УДК 517.97

А. А. Ковалевский
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

Г-СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

By using special local characteristics of domains $\Omega_s \subset \Omega$, $s = 1, 2, \ldots$, we establish necessary and sufficient conditions for the Γ-convergence of sequences of integral functionals $I_{\lambda, s}\colon \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s) \to \to \mathbb{R}$, $\lambda \subset \Omega$, to integral functionals defined on $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$.

За допомогою спеціальних локальних характерестик областей $\Omega_s \subset \Omega$, $s = 1, 2, \ldots$, встановлюються необхідні та достатні умови Γ-збіжності послідовностей інтегральних функціоналів $I_{\lambda, s}\colon \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$, $\lambda \subset \Omega$, до інтегральних функціоналів, визначених на $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$.

В настоящей работе изучается Γ-сходимость функционалов $I_s : \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s) \to \to \mathbb{R}$, где Ω_s, $s = 1, 2, \ldots$, — последовательность областей, содержащихся в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $m > 1$, $k \in \mathbb{N}$. Описывается связь этой сходимости со сходимостью решений вариационных задач Дирихле, а также некоторых вариационных задач с ограничениями. Вводятся специальные локальные характеристики областей Ω_s. С помощью этих характеристик определяются функции F'_t, F''_t, в терминах сходимости которых устанавливаются необходимые и достаточные условия Γ-сходимости последовательностей интегральных функционалов $I_{\lambda,s} : \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$, зависящих от открытых множеств $\lambda \subset \Omega$, к интегральным функционалам, заданным на $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$. Описывается конкретная ситуация, в которой сходимость функций F'_t и F''_t имеет место.

Основные результаты статьи анонсированы в [1]. Теорема о выборе из последовательности интегральных функционалов $I_s : \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ последовательности, Γ-сходящейся к интегральному функционалу $I : \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega) \to \mathbb{R}$, сформулирована в [2].

Отметим, что для квадратичных интегральных функционалов $\overset{\circ}{W}{}^{k,2}(\Omega_s) \to \to \mathbb{R}$ необходимые и достаточные, а для интегральных функционалов I_s : $\overset{\circ}{W}{}^{1,m}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ достаточные условия сходимости решений вариационных задач Дирихле получены соответственно в [3, 4]. Результаты о сходимости решений этих задач для случаев ($m = 2$ и $k = 1$), рассмотренных в [3, 4], вытекают из результатов пп. 2, 5 и 6 данной статьи.

Исходные предположения такие: $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей; $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω; $m \in \mathbb{R}$, $m > 1$; $k \in \mathbb{N}$.

Используются обозначения

$$P'_{n,k} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+ : |\alpha| \leq k-1\}, \qquad P''_{n,k} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+ : |\alpha| = k\},$$

$c_{n,k}$ — число элементов множества $P'_{n,k} \cup P''_{n,k}$; $\mathbb{R}'_{n,k}$ ($\mathbb{R}''_{n,k}$) — пространство всех отображений $P'_{n,k}$ ($P''_{n,k}$) в $\mathbb{R}$; если $\xi \in \mathbb{R}'_{n,k}$, $\eta \in \mathbb{R}''_{n,k}$, то

$$|\xi| = \left(\sum_{\alpha \in P'_{n,k}} \xi_\alpha^2\right)^{1/2}, \quad |\eta| = \left(\sum_{\alpha \in P''_{n,k}} \eta_\alpha^2\right)^{1/2};$$

если G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u \in W^{k,m}(G)$, то $\delta_k u$ — отображение G в $\mathbb{R}'_{n,k}$ такое, что для любых $x \in G$ и $\alpha \in P'_{n,k}$ $(\delta_k u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$; $\nabla_k u$ — отображение G в $\mathbb{R}''_{n,k}$ такое, что для любых $x \in G$ и $\alpha \in P''_{n,k}$ $(\nabla_k u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$. Если $l \in \mathbb{N}$, то

$$\Omega^l = \left\{x \in \Omega \colon d(x, \partial\Omega) \ge \frac{1}{l}\right\}, \quad H^l = \{\eta \in \mathbb{R}''_{n,k} : |\eta| \le l\};$$

$$l_0 = \min\{l \in \mathbb{N} : \Omega^l \ne \varnothing\}.$$

Если $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{N}$, то

$$Q_t(y) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - y_i| < \frac{1}{2t}, \ i = 1, \dots, n\right\}.$$

1. Определение и основное свойство Г-сходимости. Прежде всего определим отображения p_s. Если $s \in \mathbb{N}$, то p_s — отображение $\mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$ в $\mathring{W}^{k,m}(\Omega)$ такое, что для любой функции $u \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$ $(p_s u)(x) = u(x)$, если $x \in \Omega_s$, и $(p_s u)(x) = 0$, если $x \in \Omega \setminus \Omega_s$.

***Определение* 1.** *Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ I_s — функционал на $\mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$, I — функционал на $\mathring{W}^{k,m}(\Omega)$. Будем говорить, что последовательность $\{I_s\}$ Г-сходится к функционалу I, если:*

1) для любой функции $u \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega)$ существует последовательность $w_s \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$ такая, что $p_s w_s \to u$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$ и

$$\lim_{s \to \infty} I_s(w_s) = I(u);$$

2) для любой функции $u \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega)$ и любой последовательности $u_s \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$ такой, что $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$, справедливо неравенство

$$\varliminf_{s \to \infty} I_s(u_s) \ge I(u).$$

Основное свойство Г-сходимости функционалов $I_s : \mathring{W}^{k,m}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ состоит в том, что она сопровождается определенной сходимостью решений вариационных задач Дирихле для этих функционалов. Приведем соответствующий результат.

Введем обозначение: если I — функционал, V — непустое множество из его области определения, то $\operatorname{Min}(I, V)$ — множество всех элементов V, минимизирующих I на V.

Предложение 1. *Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ I_s — функционал на $\mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$, I — функционал на $\mathring{W}^{k,m}(\Omega)$; последовательность $\{I_s\}$ Г-сходится к функционалу I, для любого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in \operatorname{Min}(I_s, \mathring{W}^{k,m}(\Omega_s))$, причем*

$$\sup_s \|u_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)} < \infty.$$

Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbb{N}$ *и* $u \in$ $\in \operatorname{Min}(I, \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega))$ *такие, что* $p_{s_t} u_{s_t} \to u$ *слабо в* $W^{k,m}(\Omega)$ *и*

$$\lim_{t \to \infty} I_{s_t}(u_{s_t}) = I(u).$$

***Замечание* 1.** Если выполняются условия предложения 1 и, кроме того, функционал I строго выпуклый на $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$, то существует $u \in \operatorname{Min}(I,$ $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega))$, причем $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$ и

$$\lim_{s \to \infty} I_s(u_s) = I(u). \tag{1}$$

Покажем, что Г-сходимость функционалов $I_s : \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ влечет сходимость решений и некоторых других вариационных задач.

***Предложение* 2.** *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ I_s *— функционал на* $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$, V_s *— непустое множество в* $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$, I *— функционал на* $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$, V *— непустое выпуклое множество в* $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$. *Пусть последовательность* $\{I_s\}$ Г*-сходится к функционалу* I, *функционал* I *строго выпуклый на* V *и выполняются условия:*

А) если для любого $s \in \mathbb{N}$ $v_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$, $v \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$, $p_s v_s \to v$ *слабо в* $W^{k,m}(\Omega)$, N_1 *— бесконечное подмножество* $\mathbb{N}$ *и для всех* $s \in N_1$ $v_s \in$ $\in V_s$, *то* $v \in V$;

Б) если $v \in V$, *то существует последовательность* $v_s \in V_s$ *такая, что*

$$\overline{\lim_{s \to \infty}}\, I_s(v_s) \le I(v).$$

Пусть также для всех $s \in \mathbb{N}$

$$u_s \in \operatorname{Min}(I_s, V_s); \qquad \sup_s \|u_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)} < \infty.$$

Тогда существует функция $u \in \operatorname{Min}(I, V)$, *причем* $p_s u_s \to u$ *слабо в* $W^{k,m}(\Omega)$ *и справедливо равенство* (1).

