождены. Обратно, если эти условия выполняются для некоторых идемпотентов e и f кольца таких, что $1 = e + f$, то кольцо A нетерово (артиново) справа.*

Учитывая теорему 3, предложение 1 и теорему 5, мы будем описывать нетеровы справа неразложимые бирядные приведенные кольца B, единица которых раскладывается в сумму двух локальных идемпотентов: $1 = e_1 + e_2$.

По теореме 3 и теореме 6.1 из [14] кольца B_1 и B_2 являются либо однорядными кольцами Кете (цепными артиновыми кольцами), либо дискретно нормированными кольцами, вообще говоря, некоммутативными (локальными областями главных правых и главных левых идеалов).

По теореме 2.3 из [10] из каждой точки колчана $Q(B)$ в другую, возможно, совпадающую с исходной, идет не более одной стрелки, и левый колчан $Q'(B)$ получается из колчана $Q(B)$ переворотом всех стрелок.

Выпишем всевозможные колчаны $Q(B)$ с точностью до перенумерации вершин. 1) $\{\bullet\ \bullet\}$; 2) $\{\circlearrowleft\!\bullet\ \ \bullet\}$; 3) $\{\circlearrowleft\!\bullet\ \circlearrowleft\!\bullet\}$; 4) $\{\bullet \rightleftarrows \bullet\}$; 5) $\{\bullet \longrightarrow \bullet\}$; 6) $\{\circlearrowleft\!\bullet \rightleftarrows \bullet\!\circlearrowright\}$; 7) $\{\circlearrowleft\!\bullet \rightleftarrows \bullet\}$; 8) $\{\circlearrowleft\!\bullet \longrightarrow \bullet\}$; 9) $\{\bullet \longrightarrow \bullet\!\circlearrowright\}$; 10) $\{\circlearrowleft\!\bullet \longrightarrow \bullet\!\circlearrowright\}$.

Лемма 1. *Пусть R — радикал Джекобсона локального кольца $\mathfrak{O}$, X — цепной $\mathfrak{O}$-модуль и включение $XR \subset X$ строгое. Тогда X — циклический $\mathfrak{O}$-модуль.*

Доказательство. Из того, что X/XR является векторным пространством над телом $\mathfrak{O}/R$, а X — цепной $\mathfrak{O}$-модуль, сразу следует, что XR — максимальный подмодуль в X. Пусть $X \in X \setminus XR$. Подмодуль $X\mathfrak{O}$, очевидно, строго содержит XR, откуда $X = x\mathfrak{O}$.

Следующие факты доказаны в [13] (см. также [18], § 10).

Пусть A — приведенное полусовершенное кольцо, $1 = e_1 + \ldots + e_s$ — разложение $1 \in A$ в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов,

$$P_i = e_i A, \quad Q_i = A e_i, \quad U_i = P_i / P_i R, \quad V_i = Q_i / R Q_i, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Лемма 2. *Имеют место равенства* $U_i e_j = 0$ *при* $i \neq j$ *и* $U_i e_i = U_i$; $e_j V_i = 0$ *при* $i \neq j$ *и* $e_i V_i = V_i$, $i, j = 1, \ldots, s$.

Лемма 3. *Простой модуль* U_k (V_k) *входит в прямое разложение модуля* $e_i R / e_i R^2$ $(R e_i / R^2 e_i)$ *тогда и только тогда, когда* $e_i R^2 e_k$ *строго содержится в* $e_i R e_k (e_k R e_i)$.

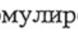
Рассмотрим B. Имеем

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ Y & B_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix};$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} R_1^2 + XY & R_1 X = X R_2 \\ Y R_1 + R_2 Y & R_2^2 + YX \end{pmatrix}.$$

Кольцо B полудистрибутивно, поэтому X — цепной B_2-модуль и цепной левый B_1-модуль, а Y — цепной B_1-модуль и цепной левый B_2-модуль. По теореме 5 X — конечнопорожденный B_2-модуль, а Y — конечнопорожденный B_1-модуль.

Случай 1. $Q(B) = \{\,\bullet\ \bullet\,\}$. По лемме 2 $P_i = e_i B$ — простые модули, откуда B — полупростое артиново кольцо.