Доказательство. В силу ограниченности последовательности норм $\|u_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)}$ последовательность $\{p_s u_s\}$ ограничена в $W^{k,m}(\Omega)$ и, следовательно, существуют возрастающая последовательность $\{s_t\} \subset \mathbb{N}$ и $u \in$ $\in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ такие, что $p_{s_t} u_{s_t} \to u$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$. Обозначим через τ' и τ'' соответственно нижний и верхний пределы последовательности чисел $I_{s_t}(u_{s_t})$. Используя слабую сходимость $\{p_{s_t} u_{s_t}\}$ к u, условие А) и Г-сходимость $\{I_s\}$ к I, получаем, что $u \in V$ и $\tau' \ge I(u)$. Пусть v — произвольная функция из V. Согласно условию Б) существует последовательность $v_s \in V_s$ такая, что

$$\overline{\lim_{s \to \infty}}\, I_s(v_s) \le I(v).$$

Отсюда и из включения $u_s \in \operatorname{Min}(I_s, V_s)$ $(\forall\, s)$ вытекает неравенство $\tau'' \le I(v)$, откуда с учетом неравенства $\tau' \geq I(u)$ заключаем, что $u \in \mathrm{Min}\,(I, V)$. Предположим, что последовательность $\{p_s u_s\}$ не сходится слабо к u в $W^{k,m}(\Omega)$. Следовательно, найдутся возрастающая последовательность $\{s'_t\} \subset \mathbb{N}$ и $u' \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ такие, что $p_{s'_t} u_{s'_t} \to u'$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$ и $u' \neq u$. Тогда аналогично установленному для u будем иметь $u' \in \mathrm{Min}\,(I, V)$. Положим $w = (u + u')/2$. В силу выпуклости множества V $w \in V$ и, следовательно, $I(w) \geq I(u)$. Но в силу строгой выпуклости I на V

$$I(w) < \frac{1}{2} I(u) + \frac{1}{2} I(u') = I(u).$$

Из полученного противоречия вытекает, что $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$. А так как $\{I_s\}$ Г-сходится к I, то

$$\varliminf_{s \to \infty} I_s(u_s) \geq I(u).$$

Кроме того, согласно условию Б) существует последовательность $w_s \in V_s$ такая, что

$$\varlimsup_{s \to \infty} I_s(w_s) \leq I(u).$$

Отсюда и из включения $u_s \in \mathrm{Min}\,(I_s, V_s)$ $(\forall\, s)$ вытекает неравенство

$$\varlimsup_{s \to \infty} I_s(u_s) \leq I(u),$$

откуда с учетом неравенства для нижнего предела последовательности $\{I_s(u_s)\}$ получаем (1). Предложение доказано.

Пример множеств V_s, V, удовлетворяющих условиям А) и Б), описывается в теореме 2.

***Замечание* 2.** Если для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ существует последовательность $w_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$ такая, что $p_s w_s \to u$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$, то

$$\lim_{s \to \infty} \mathrm{mes}\,(\Omega \setminus \Omega_s) = 0. \tag{2}$$

Отсюда вытекает, что если какая-либо последовательность функционалов $I_s : \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ Г-сходится, то справедливо равенство (2).

2. О сходимости решений вариационных задач для интегральных функционалов. Пусть $c \geq 1$ и $\{f_s\}$ — последовательность каратеодориевских функций на $\Omega \times \mathbb{R}''_{n,k}$, причем для любых $s \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}''_{n,k}$, $\tau \in [0, 1]$ справедливы соотношения

$$f_s(x, 0) = 0, \tag{3}$$

$$c^{-1} |\eta|^m \leq f_s(x, \eta) \leq c(1 + |\eta|)^m, \tag{4}$$

$$f_s(x, (1-\tau)\eta + \tau\eta') \leq (1-\tau) f_s(x, \eta) + \tau f_s(x, \eta'). \tag{5}$$

Для дальнейшего полезно заметить, что для любых $s \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$, η, $\eta' \in \mathbb{R}''_{n,k}$

$$|f_s(x, \eta) - f_s(x, \eta')| \leq 2^m c (1 + |\eta| + |\eta'|)^{m-1} |\eta - \eta'|. \tag{6}$$

Последнее неравенство вытекает из (4) и (5).

Обозначим через Λ совокупность всех непустых открытых множеств λ в $\mathbb{R}^n$ таких, что $\lambda \subset \Omega$ и $\operatorname{mes} \partial\lambda = 0$. Определим функционалы $I_{\lambda,s}$ следующим образом: если $\lambda \in \Lambda$, $s \in \mathbb{N}$, то $I_{\lambda,s}$ — функционал на $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$ такой, что для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$

$$I_{\lambda,s}(u) = \int\limits_{\lambda \cap \Omega_s} f_s(x, \nabla_k u)\, dx.$$

Приведем два результата о сходимости решений вариационных задач для функционалов с главными частями $I_{\Omega,s}$.

Теорема 1. *Пусть* Φ *— слабо непрерывный функционал на* $W^{k,m}(\Omega)$, *удовлетворяющий следующему условию: если* $\{u_t\} \subset W^{k,m}(\Omega)$ *и*

$$\lim_{t\to\infty} \|u_t\|_{W^{k,m}(\Omega)} = \infty,$$

то

$$\varliminf_{t\to\infty} \Phi(u_t)\, \|u_t\|^{-m}_{W^{k,m}(\Omega)} \geq 0. \tag{7}$$

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ J_s *— функционал на* $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$ *такой, что для* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$

$$J_s(u) = I_{\Omega,s}(u) + \Phi(p_s u);$$

последовательность $\{I_{\Omega,s}\}$ Γ*-сходится к функционалу* $I\colon \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega) \to \mathbb{R}$, J *— функционал на* $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ *такой, что для* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ $J(u) = I(u) + \Phi(u)$, *причем* J *строго выпуклый на* $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$. *Тогда если для всех* $s \in \mathbb{N}$

$$u_s \in \operatorname{Min}(J_s, \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)),$$

то существует функция $u \in \operatorname{Min}(J, \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega))$, *причем* $p_s u_s \to u$ *слабо в* $W^{k,m}(\Omega)$ *и*

$$\lim_{s\to\infty} J_s(u_s) = J(u). \tag{8}$$

Доказательство. Известно, что существует $\kappa > 0$ такое, что для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{W^{k,m}(\Omega)} \leq \kappa \|\nabla_k u\|_{L^m(\Omega)}. \tag{9}$$

Используя этот факт, соотношения (4), (7), а также слабую полунепрерывность снизу $I_{\Omega,s}$ на $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$ и слабую непрерывность Φ на $W^{k,m}(\Omega)$, обычным способом (см., например, [5, с. 44]) устанавливаем, что для всех $s \in \mathbb{N}$ $\operatorname{Min}(J_s, \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)) \neq \varnothing$.

Пусть теперь для всех $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in \operatorname{Min}(J_s, \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s))$. Имеем

$$\sup_s \|u_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)} < \infty,$$

что является следствием (4), (7) и (9). Заметим также, что ввиду Γ-сходимости

$\{I_{\Omega,s}\}$ к I и слабой непрерывности Φ на $W^{k,m}(\Omega)$ последовательность $\{J_s\}$ Г-сходится к функционалу J. Таким образом, для функционалов J_s, J выполняются все условия предложения 1. Отсюда с учетом замечания 1 получаем, что существует функция $u \in \mathrm{Min}(J, \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega))$, причем $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$ и выполняется равенство (8). Теорема доказана.

***Замечание* 3.** Простыми примерами слабо непрерывных на $W^{k,m}(\Omega)$ функционалов, удовлетворяющих условию (7), являются следующие функционалы:

а) $$\Phi \in (W^{k,m}(\Omega))^*;$$

б) $$\Phi(u) = \|u\|^m_{L^m(\Omega)} + \langle h, u\rangle, \quad h \in (W^{k,m}(\Omega))^*;$$

в) $$\Phi(u) = \sum_{|\alpha| \le k-1} \int_\Omega a_\alpha |D^\alpha u|^{m_\alpha}\, dx, \; m_\alpha \in (0, m), \; a_\alpha \in L^{m/(m-m_\alpha)}(\Omega).$$

Очевидно также, что условию (7) удовлетворяет всякий неотрицательный функционал на $W^{k,m}(\Omega)$. Условие строгой выпуклости на $\overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega)$ функционала J из теоремы 1 выполняется, например, в случае, когда функционал Φ определяется формулой б).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1, *а также для любого* $s \in \mathbb{N}$

$$V_s = \{u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s): \; u \ge 0 \;\textit{п.в. на}\; \Omega_s\},$$

$$V = \{u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega): \; u \ge 0 \;\textit{п.в. на}\; \Omega\}.$$

Предположим, что $k = 1$. *Тогда, если для всех* $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in \mathrm{Min}(J_s, V_s)$ *то существует функция* $u \in \mathrm{Min}(J, V)$, *причем* $p_s u_s \to u$ *слабо в* $W^{k,m}(\Omega)$ *и справедливо равенство* (8).