Случай 2. $Q(B) = \{$  $\}$. Из утверждений, сформулированных выше, имеем $XY \subset R_1^2$, $X = R_1 X + X R_2$, P_2 — простой B-модуль, т. е. $Y = 0$ и $R_2 = 0$. Поэтому $B_2 = D$ — тело. По лемме Накаямы $X = R_1 X$, поэтому $B_1 = \mathfrak{O}_1$ — дискретно нормированное кольцо. Нетрудно видеть, что в этом случае кольцо

$$B = \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_1 & D \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где D — тело частных кольца $\mathfrak{O}_1$. Ясно, что это — нетерово только справа и неследственное только справа полуцепное кольцо.

Случай 3. $Q(B) = \{$  $\}$. Согласно теореме 6.1 из [14] такое кольцо не может быть полуцепным. Имеем $XY \subset R_1^2$; $YX \subset R_2^2$; $X = R_1 X$; $Y = R_2 Y$. Если $XY \neq 0$, то $XY = R_1^m = R_1 XY = R_1^{m+1}$, откуда $R_1 = 0$, чего не может быть ввиду леммы 2. Поэтому $XY = 0$ и $YX = 0$. Без ограничения общности можно считать, что модуль P_1 нецепной. В этом случае $X \neq 0$ и по следствию 2 $R_1 X = X$ — простой B-модуль. Поэтому цоколь кольца B отличен от нуля.

Случай 4. $Q(B) = \{$  $\}$. Имеем строгое включение $R_1 X \subset X$, откуда по теореме 2 и лемме 1 X — левый циклический B_1-модуль. Точно так же доказывается, что Y — левый циклический B_2-модуль, откуда по теореме 5 кольцо B нетерово слева. В силу [13] в этом случае B — нетерово с двух сторон полуцепное кольцо. Если цоколь кольца B равен нулю, то это кольцо изоморфно кольцу $H_2(\mathfrak{O})$, где $\mathfrak{O}$ — дискретно нормированное кольцо с единственным максимальным идеалом $\mathfrak{M}$:

$$H_2(\mathfrak{O}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{M} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}.$$

Кольцо $H_2(\mathfrak{O})$ — наследственное первичное кольцо.

Случай 5. $Q(B) = \{\bullet \longrightarrow \bullet\}$. Имеем $Y = 0$, $R_2 = 0$, $YX = R_1 = 0$. Легко видеть, что в этом случае кольцо B изоморфно кольцу $T_2(D)$ верхних треугольных матриц второго порядка над телом D. Кольцо $T_2(D)$ — это артиново наследственное полуцепное кольцо.

Случай 6. $Q(B) = \{\circlearrowleft\bullet \rightleftarrows \bullet\circlearrowright\}$. Как и выше, по теореме 2 и лемме 1 получаем, что B — нетерово с двух сторон кольцо.

С учетом следствия 2 в этом случае имеем такой список бирядных колец:

a) $XY = 0$, $R_1X = XR_2 = 0$, $YX = 0$, $YR_1 = R_2Y = 0$;

b) $XY = 0$, $R_1X = XR_2 = 0$, $YX = 0$, $YR_1 = R_2Y$ — простой B-модуль;

c) $XY = 0$, $R_1X = XR_2 = 0$, YX — простой B-модуль, $YR_1 = R_2Y = 0$;

d) XY — простой B-модуль, $R_1X = XR_2 = 0$, $YX = 0$, $YR_1 = R_2Y = 0$;

e) XY — простой B-модуль, $R_1X = XR_2 = 0$, YX — простой B-модуль, $YR_1 = R_2Y = 0$;

f) $XY = 0$, $R_1X = XR_2$ — простой B-модуль, $YX = 0$, $YR_1 = R_2Y = 0$;

g) $XY = 0$, $R_1X = XR_2$ — простой B-модуль, $YX = 0$, $YR_1 = R_2Y$ — простой B-модуль.

Отметим, что цоколь любого кольца B в случае 6 отличен от нуля.