Доказательство. Прежде всего заметим, что аналогично сказанному в доказательстве теоремы 1 для всех $s \in \mathbb{N}$ $\mathrm{Min}(J_s, V_s) \ne \varnothing$.

Пусть для всех $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in \mathrm{Min}(J_s, V_s)$. Используя (4), (7) и (9), устанавливаем неравенство

$$\sup_s \|u_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)} < \infty.$$

Ввиду Г-сходимости $\{I_{\Omega,s}\}$ к I и слабой непрерывности Φ на $W^{k,m}(\Omega)$ последовательность $\{J_s\}$ Г-сходится к функционалу J, который, очевидно, является строго выпуклым на V. Учитывая предложение 2, видим, что для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение условий А) и Б) из предложения 2 для множеств V_s, V и функционалов J_s, J.

Проверка выполнения условия А) не представляет затруднений. Поэтому остановимся на доказательстве выполнения условия Б). Пусть $v \in V$. В силу Г-сходимости $\{I_{\Omega,s}\}$ к I существует последовательность $w_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$ такая, что $p_s w_s \to v$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$ и

$$\lim_{s\to\infty} I_{\Omega,s}(w_s) = I(v). \tag{10}$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, причем $\varphi = 1$ на $\mathrm{supp}\, v$. Так как $\{I_{\Omega,s}\}$ Г-сходится к I, то существует последовательность $\varphi_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$ такая, что $p_s\varphi_s \to \varphi$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$ и

$$\lim_{s\to\infty} I_{\Omega,s}(\varphi_s) = I(\varphi). \tag{11}$$

Положим для всех $s \in \mathbb{N}$

$$\mu_s = \left(\|p_s w_s - v\|_{L^1(\Omega)} + s^{-1}\right)^{1/2}, \quad v_s = \max\{w_s + \mu_s\varphi_s, 0\}.$$

Поскольку $k=1$, то для всех $s \in \mathbb{N}$ $v_s \in V_s$. Используя (3)–(5), (10), (11) и слабую сходимость последовательностей $\{p_s w_s\}$, $\{p_s\varphi_s\}$ соответственно к v, φ, устанавливаем, что

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\, J_s(v_s) \le I(v).$$

Таким образом, условие Б) для рассматриваемых множеств V_s, V и функционалов J_s, J выполняется. Теорема доказана.

3. Функции F_t', F_t''. Положим для произвольных $t, r, s \in \mathbb{N}$, $(y,\xi) \in \Omega\times\mathbb{R}$

$$V_{t,r,s}(y,\xi) = \left\{u \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)\colon \|\nabla_k u\|_{L^m(\Omega_s)} \le t^{k+1}, \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} |\delta_k(u-\xi)|^m\,dx \le r^{-1}\right\}.$$

***Определение* 2.** *Пусть* $t, r, s \in \mathbb{N}$, $(y,\xi,\eta) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}''_{n,k}$. *Если* $V_{t,r,s}(y,\xi) = \varnothing$, *то положим* $F_{t,r,s}(y,\xi,\eta) = t$; *если же* $V_{t,r,s}(y,\xi) \ne \varnothing$, *то положим*

$$F_{t,r,s}(y,\xi,\eta) = t^n \inf_{u\in V_{t,r,s}(y,\xi)} \int\limits_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x,\eta+\nabla_k u)\,dx.$$

Отметим, что для любых $t, r, s \in \mathbb{N}$ и $(y,\xi,\eta) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}''_{n,k}$

$$0 \le F_{t,r,s}(y,\xi,\eta) \le c(2+|\eta|)^m t^{(k+1)m+n}.$$

Это легко устанавливается с помощью неравенства (4).

Положим теперь для произвольных $t, r \in \mathbb{N}$ и $(y,\xi,\eta) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}''_{n,k}$

$$F'_{t,r}(y,\xi,\eta) = \underline{\lim_{s\to\infty}}\, F_{t,r,s}(y,\xi,\eta),$$

$$F''_{t,r}(y,\xi,\eta) = \overline{\lim_{s\to\infty}}\, F_{t,r,s}(y,\xi,\eta).$$

Далее, пусть для $t \in \mathbb{N}$ F_t', F_t'' — функции на $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}''_{n,k}$ такие, что для произвольных $(y,\xi,\eta) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}''_{n,k}$ справедливы равенства

$$F_t'(y,\xi,\eta) = \sup_r F'_{t,r}(y,\xi,\eta), \qquad F_t''(y,\xi,\eta) = \sup_r F''_{t,r}(y,\xi,\eta).$$

Заметим, что в силу (3) и (4) для любых $t \in \mathbb{N}$ и $y \in \Omega$

$$F_t'(y,0,0) = 0, \qquad F_t''(y,0,0) = 0. \tag{12}$$

***Предложение* 3.** *Пусть f — функция на* $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}''_{n,k}$, $b \ge 1$ *и для любых* $y \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}''_{n,k}$ *выполняется неравенство*

$$0 \le f(y, \xi, \eta) \le b(1 + |\xi| + |\eta|)^m.$$

Пусть далее последовательность $\{F_t''\}$ *сходится к* f *на* $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{n,k}''$. *Тогда для любых* $y \in \Omega$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}_{n,k}''$ *справедливо соотношение*

$$|f(y, \xi, \eta) - f(y, \xi', \eta')| \le$$

$$\le 20^m c^2 b(1 + |\xi| + |\xi'| + |\eta| + |\eta'|)^{m-1}(|\xi - \xi'| + |\eta - \eta'|).$$

Доказательство этого предложения основывается на использовании неравенств (4)–(6).

4. Необходимые условия Г-сходимости интегральных функционалов. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех непрерывных функций f на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{n,k}''$, удовлетворяющих условию: существует $b \ge 1$ такое, что для любых

$$x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \eta \in \mathbb{R}_{n,k}'' \quad 0 \le f(y, \xi, \eta) \le b(1 + |\xi| + |\eta|)^m.$$

Определим функционалы I_λ^f следующим образом: если $f \in \mathcal{F}$, $\lambda \in \Lambda$, то I_λ^f — функционал на $\mathring{W}^{k,m}(\Omega)$ такой, что для всех $u \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega)$

$$I_\lambda^f(u) = \int\limits_\lambda f(x, u, \nabla_k u)\, dx.$$

Теорема 3. *Пусть* $f \in \mathcal{F}$ *и для любого* $\lambda \in \Lambda$ *последовательность* $\{I_{\lambda,s}\}$ Г-*сходится к функционалу* I_λ^f. *Тогда для любого* $l \ge l_0$ *последовательности* $\{F_t'\}$, $\{F_t''\}$ *сходятся к функции* f *равномерно на* $\Omega^l \times [-l, l] \times H^l$.

Доказательство. Так как $f \in \mathcal{F}$, существует $b \ge 1$ такое, что для любых $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}_{n,k}''$

$$0 \le f(x, \xi, \eta) \le b(1 + |\xi| + |\eta|)^m. \tag{13}$$

Зафиксируем $l \ge l_0$ и пусть ε — произвольное положительное число из интервала $(0, 1)$. Положим

$$d = 1 + \operatorname{diam}\Omega, \qquad a = 2\, c_{n,k}^3 (k!) d^k l, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon[2(3a)^m b c^2]^{-1}.$$

В силу равномерной непрерывности функции f на $\Omega^{l+1} \times [-(l+1), l+1] \times H^l$ существует $\sigma \in (0, \varepsilon_1)$ такое, что для любых $(y, \xi, \eta), (y', \xi', \eta') \in \Omega^{l+1} \times [-(l+1), l+1] \times H^l$, удовлетворяющих неравенству $|y - y'|^2 + |\xi - \xi'|^2 + |\eta - \eta'|^2 \le \sigma^2$, справедливо неравенство

$$|f(y, \xi, \eta) - f(y', \xi', \eta')| \le \varepsilon_1. \tag{14}$$

Пусть $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $0 \le \chi \le 1$ в $\mathbb{R}^n$, $\chi = 1$ на $Q_2(0)$, $\chi = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus Q_1(0)$. Положим

$$\mu = \max_{|\alpha| \le k} \max_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \chi(x)|$$

и возьмем $t_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$t_0 \ge \max\{a^2 b c(1 + \kappa)(1 + \mu)(1 + \operatorname{mes}\Omega),\ c_{n,k} n l \sigma^{-1}\},$$

где κ — постоянная из неравенства (9).