Случай 7. $Q(B) = \{\circlearrowleft\bullet \rightleftarrows \bullet\}$. Снова кольцо B нетерово с двух сторон. Имеем $XY \subset R_1^2$; $YX = R_2$. По следствию 1.7 из [10] $XR_1 = R_2X$ и $YR_1 = R_2Y$. Если $XY \neq 0$, то $XY = R_1^m$, $m \geq 2$, откуда $XYX = XR_2 = R_1^mX = XR_2^m$. Поэтому $XR_2 = 0$. Следовательно, $R_1X = 0$. Рассмотрим $YXY = R_2Y = YR_1 = YR_1^m$; имеем $YR_1 = = R_2Y = 0$. Если же $XY = 0$, то снова $XR_2 = XR_1 = 0$ и $YR_1 = R_2Y = 0$. Итак, всегда $XR_2 = R_1X = 0$ и $YR_1 = R_2Y = 0$, XY либо равен нулю, либо является простым B-модулем.

В случае 7 цоколь кольца B отличен от нуля.

Случай 8. $Q(B) = \{\circlearrowleft\bullet \longrightarrow \bullet\}$. Здесь P_2 — простой модуль. Поэтому $Y = 0$, $R_2 = 0$. По лемме 1 X — циклический левый B_1-модуль, откуда B нетерово с двух сторон. Итак, $R_1 \neq 0$, $R_2 = 0$, $XR_2 = R_1X = 0$.

В этом случае цоколь кольца B также отличен от нуля.

Случай 9. $Q(B) = \{\bullet \longrightarrow \bullet\circlearrowright\}$. По теореме 2.3 из [10] левый колчан $Q'(B)$ имеет вид $Q'(B) = \{\bullet \longleftarrow \bullet\circlearrowright\}$. Поэтому модуль Q_1 прост, откуда $Y = 0$ и $R_1 = 0$. Как и выше, заключаем, что B нетерово с двух сторон и $XR_2 = R_1X = 0$, $R_2 \neq 0$. Снова цоколь кольца B отличен от нуля.

Случай 10. $Q(B) = \{\circlearrowleft\bullet \longrightarrow \bullet\circlearrowright\}$. Имеем $R_1X = XR_2$. Если $Y \neq 0$, то $Y = R_2Y$ — простой B-модуль и $YX = 0$. Цоколь кольца B отличен от нуля.

***Следствие* 3.** *Неразложимое приведенное нетерово справа бирядное кольцо с нулевым цоколем, единица которого разлагается в сумму двух локальных идемпотентов, изоморфно кольцу $H_2(\mathfrak{O})$, т. е. является нетеровым с двух сторон наследственным первичным полуцепным кольцом.*

***Следствие* 4.** *Неразложимое наследственное с двух сторон приведенное бирядное кольцо, единица которого разлагается в сумму двух локальных идемпотентов, изоморфно либо кольцу $H_2(\mathfrak{O})$, либо кольцу $T_2(D)$.*

Доказательство следует из теоремы 2.1 [8], согласно которой наследственное справа полусовершенное полудистрибутивное справа кольцо нетерово справа.

***Замечание* 1.** Авторам не известна исчерпывающая характеристика бирядных колец B в случаях 3 и 10.

3. Полупервичные многорядные кольца.

Теорема 6. *Пусть A — полусовершенное кольцо, $1 = e_1 + \ldots + e_n$ — разложение $1 \in A$ в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов. Кольцо A полупервично тогда и только тогда, когда для любых идемпотентов e_i и e_j, $i \neq j$, из указанного разложения кольцо $(e_i + e_j)A(e_i + e_j)$ полупервично.*

Доказательство. Если e — ненулевой идемпотент полупервичного кольца A, то кольцо eAe полупервично по лемме 3.1 из [10].

Докажем обратное утверждение. Пусть M — ненулевой двусторонний нильпотентный идеал кольца A; $M_{ij} = e_i M e_j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Поскольку кольцо $(e_i + e_j)A(e_i + e_j)$ полупервично при $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, то $M_{ii} = 0$ при $i = 1, \ldots, n$. Но тогда существуют i_0 и j_0, $i_0 \neq j_0$, такие, что $M_{i_0 j_0} \neq 0$. Нетрудно проверить, что множество $M_{i_0 j_0}$ является двусторонним идеалом кольца $(e_{i_0} + e_{j_0})A(e_{i_0} + e_{j_0})$ и $M_{i_0 j_0} M_{i_0 j_0} = 0$. Теорема доказана.