Зафиксируем теперь $t \in \mathbb{N}$, $t \geq t_0$, и $(y, \xi, \eta) \in \Omega^l \times [-l, l] \times H^l$. Положим $t_1 = t/2$, если t четное, $t_1 = (t-1)/2$, если t нечетное. Имеем $\overline{Q_t(y)} \subset \Omega^{l+1}$, $\overline{Q_{t_1}(y)} \subset \Omega$. Пусть φ — функция на Ω такая, что для всех $x \in \Omega$ $\varphi(x) = \chi(t(x-y)/2)$. В силу Γ-сходимости $\{I_{\Omega,s}\}$ к функционалу I_Ω^f существует последовательность $\varphi_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$ такая, что $p_s \varphi_s \to \varphi$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$ и

$$\lim_{s \to \infty} I_{\Omega,s}(\varphi_s) = I_\Omega^f(\varphi). \tag{15}$$

Используя это равенство и неравенства (4), (9), (13), устанавливаем, что

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} \|\varphi_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)} \leq \frac{1}{2a} t^{k+1}. \tag{16}$$

Положим $\lambda = Q_t(y)$ и покажем, что

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} I_{\lambda,s}(\varphi_s) = I_\lambda^f(\varphi). \tag{17}$$

Пусть $\lambda_1 = \Omega \setminus \overline{\lambda}$. Так как $\lambda_1 \in \Lambda$, в силу Γ-сходимости последовательности $\{I_{\lambda_1,s}\}$ к функционалу $I_{\lambda_1}^f$

$$\underline{\lim_{s \to \infty}} I_{\lambda_1,s}(\varphi_s) \geq I_{\lambda_1}^f(\varphi).$$

Отсюда и из (15) с помощью равенств

$$I_{\lambda,s}(\varphi_s) = I_{\Omega,s}(\varphi_s) - I_{\lambda_1,s}(\varphi_s) \quad (\forall s),$$

$$I_\lambda^f(\varphi) = I_\Omega^f(\varphi) - I_{\lambda_1}^f(\varphi)$$

выводим (17). Используя неравенства (4), (17) и (13), устанавливаем, что

$$\overline{\lim_{s \to \infty}} \int_{\lambda \cap \Omega_s} |\nabla_k \varphi_s|^m \, dx \leq 2^m b c t^{-n}. \tag{18}$$

Далее, пусть h — функция на Ω такая, что для всех $x \in \Omega$

$$h(x) = \xi + \sum_{\alpha \in P''_{n,k}} \frac{1}{\alpha!} \eta_\alpha (x-y)^\alpha.$$

Имеем

$$|D^\beta(h-\xi)| \leq c_{n,k} d^k l \quad \text{на} \quad \Omega \quad (|\beta| \leq k), \tag{19}$$

$$|D^\beta(h-\xi)| \leq \sigma \quad \text{на} \quad \lambda \quad (|\beta| \leq k-1); \quad \forall x \in \lambda \ |x-y|^2 + |h(x)-\xi|^2 \leq \sigma^2. \tag{20}$$

Положим $u = h\varphi$. Используя (19), находим

$$\|u\|_{L^m(\Omega)} \leq \frac{a}{2}(1 + \operatorname{mes}\Omega), \qquad \|\nabla_k u\|_{L^m(\Omega)} \leq \mu a (1 + \operatorname{mes}\Omega) t^k. \tag{21}$$

С помощью (13), (14), (20), (21) получаем неравенства

$$I_\Omega^f(u) \leq (ca^m)^{-1} t^{(k+1)m}, \qquad |I_\lambda^f(u) - t^{-n} f(y, \xi, \eta)| \leq \varepsilon_1 t^{-n}. \tag{22}$$

В силу Γ-сходимости $\{I_{\Omega,s}\}$ к I_Ω^f существует последовательность $w_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$ такая, что $p_s w_s \to u$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$ и

$$\lim_{s\to\infty} I_{\Omega,s}(w_s) = I_\Omega^f(u). \tag{23}$$

Используя это равенство, неравенство (4) и первое из неравенств (22), устанавливаем, что

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \|\nabla_k w_s\|_{L^m(\Omega_s)} \le \frac{1}{a} t^{k+1}. \tag{24}$$

Отметим также, что выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} I_{\lambda,s}(w_s) = I_\lambda^f(u). \tag{25}$$

Оно доказывается с помощью (23) аналогично доказательству (17) с помощью (15). Используя (25), (4), второе из неравенств (22) и неравенство (13), получаем

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{\lambda\cap\Omega_s} |\nabla_k w_s|^m dx \le 2^m bc(1+l)^m t^{-n}. \tag{26}$$

Пусть теперь для всякого $s \in \mathbb{N}$ u_s — функция на Ω_s такая, что для всех $x \in \Omega_s$

$$u_s(x) = w_s(x) - [h(x) - \xi]\varphi_s(x).$$

Ясно, что для всякого $s \in \mathbb{N}$ $u_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$. Используя (16), (24) и слабую сходимость последовательностей $\{p_s w_s\}$, $\{p_s \varphi_s\}$ соответственно к u, φ, устанавливаем, что

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \|\nabla_k u_s\|_{L^m(\Omega_s)} \le \frac{3}{4} t^{k+1}, \qquad \lim_{s\to\infty} \int\limits_{\lambda\cap\Omega_s} |\delta_k(u_s - \xi)|^m dx = 0. \tag{27}$$

Справедливо неравенство

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} \int\limits_{\lambda\cap\Omega_s} f_s(x, \eta + \nabla_k u_s) dx \le [f(y,\xi,\eta) + \varepsilon] t^{-n}. \tag{28}$$

Оно устанавливается с помощью (4), (5), (20), (25), второго из неравенств (22), (18), (26) и слабой сходимости $\{p_s \varphi_s\}$ к φ.

Пусть теперь $r \in \mathbb{N}$. Из соотношений (27) следует, что для всех $s \ge s_r$ $u_s \in V_{t,r,s}(y,\xi)$. Тогда для любого $s \ge s_r$ число $t^{-n} F_{t,r,s}(y,\xi,\eta)$ не превышает интеграла от $f_s(\cdot, \eta + \nabla_k u_s(\cdot))$ по множеству $\lambda \cap \Omega_s$. Отсюда и из (28) вытекает $F''_{t,r}(y,\xi,\eta) \le f(y,\xi,\eta) + \varepsilon$. А так как здесь r — произвольное число из $\mathbb{N}$, получаем

$$F''_t(y,\xi,\eta) \le f(y,\xi,\eta) + \varepsilon. \tag{29}$$

Покажем теперь, что

$$F'_t(y,\xi,\eta) \ge f(y,\xi,\eta) - \varepsilon. \tag{30}$$

Зафиксируем снова $r \in \mathbb{N}$. Используя соотношения (27), устанавливаем, что существует возрастающая последовательность $\{s_i\} \subset \mathbb{N}$ такая, что для всех i $V_{t,r,s_i}(y,\xi) \ne \varnothing$ и

$$F_{t,r,s_i}(y,\xi,\eta) \le F_t'(y,\xi,\eta) + \varepsilon_1. \tag{31}$$

Ясно, что для любого $i \in \mathbb{N}$ найдется функция $\psi_{s_i} \in V_{t,r,s_i}(y,\xi)$ такая, что

$$\int\limits_{\lambda \cap \Omega_{s_i}} f_{s_i}(x, \eta + \nabla_k \psi_{s_i})\,dx \le t^{-n} F_{t,r,s_i}(y,\xi,\eta) + \varepsilon_1 t^{-n}. \tag{32}$$