***Предложение* 2.** *Цоколь полупервичного полусовершенного кольца A равен нулю.*

Доказательство. Из представления (1) для кольца A и представления (2) его радикала Джекобсона R (см. п. 1) непосредственно следует, что цоколи полусовершенных колец, эквивалентных в смысле Мориты, одновременно не равны нулю. Поэтому будем считать кольцо A приведенным и неразложимым. Пусть $A = P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$ — разложение кольца A в прямую сумму главных модулей, $1 = e_1 + \ldots + e_s$ — соответствующее разложение $1 \in A$ в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов, т. е. $P_i = e_i A$, $i = 1, \ldots, s$. Если хотя бы один из главных модулей, например P_s, прост, то, полагая $1 = e_1 + \ldots + e_{s-1}$; $f = e_s$, получаем, что eAf — ненулевой двусторонний идеал, так как в противном случае кольцо A разложимо. Ясно, что $eAfeAf = 0$. Поэтому можно считать, что ненулевой цоколь S кольца A лежит в R. Поскольку $SR = 0$, то $S^2 = 0$. Противоречие. Предложение доказано.

Лемма 4. *Цепное полупервичное кольцо A является первичным.*

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 — ненулевые двусторонние идеалы кольца A и $L_1 L_2 = 0$. Так как A цепное, можно считать, что $L_1 \supset L_2$ и $L_2^2 = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

***Следствие* 5.** *Полупервичное многорядное кольцо распадается в конечное прямое произведение первичных многорядных колец.*

Доказательство следует из теорем 3, 4, леммы 4 и теоремы 3.4 из [10].

Теорема 7. *Неразложимое полупервичное многорядное кольцо A является первичным полуцепным кольцом.*

Доказательство. Очевидно, кольцо A можно считать приведенным. Из следствия 5 получаем, что неразложимое полупервичное многорядное кольцо A является первичным кольцом.

Докажем, что кольцо A полуцепное справа.

Пусть неразложимый проективный A-модуль P не является цепным.

Воспользуемся формулами (1) и (2) п. 1 для двустороннего пирсова разложения кольца A и его радикала Джекобсона R и принятыми там обозначениями.

Без ограничения общности, можно считать, что $P = P_1 = f_1 A$ и $P_1 = K_1 + \ldots$ $\ldots + K_m$ — его представление в виде суммы цепных модулей. Для произвольного $i = 1, \ldots, m$ рассмотрим $K_i \cap \sum_{j \neq i} K_j$. В силу дистрибутивности модуля P_1 получаем, что

$$K_i \cap \sum_{j \neq i} K_j = \sum_{j \neq i} K_i \cap K_j$$

либо нуль, либо полупростой модуль. По предложению 2 $\sum_{j \neq i} K_i \cap K_j$ равна нулю и поэтому $P_i R = K_i \oplus \ldots \oplus K_m$.

Запишем $P_1 R$ в виде $P_1 R = (R_1 A_{12} \ldots A_{1s})$.

В силу первичности кольца A все множества $R_1, \ldots A_{1s}$ отличны от нуля. По теореме 2 множество A_{ij}, $j = 2, \ldots, s$, является цепным правым A_{jj}-модулем, который представляется в виде суммы цепных A_{jj}-модулей $K_1 f_j, \ldots, K_m f_j$. Поэтому существует номер i_j такой, что $A_{1j} = K_{i_j} f_j$. Аналогично можно считать, что $R_1 = K_1 f_1$, откуда $R_1 A \subset K_1$. Так как $P_1 R$ разлагается в прямую сумму, по крайней мере, двух модулей K_1 и K_2, можно считать, что $A_{12} = K_2 f_2$, откуда $A_{12} A \subset K_2$. Поскольку сумма $K_1 + K_2$ прямая, то $A_{12} A \cap R_1 A = 0$. Поэтому $A_{12} A_{21} = 0$. Но тогда кольцо $(f_1 + f_2) A (f_1 + f_2)$ не полупервично, что противоречит теореме 6. Левый случай разбирается аналогично. Теорема доказана.

4. Нетеровы многорядные кольца. Охарактеризуем колчаны многорядных колец.

Колчан $Q(A)$ кольца A называется связным, если множество его вершин нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся подмножеств, между которыми нет стрелок.

Отметим, что для нетерова полусовершенного кольца A неразложимость в прямое произведение колец эквивалентна связности его колчана [13].

Теорема 8. *Пусть A — нетерово n-рядное кольцо. Тогда из любой точки колчана кольца A выходит не более n стрелок и в любую точку колчана кольца A входит не более n стрелок, причем из одной точки в другую (возможно, совпадающую с исходной) идет не более одной стрелки. Обратно, если есть конечный граф, удовлетворяющий этим условиям, то существует n-рядное кольцо, колчаном которого является этот граф.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем необходимые дополнительные сведения.

Неразложимый проективный A-модуль P будем называть в точности n-рядным, если он дистрибутивен и его радикал PR — сумма $K_1, \ldots, K_n$ таких, что $K_i \cap K_j$ либо прост, либо нуль, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, и для любого i модуль K_i не содержится в $\sum_{j \neq i} K_j$.

Лемма 5. *Неразложимый проективный модуль P над многорядным нетеровым кольцом A* в *точности m-ряден тогда и только тогда, когда из вершины колчана $Q(A)$, отвечающей модулю P, выходит ровно m стрелок.*

Доказательство. Пусть из точки, отвечающей модулю P, выходит ровно m стрелок. Это означает, что в разложение полупростого модуля PR/PR^2 входит ровно m простых модулей.

Пусть $PR = K_1 + \ldots + K_t$ — в точности t-рядный модуль. Покажем, что тогда PR/PR^2 — прямая сумма t простых модулей. Если среди модулей $K_1, \ldots, K_t$ есть простые, то можно считать, что эти модули $K_{r+1}, \ldots, K_t$. Обозначим $N = K_1 + \ldots + K_r$ и $W = K_{r+1} + \ldots + K_t$. Очевидно, что W — прямая сумма $t - r$ простых модулей. Для завершения доказательства достаточно показать, что фактор-модуль N/NR — прямая сумма r простых модулей. Введем обозначения

$$L_i = K_1 + \ldots + K_{i-1} + K_iR + K_{i+1} + \ldots + K_r, \qquad \hat{K}_i = \sum_{j \neq i} K_j, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Покажем, что N/L_i — простой A-модуль. Очевидно, можно считать, что $K_i \cap \hat{K}_i$ — ненулевой простой модуль. Предположим, что N/L_i — непростой A-модуль. Тогда $N = L_i$ и $N/\hat{K}_i \simeq K_i/K_i \cap \hat{K}_i$. Но с другой стороны, этот модуль изоморфен $K_iR/K_i \cap \hat{K}_i$. Модуль K_i не может быть артиновым, так как длины модулей K_i и K_iR отличаются на единицу. Значит, K_i содержит счетную цепочку подмодулей $K_i \supset K_iR \supset \ldots \supset K_iR^n \supset \ldots$ и цоколь K_i отличен от нуля. Но этого не может быть ввиду теоремы 2.4 из [10], которая утверждает, что пересечение натуральных степеней радикала Джекобсона нетерова полусовершенного полудистрибутивного кольца равно нулю. Предположение не верно, следовательно, N/L_i — простой A-модуль. Все остальные утверждения леммы очевидны.

Теорема 9 [10]. *Следующие условия равносильны для артинова кольца A, квадрат которого равен нулю:*

а) кольцо A полудистрибутивно;

б) из каждой точки $Q(A)$ в другую (возможно, совпадающую с исходной) идет не более одной стрелки, и левый колчан $Q'(A)$ получается из колчана $Q(A)$ переворотом всех стрелок.

Поскольку для нетерова полусовершенного кольца A справедливо равенство $Q(A) = Q(A/R^2)$, теорема 9 характеризует колчаны полусовершенных полудистрибутивных колец.