Отсюда и из (4), (31), (29), (13) вытекает, что для любого i

$$\int\limits_{\lambda \cap \Omega_{s_i}} |\eta + \nabla_k \psi_{s_i}|^m\,dx \le bc(3+2l)^m t^{-n}. \tag{33}$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{p_{s_i}\psi_{s_i}\}$ слабо сходится в $W^{k,m}(\Omega)$ к некоторой функции $u^r \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega)$. Положим $v^r = u^r + (h-\xi)\varphi$. Имеем $v^r \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega)$ и

$$\|v^r\|_{W^{k,m}(\Omega)} \le \kappa t^{k+1} + \|(h-\xi)\varphi\|_{W^{k,m}(\Omega)}, \qquad \int\limits_{\lambda} |v^r - h|^m\,dx \le r^{-1}. \tag{34}$$

Эти неравенства устанавливаем с помощью включений $\psi_{s_i} \in V_{t,r,s_i}(y,\xi)$ $(\forall\, i)$, слабой сходимости $\{p_{s_i}\psi_{s_i}\}$ к u^r, неравенства (9) и равенства (2). Положим для любого i $v_{s_i} = \psi_{s_i} + (h-\xi)\varphi_{s_i}$. Ясно, что для любого i $v_{s_i} \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega_{s_i})$. Используя ограниченность последовательности $\{p_{s_i}v_{s_i}\}$ в $W^{k,m}(\Omega)$, слабую сходимость последовательностей $\{p_s\varphi_s\}$, $\{p_{s_i}\psi_{s_i}\}$ соответственно к φ, u^r и равенство (2), получаем, что $p_{s_i}v_{s_i} \to v^r$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$. Тогда в силу Γ-сходимости последовательности $\{I_{\lambda,s}\}$ к I_λ^f

$$\varliminf_{i\to\infty} I_{\lambda,s_i}(v_{s_i}) \ge I_\lambda^f(v^r). \tag{35}$$

Оценивая с помощью неравенств (5), (4), (31)–(33), (18) и слабой сходимости $\{p_s\varphi_s\}$ к φ числа $I_{\lambda,s_i}(v_{s_i})$ сверху, находим, что верхний предел последовательности этих чисел не превышает числа

$$A_{\varepsilon,t} = t^{-n}F_t'(y,\xi,\eta) + 3\varepsilon t^{-n}/4.$$

Отсюда и из (35) получаем

$$I_\lambda^f(v^r) \le A_{\varepsilon,t}. \tag{36}$$

Итак, для любого $r \in \mathbb{N}$ имеется функция $v^r \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega)$, удовлетворяющая неравенствам (34) и (36). В силу первого из неравенств (34) существуют возрастающая последовательность $\{r_i\} \subset \mathbb{N}$ и $w \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega)$ такие, что $v^{r_i} \to w$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$. Тогда, учитывая (36) и слабую полунепрерывность снизу функционала I_λ^f на $\mathring{W}^{k,m}(\Omega)$, что является следствием условия теоремы, получаем

$$I_\lambda^f(w) \le A_{\varepsilon,t}. \tag{37}$$

Кроме того, используя второе из неравенств (34) и слабую сходимость $\{v^{r_i}\}$ к

w, устанавливаем, что $w = h$ почти всюду на λ. Используя этот факт, второе из неравенств (22) и неравенство (37), получаем (30). Неравенства (29), (30) и очевидное неравенство $F'_t(y, \xi, \eta) \le F''_t(y, \xi, \eta)$ позволяют заключить, что последовательности $\{F'_t\}$, $\{F''_t\}$ сходятся к функции f равномерно на $\Omega^l \times \times [-l, l] \times H^l$. Теорема доказана.

5. Достаточные условия Г-сходимости интегральных функционалов. В этом и следующем пункте будем предполагать, что выполняется равенство (2).

***Предложение* 4.** *Пусть $f \in \mathcal{F}$ и для любого $l \ge l_0$ последовательность $\{F''_t\}$ сходится к функции f равномерно на $\Omega^l \times [-l, l] \times H^l$. Тогда для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ существует последовательность $w_s \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$ такая, что*

$$\lim_{s \to \infty} \|p_s w_s - u\|_{L^m(\Omega)} = 0, \qquad \varlimsup_{s \to \infty} I_{\Omega,s}(w_s) \le I_\Omega^f(u). \tag{38}$$

Доказательство. Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$, причем $\operatorname{supp} u \ne \varnothing$. Введем обозначения:

$$\mu = 1 + \max_{x \in \Omega} \sum_{|\alpha| \le k} |D^\alpha u(x)|,$$

g — функция на Ω такая, что для всех $x \in \Omega$

$$g(x) = f(x, u(x), \nabla_k u(x)); \qquad G = \{x \in \Omega:\ u(x) \ne 0\},$$

для любого $l \in \mathbb{N}$

$$G^l = \{x \in \Omega:\ |u(x)| \ge l^{-1}\}.$$

Так как $f \in \mathcal{F}$, существует $b \ge 1$ такое, что для любых $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}''_{n,k}$ справедливо неравенство (13). Отсюда следует, что для всех $x \in \Omega$

$$0 \le g(x) \le b\mu^m. \tag{39}$$

Зафиксируем произвольное $i \in \mathbb{N}$, положим

$$\varepsilon = [\,2^{6(m+n)} b c^2 \mu^m (1 + \operatorname{mes}\Omega) i\,]^{-1}$$

и возьмем четное число $l \ge \mu\varepsilon^{-1}$ такое, что $G \subset \Omega^{l/2}$, $G^l \ne \varnothing$ и $\operatorname{mes}(G \setminus G^l) \le \le \varepsilon$. Поскольку $u \in C_0^\infty(\Omega)$, существует $\sigma > 0$ такое, что для любых y', $y'' \in \Omega^l$, $|y' - y''| \le \sigma$, справедливы неравенства

$$|\nabla_k u(y') - \nabla_k u(y'')| \le \varepsilon, \qquad |g(y') - g(y'')| \le \varepsilon. \tag{40}$$

Кроме того, в силу равномерной сходимости последовательности $\{F''_t\}$ к функции f на $\Omega^l \times [-l, l] \times H^l$ существует $t_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $t \ge t_0$ и $(y, \xi, \eta) \in \Omega^l \times [-l, l] \times H^l$ выполняется соотношение

$$F''_t(y, \xi, \eta) \le f(y, \xi, \eta) + \varepsilon. \tag{41}$$

Зафиксируем $t \in \mathbb{N}$ такое, что $t \ge \max\{l^2, n\sigma^{-1}, t_0\}$. Введем некоторые множества точек из $\mathbb{R}^n$. Положим, что если Y — конечное множество, то $|Y|$ — число элементов этого множества. Положим также

$$Y_t = \{ y \in \mathbb{R}^n : (t+1) y_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, n \}.$$

Имеем

$$\bigcup_{y \in Y_t} \overline{Q_{t+1}(y)} = \mathbb{R}^n; \quad Q_{t+1}(y) \cap Q_{t+1}(y') = \varnothing \quad (\forall\, y, y' \in Y_t,\ y \neq y'). \quad (42)$$

Пусть

$$Y_t' = \{ y \in Y_t : Q_t(y) \cap \operatorname{supp} u \neq \varnothing \}, \qquad Y_t'' = \{ y \in Y_t : Q_t(y) \cap G^l \neq \varnothing \}.$$

В силу первого из равенств в (42) множества Y_t', Y_t'' непустые. Используя включение $G \subset \Omega^{l/2}$ и неравенство $t \geq l^2$, устанавливаем, что

$$\bigcup_{y \in Y_t'} Q_t(y) \subset \Omega^l, \qquad \bigcup_{y \in Y_t''} Q_t(y) \subset G^{2l}. \quad (43)$$

Заметим, что в силу первого из этих включений и второго из равенств (42) $|Y_t'| \leq 2^n t^n \operatorname{mes} \Omega$; в силу второго из включений (43) $Y_t' \setminus Y_t'' \neq \varnothing$. Используя оценки для $|Y_t'|$, $\operatorname{mes}(G \setminus G^l)$ и второе из равенств (42), находим, что

$$\sum_{y \in Y_t' \setminus Y_t''} \operatorname{mes}(Q_t(y) \cap G) \leq 2\varepsilon. \quad (44)$$

Кроме того, имеем

$$\sum_{y \in Y_t''} g(y) t^{-n} \leq I_\Omega^f(u) + 2^{n+1} \varepsilon \operatorname{mes} \Omega. \quad (45)$$

Это неравенство устанавливаем, используя (39), оценку для $|Y_t'|$ и второе из неравенств (40).