Перейдем к доказательству теоремы 8. Из леммы 5 и теоремы 9 получаем утверждение первой половины теоремы.

Для доказательства обратного утверждения достаточно рассмотреть алгебру путей $K(Q)$ графа Q, удовлетворяющего условиям теоремы ([19], гл. III, § 6). Пусть J — фундаментальный идеал этой алгебры, т. е. идеал, порожденный стрелками. Рассмотрим $A = K(Q)/J^2$. Ясно, что алгебра A n-рядна и $Q(A) = Q$.

5. Наследственные многорядные кольца и нетеровы многорядные кольца с нулевым цоколем. Как отмечалось выше (следствие 4), по теореме 2.1 из [8] наследственное многорядное кольцо является нетеровым.

Из [20] следует, что для любого ненулевого идемпотента e наследственного кольца A кольцо eAe также наследственное.

Используя это утверждение и описание миноров второго порядка многорядных наследственных колец (следствие 4), а также теоремы 6 и 7, получаем теорему разложения, аналогичную теореме Чаттерса [21] ([4], теорема 20.30) для наследственных многорядных колец.

Теорема 10. *Наследственное многорядное кольцо — это прямое произведение первичных наследственных полуцепных колец и артинова наследственного многорядного кольца.*

Замечание 2. Как следует из описания миноров второго порядка нетеровых справа многорядных колец, еще одно наследственное справа кольцо, за исключением указанных в следствии 4, получается в случае 2 (см. п. 2). Это кольцо

$$B = \begin{pmatrix} \mathfrak{O} & D \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где $\mathfrak{O}$ — дискретно нормированное кольцо, D — его тело частных. Поскольку D — бесконечно порожденный левый $\mathfrak{O}$-модуль, то кольцо B не является нетеровым справа по теореме 2.3.

Как следует из [22], всякое первичное наследственное многорядное кольцо эквивалентно в смысле Мориты кольцу квадратных матриц $H_s(\mathfrak{O})$ порядка s вида

$$H_s(\mathfrak{O}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \dots & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{M} & \mathfrak{O} & \dots & \mathfrak{O} \\ \hdashline \mathfrak{M} & \mathfrak{M} & \dots & \mathfrak{O} \end{pmatrix},$$

где $\mathfrak{O}$ — дискретно нормированное кольцо с единственным максимальным идеалом $\mathfrak{M}$.

Для полного описания наследственных многорядных колец рассмотрим случай наследственных неразложимых артиновых многорядных колец.

Из теоремы 9 и определения первичного колчана (см., например, [9]) следует такая теорема.

Теорема 11. *Колчан и первичный колчан артинова полудистрибутивного кольца совпадают.*

Под кусочной областью мы понимаем полусовершенное кольцо, являющееся кусочной областью в смысле определения [23].

Определение. *Полусовершенное кольцо A называется кусочной областью, если любой ненулевой гомоморфизм неразложимых проективных A-модулей является мономорфизмом.*

Очевидно, всякое полусовершенное наследственное кольцо является кусочной областью.

Приведем необходимые для нас определения из теории графов.

Конечный ориентированный граф (колчан в терминологии Габриеля) называется ацикличным графом (колчаном), если в нем нет ориентированных циклов ([24], § 8.5).

Точка колчана Q называется истоком (стоком), если в нее не входит (из нее не выходит) стрелка ([24], § 8.6).

***Предложение* 3** ([24], § 8.6). *В ацикличном колчане существуют истоки и стоки.*

***Предложение* 4** ([24], § 8.6). *Пусть множество точек ацикличного колчана состоит из t элементов. Тогда их можно пронумеровать натуральными числами $\{1, \dots, t\}$ таким образом, что если из точки i в точку j идет стрелка, то $i < j$.*

Пусть B — неразложимое наследственное артиново n-рядное кольцо.

Из теоремы 11 и теоремы 3.3 [9] получаем, что колчан $Q(B)$ является ацикличным графом.