Далее понадобится набор функций $\{\varphi_y : y \in Y_t'\}$ класса $C_0^\infty(\Omega)$ со свойствами:

а) если $y \in Y_t'$, то $0 \leq \varphi_y \leq 1$ на Ω, $\varphi_y = 0$ на $\Omega \setminus Q_t(y)$, $|D^\alpha \varphi_y| \leq c_0 t^{2|\alpha|}$ на Ω $(\forall\, \alpha,\ |\alpha| \leq k)$;

б) для всех $x \in \operatorname{supp} u$ $\sum\limits_{y \in Y_t'} \varphi_y(x) = 1$.

Введем такие обозначения: если $y \in Y_t''$, то $\xi^y = u(y)$, $\eta^y = \nabla_k u(y)$; если $y \in Y_t' \setminus Y_t''$, то $\xi^y = 1$, $\eta^y = 1$. Легко видеть, что

$$\forall\, y \in Y_t' \quad (y, \xi^y, \eta^y) \in \Omega^l \times [-l, l] \times H^l. \quad (46)$$

Отметим, что в силу второго из включений (43)

$$\forall\, y \in Y_t' \quad |\xi^y| \geq \frac{1}{2l}. \quad (47)$$

Возьмем число $r \in \mathbb{N}$ такое, что $r \geq [c_0 c_{n,k}^4 (k!)^2]^m t^{4km+n} \operatorname{mes} \Omega$.

В силу (46) и (41) для всех $y \in Y_t'$ $F_{t,r}''(y, \xi^y, \eta^y) \leq f(y, \xi^y, \eta^y) + \varepsilon$. Отсюда вытекает, что найдется $s' \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $s \geq s'$ и $y \in Y_t'$

$$F_{t,r,s}(y, \xi^y, \eta^y) \leq f(y, \xi^y, \eta^y) + 2\varepsilon. \quad (48)$$

Кроме того, в силу (2) существует $s'' \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\forall\, s \geq s'' \quad \operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_s) \leq \frac{1}{2i\mu^m}. \tag{49}$$

Зафиксируем $s \geq \max(s', s'')$. Используя (48), (13) и неравенство $t > 2^{m+1}\mu^m b$, устанавливаем, что для любого $y \in Y_t'$ $V_{t,r,s}(y, \xi^y) \neq \varnothing$. Пусть для всякого $y \in Y_t'$ $u_{y,s} \in V_{t,r,s}(y, \xi^y)$, причем

$$\int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_s} f_s(x, \eta^y + \nabla_k u_{y,s})\, dx \leq [F_{t,r,s}(y, \xi^y, \eta^y) + \varepsilon]\, t^{-n}. \tag{50}$$

Отсюда и из (4), (48), (13) следует, что для любого $y \in Y_t'$

$$\int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\eta^y + \nabla_k u_{y,s}|^m\, dx \leq 2^{m+1}\mu^m b c t^{-n}. \tag{51}$$

Пусть теперь u_s — функция на Ω_s такая, что для любого $x \in \Omega_s$

$$u_s(x) = \sum_{y \in Y_t'} \frac{1}{\xi^y} u(x) u_{y,s}(x) \varphi_y(x).$$

Ясно, что $u_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$. Используя свойство б), неравенства (47), (49), включения $u_{y,s} \in V_{t,r,s}(y, \xi^y)$ и выбор чисел $r,\ t,$ находим, что

$$\| p_s u_s - u \|^m_{L^m(\Omega)} \leq \frac{1}{i}. \tag{52}$$

В силу (3)

$$I_{\Omega,s}(u_s) = \int\limits_{G \cap \Omega_s} f_s(x, \nabla_k u_s)\, dx. \tag{53}$$

Используя свойство б), для почти всех $x \in G \cap \Omega_s$ получаем

$$\nabla_k u_s(x) = \sum_{y \in Y_t''} \varphi_y(x)(\eta^y + \nabla_k u_{y,s}(x)) +$$

$$+ \sum_{y \in Y_t' \setminus Y_t''} \varphi_y(x)(\nabla_k u(x) + u(x)\nabla_k u_{y,s}(x)) + \sum_{y \in Y_t''} \varphi_y(x)(\nabla_k u(x) - \eta^y) +$$

$$+ \sum_{y \in Y_t''} \left(\frac{u(x)}{\xi^y} - 1 \right) \varphi_y(x) \nabla_k u_{y,s}(x) + h_s(x). \tag{54}$$

Здесь h_s — отображение Ω_s в $\mathbb{R}''_{n,k}$, для которого в силу (47), свойств функций φ_y, включений $u_{y,s} \in V_{t,r,s}(y, \xi^y)$ и выбора чисел r, t, l выполняется оценка $\|h_s\|_{L^m(\Omega_s)} \leq \varepsilon$. Используя представление (54), свойство б), неравенства (4), (5), (44), (45), (47), (48), (50), (51), (53), первое из неравенств (40), оценку для h_s и выбор чисел t, l, ε, устанавливаем, что

$$I_{\Omega,s}(u_s) = I^f_\Omega(u) + \frac{1}{i}. \tag{55}$$

Неравенства (52), (55) и вся изложенная выше часть доказательства позволяют сделать вывод: для любого $i \in \mathbb{N}$ существуют число $s_i \in \mathbb{N}$ и последовательность $w^i_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$ такие, что

$$\forall\, s \geq s_i \quad \|p_s w_s^i - u\|^m_{L^m(\Omega)} \leq \frac{1}{i}, \quad I_{\Omega,s}(w_s^i) \leq I^f_\Omega(u) + \frac{1}{i}. \tag{56}$$

При этом можно считать, что $\{s_i\}$ — возрастающая последовательность. Положим теперь $w_s = 0$, если $s < s_1$; $w_s = w_s^i$, если $s_i \leq s < s_{i+1}$. Имеем: $w_s \in \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$ для любого s и в силу (56) справедливы соотношения (38).

Итак, для $u \in C_0^\infty(\Omega)$ в предположении, что $\operatorname{supp} u \neq \varnothing$, доказано существование последовательности $w_s \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$, удовлетворяющей соотношениям (38). Если же $\operatorname{supp} u = \varnothing$, то в качестве последовательности $w_s \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$, удовлетворяющей (38), можно взять последовательность функций, равных нулю в соответствующих областях. Предложение доказано.

***Предложение* 5.** *Пусть $f \in \mathcal{F}$ и для любого $l \geq l_0$ последовательность $\{F_t^l\}$ сходится к функции f равномерно на $\Omega^l \times [-l, l] \times H^l$. Тогда для любых $\lambda \in \Lambda$, $u \in C_0^\infty(\Omega)$ и последовательности $u_s \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$ такой, что $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$, справедливо неравенство*

$$\varliminf_{s \to \infty} I_{\lambda,s}(u_s) \geq I^f_\lambda(u). \tag{57}$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Lambda$, $u \in C_0^\infty(\Omega)$ и имеется последовательность $u_s \in \mathring{W}^{k,m}(\Omega_s)$ такая, что $p_s u_s \to u$ слабо в $W^{k,m}(\Omega)$. Если $\operatorname{supp} u \cap \lambda = \varnothing$, то неравенство (57) справедливо в силу неотрицательности интегрантов f_s и равенства $f(x, 0, 0) = 0$ для всех $x \in \Omega$ (см. (12)).

Рассмотрим случай, когда $\operatorname{supp} u \cap \lambda \neq \varnothing$. Введем обозначения:

$$\mu = 1 + \max_{x \in \Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u(x)|,$$

g — функция на Ω такая, что для всех $x \in \Omega$

$$g(x) = f(x, u(x), \nabla_k u(x)); \quad G = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\},$$

для любого $l \in \mathbb{N}$

$$G^l = \{x \in \Omega : |u(x)| \geq l^{-1}\}, \quad \lambda^l = \{x \in \lambda : d(x, \partial\lambda) \geq l^{-1}\};$$

$$a = 1 + \sup_s \|u_s\|_{W^{k,m}(\Omega_s)},$$

для любого $s \in \mathbb{N}$ $a_s = \|p_s u_s - u\|_{W^{k-1,m}(\Omega)}$; χ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $0 \leq \chi \leq 1$ в $\mathbb{R}^n$, $\chi = 1$ на $Q_2(0)$, $\chi = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus Q_1(0)$;

$$\mu_1 = \max_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \chi(x)|.$$

Так как $f \in \mathcal{F}$, существует $b \geq 1$ такое, что для всех $x \in \Omega$ $0 \leq g(x) \leq \leq b\mu^m$. Зафиксируем произвольное $i \in \mathbb{N}$; положим

$$\varepsilon = [4^{m+1} b c (\mu a c_{n,k})^m (1 + \operatorname{mes} \Omega) i]^{-1}$$

и возьмем натуральное число $l \geq \mu\varepsilon^{-1}$ такое, что $G^l \cap \lambda^l \neq \varnothing$, $G \subset \Omega^l$ и

$$\operatorname{mes}(G \setminus G^l) + \operatorname{mes}(\lambda \setminus \lambda^l) \leq \varepsilon. \tag{58}$$

Поскольку $u \in C_0^\infty(\Omega)$, существует $\sigma > 0$ такое, что для любых $y', y'' \in \Omega^l$, $|y' - y''| \le \sigma$, справедливы неравенства

$$|\nabla_k u(y') - \nabla_k u(y'')| \le \varepsilon, \quad |g(y') - g(y'')| \le \varepsilon. \tag{59}$$

Кроме того, в силу равномерной сходимости последовательности $\{F_t'\}$ к функции f на $\Omega^l \times [-l, l] \times H^l$ существует $t_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $t \ge t_0$ и $(y, \xi, \eta) \in \Omega^l \times [-l, l] \times H^l$

$$F_t'(y, \xi, \eta) \ge f(y, \xi, \eta) - \varepsilon. \tag{60}$$

Зафиксируем число t такое, что

$$\frac{t}{6} \in \mathbb{N}, \quad t \ge \max\{t_0, n\sigma^{-1}, a\mu_1(l^2 c_{n,k} k!)^{k+1}\}$$

и положим $Y_t = \{y \in \mathbb{R}^n \colon t y_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, n\}$. Имеем

$$\bigcup_{y \in Y_t} \overline{Q_t(y)} = \mathbb{R}^n; \quad Q_t(y) \cap Q_t(y') = \varnothing \quad (\forall\, y, y' \in Y_t,\ y \ne y'). \tag{61}$$

Положим также $Y_t' = \{y \in Y_t \colon \overline{Q_t(y)} \cap G^l \cap \lambda^l \ne \varnothing\}$. В силу неравенства $G^l \cap \lambda^l \ne \varnothing$ и первого из равенств (61) $Y_t' \ne \varnothing$. Используя неравенства $t \ge l^2$ и $l \ge \mu \varepsilon^{-1}$, устанавливаем, что

$$\forall\, y \in Y_t' \quad Q_{t/3}(y) \subset G^{2l} \cap \lambda. \tag{62}$$

Отсюда и из второго из равенств (61) следует $|Y_t'| \le t^n \operatorname{mes} \Omega$. Используя эту оценку, а также оценку для значений функции g, неравенство (58), включения (62) и $G \subset \Omega^l$, второе из неравенств (59), находим, что

$$I_\lambda^f(u) \le \sum_{y \in Y_t'} g(y) t^{-n} + (b\mu^m + \operatorname{mes} \Omega)\varepsilon. \tag{63}$$

Зафиксируем $y \in Y_t'$ и пусть $\xi = u(y)$, $\eta = \nabla_k u(y)$, φ — функция на Ω такая, что для всех $x \in \Omega$ $\varphi(x) = \chi(t(x - y)/2)$. Имеем: $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \le \varphi \le 1$ на Ω, $\varphi = 1$ на $Q_t(y)$, $\varphi = 0$ на $\Omega \setminus Q_{t/2}(y)$, $|D^\alpha \varphi| \le \mu_1 t^{|\alpha|}$ на Ω ($\forall\, \alpha$, $|\alpha| \le \le k$). Пусть ψ — функция на Ω такая, что $\psi(x) = \xi\varphi(x)/u(x)$, если $x \in \in Q_{t/3}(y)$, $\psi(x) = 0$, если $x \in \Omega \setminus Q_{t/3}(y)$. Имеем $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ и в силу (62) и неравенств для производных функции φ

$$|D^\alpha \psi(x)| \le \mu_1 c_{n,k}^k (l^2 k!)^{k+1} t^k, \quad |\alpha| \le k,\ x \in Q_{t/3}(y). \tag{64}$$

Далее, так как $t \ge t_0$ и $(y, \xi, \eta) \in \Omega^l \times [-l, l] \times H^l$, в силу (60) найдется $r \in \mathbb{N}$ такое, что $F_{t,r}'(y, \xi, \eta) \ge f(y, \xi, \eta) - 2\varepsilon$. Тогда

$$\forall\, s \ge s' \quad F_{t,r,s}(y, \xi, \eta) \ge f(y, \xi, \eta) - 3\varepsilon. \tag{65}$$

Кроме того, ввиду слабой сходимости $\{p_s u_s\}$ к u

$$\forall\, s \ge s'' \quad a_s \le t^{-2-n} r^{-1}. \tag{66}$$

Зафиксируем теперь $s \ge s_y = \max(s', s'')$, и пусть v_s — функция на Ω_s такая, что для всех $x \in \Omega_s$ $v_s(x) = \psi(x)u_s(x)$. Имеем $v_s \in \overset{\circ}{W}{}^{k,m}(\Omega_s)$, в силу (64) и выбора t

$$\|\nabla_k v_s\|_{L^m(\Omega_s)} \leq t^{k+1},$$

$$\int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |\delta_k(v_s - \xi)|^m \, dx \leq (ta_s)^m. \tag{67}$$

Из этих неравенств и (66) вытекает, что $v_s \in V_{t,r,s}(y, \xi)$ и, следовательно,

$$t^{-n} F_{t,r,s}(y, \xi, \eta) \leq \int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_s} f_s(x, \eta + \nabla_k v_s) \, dx. \tag{68}$$

Для почти всех $x \in Q_t(y) \cap \Omega_s$ имеем

$$\eta + \nabla_k v_s(x) = \nabla_k u_s(x) - (\nabla_k u(x) - \eta) - \left(\frac{u(x)}{\xi} - 1\right) \nabla_k v_s(x) - h_s(x), \tag{69}$$

где h_s — отображение Ω_s в $\mathbb{R}''_{n,k}$, для которого в силу неравенств $|\xi| \geq 1/2l$ и $\mu \leq \varepsilon l$ справедлива оценка

$$|h_s(x)| \leq 2\varepsilon l^2 c_{n,k} \, k! \, |\delta_k(v_s - \xi)(x)|, \quad x \in \Omega_s. \tag{70}$$

Используя представление (69), неравенства (4), (5), первое из неравенств (59), а также (62), (70) и (65)–(68), находим

$$g(y) t^{-n} \leq \int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_s} f_s(x, \nabla_k u_s) \, dx +$$

$$+ (4c_{n,k})^m c\varepsilon \sum_{|\beta| \leq k} \int\limits_{Q_t(y) \cap \Omega_s} |D^\beta u_s|^m \, dx + (6^m + 4) c\varepsilon t^{-n}. \tag{71}$$

Итак, если $y \in Y'_t$ и $s \geq s_y$, то верно неравенство (71). Пусть теперь

$$s \geq s^0 = \max_{y \in Y'_t} s_y.$$

Используя (71), (62), (63) и оценку для $|Y'_t|$, устанавливаем, что $I_{\lambda,s}(u_s) \geq$ $\geq I^f_\lambda(u) - 1/i$. Отсюда вытекает неравенство (57). Предложение доказано.