***Предложение* 5.** *Колчан $Q = Q(B)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *Q является ацикличным колчаном;*

2) *из каждой точки в другую ведет не более одного пути;*

3) *из каждой точки выходит не более n стрелок;*

4) *в каждую точку входит не более n стрелок;*

5) *если из точки выходит более чем одна стрелка, то эта точка является истоком;*

6) *если в точку входит более одной стрелки, то эта точка является стоком.*

Доказательство, очевидно, можно проводить для приведенного кольца B. Пусть $1 = e_1 + \ldots + e_s$ — разложение $1 \in B$ в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов. Идемпотенты $e_1, \ldots, e_s$ отвечают вершинам колчана $Q(B)$. Пронумеруем их так, как в предложении 4. Поскольку тела эндоморфизмов всех простых B-модулей изоморфны между собой и изоморфны телу D ([10], теорема 2.5), то, полагая $B_{ij} = e_i B e_j$, $i, j = 1, \ldots, s$, и отождествляя тела эндоморфизмов с телом D, получаем следующее двустороннее пирсово разложение для кольца B:

$$B = \begin{pmatrix} D & B_{12} & \ldots & B_{1s} \\ 0 & D & \ldots & B_{2s} \\ \hdashline 0 & 0 & \ldots & D \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

где B_{ij} — либо нуль, либо (по теореме 2) одномерное правое и одномерное левое векторные пространства над телом D.

Если в Q из точки i в точку j ведет стрелка, то $B_{ij} \neq 0$. Всякому пути ненулевой длины $i \to i_1 \to i_2 \to \ldots \to i_{m-1} \to i_m$ сопоставим произведение $B_{ii_1} B_{i_1 i_2} \ldots B_{i_{m-1} i_m}$, которое в силу наследственности B не равно нулю и поэтому совпадает с $B_{i_m i_m}$.

Пусть $P_i = e_i B$. Тогда $P_i R$ совпадает с суммой произведений пирсовых компонент, которые сопоставлены всем путям ненулевой длины с началом в точке i. Поэтому свойства 5 и 6 следуют из леммы 5, ее левого аналога и теоремы 9. Свойства 3 и 4 следуют из теоремы 8. Свойство 2 вытекает из полудистрибутивного кольца B. Свойство 1 доказано выше. Предложение доказано.

Следствие 6. *Неразложимое артиново наследственное n-рядное кольцо эквивалентно в смысле Мориты кольцу B, которое имеет двустороннее пирсово разложение* (*), *колчан $Q(B)$ удовлетворяет условиям* 1–6. *И обратно, все такие кольца артиновы, наследственны и n-рядны.*

Доказательство. То, что кольцо B артиново и n-рядно, очевидно. Наследственность кольца B доказывается точно так же, как и в теореме 7.4, гл. III, [19].

Как и в [10], полусовершенное полудистрибутивное кольцо будем называть *SPSD*-кольцом.

Предложение 6 [10]. *Пусть A — нетерово SPSD-кольцо, $1 = e_1 + \ldots + e_n$ — разложение $1 \in A$ в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов, $A_{ij} = e_i A e_j$, R_i — радикал Джекобсона кольца A_{ii}. Тогда $R_i A_{ij} = A_{ij} R_j$, $i, j = 1, \ldots, n$.*

Лемма 6. *Пусть A — нетерово SPSD-кольцо с нулевым цоколем. Тогда цоколь кольца eAe равен нулю для любого ненулевого идемпотента $e \in A$.*