Используя предложения 3–5, получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $f \in \mathcal{F}$ и для любого $l \geq l_0$ последовательности $\{F'_t\}$, $\{F''_t\}$ сходятся к функции f равномерно на $\Omega^l \times [-l, l] \times H^l$. Тогда для любого $\lambda \in \Lambda$ последовательность $\{I_{\lambda,s}\}$ Γ-сходится к функционалу I^f_λ.*

Из теорем 3 и 4, учитывая, что последняя справедлива при условии выполнения равенства (2), выводим критерий Γ-сходимости последовательностей $\{I_{\lambda,s}\}$.

Теорема 5. *Пусть $f \in \mathcal{F}$. Для того чтобы для любого $\lambda \in \Lambda$ последовательность $\{I_{\lambda,s}\}$ Γ-сходилась к функционалу I^f_λ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (2) и для любого $l \geq l_0$ последовательности $\{F'_t\}$, $\{F''_t\}$ сходились к функции f равномерно на $\Omega^l \times [-l, l] \times H^l$.*

6. Функции g'_t, g''_t и их связь со сходимостью функций F'_t, F''_t. Пусть для $t \in \mathbb{N}$ g'_t, g''_t — функции на $\Omega \times \mathbb{R}$ такие, что

$$\forall\,(y,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}\quad g_t'(y,\xi)=F_t'(y,\xi,0),\qquad g_t''(y,\xi)=F_t''(y,\xi,0).$$

Теорема 6. *Пусть* $m=2$ *и для любых* $s\in\mathbb{N}$, $x\in\Omega$, $\eta\in\mathbb{R}''_{n,k}$ *справедливо равенство*

$$f_s(x,\eta)=\sum_{\alpha,\beta\in P''_{n,k}}a_{\alpha\beta}(x)\eta_\alpha\eta_\beta, \tag{72}$$

где $a_{\alpha\beta}\in C(\overline{\Omega})$, $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$ $(\forall\,\alpha,\beta\in P''_{n,k})$. *Пусть* $b_1\geq 1$, g — *функция на* $\Omega\times\mathbb{R}$ *такая, что для произвольных* $(y,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}$

$$0\leq g(y,\xi)\leq b_1(1+|\xi|)^m; \tag{73}$$

f — функция на $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}''_{n,k}$ такая, что для произвольных $(y,\xi,\eta)\in\Omega\times\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}''_{n,k}$

$$f(y,\xi,\eta)=f_1(y,\eta)+g(y,\xi). \tag{74}$$

Пусть для любого $l\geq l_0$ последовательности $\{g_t'\}$, $\{g_t''\}$ сходятся к функции g равномерно на $\Omega^l\times[-l,l]$. Тогда для любого $l\geq l_0$ последовательности $\{F_t'\}$, $\{F_t''\}$ сходятся к функции f равномерно на $\Omega^l\times[-l,l]\times H^l$.

Не останавливаясь на подробном доказательстве теоремы, отметим, что оно основывается на использовании равенства

$$f_1(x,\eta+\eta')=f_1(x,\eta)+f_1(x,\eta')+2\sum_{\alpha,\beta\in P''_{n,k}}a_{\alpha\beta}(x)\eta_\alpha\eta'_\beta,$$

справедливого для любых $x\in\Omega$, $\eta,\eta'\in\mathbb{R}''_{n,k}$ и вытекающего из (72) и равенств $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$, $\alpha,\beta\in P''_{n,k}$.

Теорема 7. *Пусть* $k=1$, *для любого* $s\in\mathbb{N}$ $f_s=f_1$ *и выполняется условие: для любых* $x',x''\in\Omega$, $\eta\in\mathbb{R}^n$

$$|f_1(x',\eta)-f_1(x'',\eta)|\leq\mu(|x'-x''|)(1+|\eta|)^m,$$

где μ — *неубывающая непрерывная в нуле функция на* $[0,\infty)$, $\mu(0)=0$. *Пусть* $b_1\geq 1$, g — *функция на* $\Omega\times\mathbb{R}$ *такая, что для всех* $(y,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}$ *справедливо неравенство* (73), f — *функция на* $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *такая, что для всех* $(y,\xi,\eta)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *справедливо равенство* (74). *Пусть для любого* $l\geq l_0$ *последовательности* $\{g_t'\}$, $\{g_t''\}$ *сходятся к функции* g *равномерно на* $\Omega^l\times[-l,l]$. *Тогда для любого* $l\geq l_0$ *последовательности* $\{F_t'\}$, $\{F_t''\}$ *сходятся к функции* f *равномерно на* $\Omega^l\times[-l,l]\times H^l$.

7. Сходимость функций g_t', g_t'' **в одном специальном случае.** В этом пункте предполагаем: $2\leq m<n$, $k=1$; существуют конечные множества J_s $(s\in\mathbb{N})$, точки $x_s^j\in\Omega$ и числа $r_s^j>0$ $(s\in\mathbb{N},\ j\in J_s)$ такие, что

$$\forall\,s\in\mathbb{N}\quad\Omega\setminus\Omega_s=\bigcup_{j\in J_s}B_s^j,$$

где B_s^j — замкнутый шар с центром в точке x_s^j и радиусом r_s^j. Обозначим для любых $s\in\mathbb{N}$ и $j\in J_s$ через ρ_s^j расстояние от B_s^j до множества $\bigcup_{J_s\ni i\neq j}B_s^i\cup\partial\Omega$. Будем предполагать, что

$$\lim_{s \to \infty} \max_{j \in J_s} \rho_s^j = 0 \tag{75}$$

и существуют постоянные $\nu_1, \nu_2 \geq 1$ такие, что

$$\forall\, s \in \mathbb{N} \quad \forall\, j \in J_s \quad r_s^j \leq \nu_1 \rho_s^j; \qquad \overline{\lim_{s \to \infty}} \sum_{j \in J_s} \left(r_s^j\right)^{(n-m)m/(m-1)} \left(\rho_s^j\right)^{-n/(m-1)} \leq \nu_2. \tag{76}$$

Для всякого открытого куба $Q \subset \Omega$ и любого $s \in \mathbb{N}$ положим $J_s(Q) = \{j \in J_s :\ x_s^j \in Q\}$.

Теорема 8. *Пусть для любых* $s \in \mathbb{N}$ *и* $(x, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ $f_s(x, \eta) = |\eta|^m$; $h \in C(\overline{\Omega})$, $h \geq 0$, *и для любого открытого куба* $Q \subset \Omega$

$$\lim_{s \to \infty} \sum_{j \in J_s(Q)} \left(r_s^j\right)^{n-m} = \int_Q h\, dx;$$

g *— функция на* $\Omega \times \mathbb{R}$ *такая, что для всех* $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$

$$g(x, \xi) = \kappa_n \left(\frac{n-m}{m-1}\right)^{m-1} h(x)\, |\xi|^m,$$

где κ_n *— площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда для любого* $l \geq l_0$ *последовательности* $\{g_t'\}$, $\{g_t''\}$ *сходятся к функции* g *равномерно на* $\Omega^l \times [-l, l]$.

В заключение отметим, что условия (75), (76) относительно r_s^j и ρ_s^j совпадают с соответствующими условиями из [6], где изучалась сходимость решений задач Дирихле в перфорированных областях для квазилинейных эллиптических уравнений общего дивергентного вида второго порядка.

1. *Ковалевский А. А.* О Г-сходимости интегральных функционалов, связанной с вариационной задачей Дирихле в переменных областях // Докл. АН Украины. – 1992. – № 12. – С. 5–9.
2. *Kovalevsky A. A.* On Г-convergence of integral functionals related with Dirichlet problems in variable demains // Book of Abstracts. 2nd European Conference on Elliptic and Parabolic Problems. June 13–17, 1994. – Pont-à-Mousson, 1994. – P. 41.
3. *Хруслов Е. Я.* Первая краевая задача в областях со сложной границей для уравнений высших порядков // Мат. сб. – 1977. – **103**, № 4. – С. 614–629.
4. *Панкратов Л. С.* Об асимптотическом поведении решений вариационных задач в областях со сложной границей. – Харьков, 1987. – 18 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн. ин-т низ. температур; 11–87).
5. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 400 с.
6. *Скрыпник И. В.* Квазилинейная задача Дирихле для областей с мелкозернистой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 2. – С. 21–25.

Получено 10.04.95