Доказательство. Ясно, что исходное кольцо A с радикалом Джекобсона R можно считать приведенным. Будем доказывать лемму индукцией по числу s попарно ортогональных локальных идемпотентов, в сумму которых разлагается $1 \in A$. База индукции тривиальна. Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда $e = e_1 + \ldots + e_{s-1}$ и $1 = e_1 + \ldots + e_{s-1} + e_s$ — разложение единицы кольца A в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов. Обозначим $f = e_s$, $eAe = A_1$, $fAf = A_2$, $eAf = X$, $fAe = Y$, R_i — радикал Джекобсона кольца A_i, $i = 1, 2$. По предложению 7 $XR_2 \subset R_1 X$. Предположим, что цоколь кольца eAe отличен от нуля. Пусть U — простой A_1-модуль, лежащий в eAe. Положим $\tilde{U} = U + UX$. Ясно, что $\tilde{U}$ — ненулевой главный идеал кольца A. Покажем, что $\tilde{U}R^2 = 0$. Действительно, $\tilde{U}R = UX$ и $\tilde{U}R^2 = UXR_2$. Но $UXR_2 \subset UR_1X$, откуда следует, что $\tilde{U}R^2 = 0$. Полученное противоречие показывает, что цоколь кольца eAe равен нулю и по предположению индукции для любого идемпотента g, разлагающегося в сумму $t \le s-1$ попарно ортонормальных локальных идемпотентов, цоколь кольца gAg равен нулю. Лемма доказана.

Теорема 12. *Неразложимое нетерово полусовершенное многорядное кольцо A с нулевым цоколем является полуцепным первичным кольцом.*

Доказательство. По лемме 6, теоремам 4 и 6 получаем, что кольцо A полупервично. Поэтому утверждение теоремы следует из теоремы 7.

1. *Скорняков Л. А.* Когда все модули полуцепные? // Мат. заметки. – 1969. – **5**, № 2. – С. 173–182.
2. *Дрозд Ю. А.* Об обобщенно однорядных кольцах // Там же. – 1975. – **18**, № 5. – С. 705–710.
3. *Warfield R. B.* Serial rings and finitely presented modules // J. Algebra. – 1975. – **37**, № 2. – P. 187–222.
4. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. – М.: Мир, 1979. – Т. 2. – 464 с.
5. *Fuller K. R.* Weakly symmetric rings of distributive module type // Comm. Algebra. – 1977. – № 5. – P. 997–1008.
6. *Кириченко В. В., Костюкевич П. П.* Бирядные кольца // Укр. мат. журн. – 1976. – **38**, № 6. – С. 718–723.
7. *Кириченко В. В., Яременко Ю. В.* Нетеровы бирядные кольца // Там же. – 1988. – **40**, № 4. – С. 435–440.
8. *Кириченко В. В., Костюкевич П. П., Яременко Ю. В.* Бирядные кольца и модули над ними // Алгебраические структуры и их применение. – УМК ВО, 1988. – С. 35–72.
9. *Кириченко В. В., Самир Валио, Яременко Ю. В.* Полусовершенные кольца и их колчаны // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 438–456.
10. *Кириченко В. В., Хибина М. А.* Полусовершенные полудистрибутивные кольца // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 457–480.
11. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen. I // Manuscripta Math. – 1972. – № 6. – P. 71–103.
12. *Camillo V. P.* Distributive modules // J. Algebra. – 1975. – **36**, № 1. – P. 16–25.
13. *Кириченко В. В.* Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб. – 1976. – **99**, № 4. – С. 559–581.
14. *Кириченко В. В.* Обобщенно однорядные кольца. – Киев, 1975. – 58 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 75.1).
15. *Туганбаев А. А.* О полудистрибутивных кольцах // XIX Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. сообщ. – Львов, 1987. – Ч. 1. – С. 112.
16. *Басс Х.* Алгебраическая *K*-теория. – М.: Мир, 1973. – 591 с.
17. *Drozd Yu. A.* Minors and reduction theorems // Coll Math. Soc. J. Bolyai. – 1971. – № 6. – P. 173–176.
18. *Кириченко В. В.* Кольца и модули. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1981. – 64 с.
19. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры. – Киев: Вища шк., 1980. – 192 с.
20. *Zaks A.* Hereditary local rings // Michigan Math. J. – 1970. – **17**. – P. 267–272.
21. *Chatters A. W.* A decomposition theorem for Noetherian hereditary rings // Bull. London Math. Soc. – 1972. – **4**. – P. 125–126.
22. *Кириченко В. В.* О полуцепных наследственных и полунаследственных кольцах // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1982. – **114**. – С. 137–147.
23. *Gordon R., Small L. W.* Piecewise domains // J. Algebra. – 1972. – **23**, № 3. – P. 553–564.
24. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. – М. Мир: 1986. – 426 с.

Получено 26.10.95