УДК 517.4 (083)

Ю. И. Петунин (Киев. ун-т)

ОБ ОДНОЙ КОНЦЕПЦИИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

We introduce a new concept of a generalized solution of operator equations with a closed linear operator in a Banach space as an element of the completion of this space in some locally convex topology. A theorem on existence and uniqueness of a generalized solution is proved. The examples of location of the generalized solution for the infinite systems of the algebraic linear are considered.

Визначається поняття узагальненого розв'язку операторного рівняння з замкненим лінійним оператором у банаховому просторуʼ як елемент доповнення простору в деякій локально-опуклій топології. Доведено теорему існування та єдиності узагальненого розв'язку. Розглядаються приклади знаходження узагальненого розв'язку для нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

В настоящей статье используются те же обозначения и терминология, что и в [1].

Пусть E, F — банаховы пространства и A — замкнутый линейный оператор со всюду плотной в E областью определения $D(A) \subset E$, действующий в пространство F. Рассмотрим операторное уравнение

$$A(x) = y, \quad x \in D(A),\ y \in F, \tag{1}$$

и сопряженное уравнение

$$A^*(f) = g, \quad x \in E',\ f \in D(A^*), \tag{2}$$

где E', F' сопряжены к E, F банаховы пространства, A^* — сопряженный к A оператор. Будем предполагать, что множество значений $R(A) \subset F$ оператора A всюду плотно в пространстве F и уравнение (1) однозначно разрешимо на $R(A)$ (т. е. нуль-пространство $N(A)$ оператора A состоит лишь из нулевого элемента θ: $N(A) = \{\theta\}$). Как известно [2, с. 106], в этом случае сопряженное уравнение (2) будет плотно разрешимым, а потому множество значений $R(A^*)$ оператора A^* всюду плотно в E' по норме. Следовательно, множество функционалов $N' = R(A^*) \subset E'$ будет тотальным линейным многообразием и векторные пространства E и $N' = R(A^*)$ находятся в двойственности. Кроме того, для замкнутого оператора A область определения $M' = D(A^*)$ всюду плотна в F' в слабой топологии $\sigma(F, F')$ [2, с. 106], поэтому векторные пространства F и M' также находятся в двойственности (с помощью естественной билинейной формы $B(f, y) = f(y)$, $y \in F$, $f \in M'$).

Обозначим через $\overline{E}$ пополнение пространства E по топологии $\sigma(E, N')$; поскольку пространства E и N' находятся в двойственности, $\overline{E}$ — отделимое локально выпуклое топологическое векторное пространство. Рассмотрим произвольный непрерывный линейный функционал $f \in M' = D(A^*)$; тогда из уравнения (1) следует

$$f[A(x)] = f(y), \quad g(x) = A^*f(x) = f(y).$$

В силу теоремы С. Банаха о слабо непрерывном линейном функционале [1, с. 197] функционал $g = A^*(f)$ допускает единственное расширение по непрерывности на все пространство $\overline{E}$.

***Определение* 1.** *Будем называть обобщенным решением операторного уравнения* (1) *элемент* $\overline{x} \in \overline{E}$, *удовлетворяющий соотношению*

$$g(\overline{x}) = A^*f(\overline{x}) = f(y) \quad \forall f \in M' = D(A^*). \tag{3}$$

Понятие обобщенного решения $\overline{x}$ возникает в случае, когда правая часть уравнения (1), т. е. элемент y, не принадлежит множеству значений $R(A)$ оператора A, при этом обычного (классического) решения не существует; если же $y \in R(A)$, то обобщенное решение $\overline{x}$ совпадает с классическим. Действительно, пусть $y \in R(A)$, тогда найдется такой элемент $x \in D(A)$, для которого $A(x)=y$; применяя к обеим частям этого равенства функционал $f \in M'$, получаем

$$g(x) = f[A(x)] = A^*f(x) = f(y) \quad \forall f \in M' = D(A^*),$$

поэтому в силу соотношения (3)

$$g(\overline{x}) = A^*f(\overline{x}) = g(x) \quad \forall f \in N' = R(A^*);$$

поскольку множество $N' = R(A^*)$ тотально в E', то $\overline{x} = x$. Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно показать, что классическое решение является обобщенным, а если обобщенное решение $\overline{x} \in D(A)$, то оно будет классическим.

Предположим, что правая часть уравнения (1), т. е. элемент y, не принадлежит множеству значений $R(A)$ оператора A. Ввиду того, что $R(A)$ всюду плотно в F, а уравнение (1) однозначно разрешимо, существует последовательность $\{y_n\} \subset R(A)$ такая, что $y_n \to y$ при $n \to \infty$ и последовательность $x_n = A^{-1}(y_n)$.

***Определение* 2.** *Последовательность элементов* $x_n \in D(A)$ *называется почти решением операторного уравнения* (1), *если* $y_n = A(x_n) \to y$, $n \to \infty$, *в метрике пространства* F, *а* $x_n = A^{-1}(y_n) \to \overline{x}$, $n \to \infty$, $\overline{x} \in \overline{E}$, *в слабой топологии* $\sigma(E, R(A^*)) = \sigma(E, N')$; *элемент* $\overline{x} \in \overline{E}$ *называется при этом предельным элементом почти решения.*

Легко видеть, что элемент $\overline{x}$ будет обобщенным решением операторного уравнения (1) тогда и только тогда, когда он является предельным элементом почти решения.

Понятие почти решения связано с концепцией обобщенного решения и условной разрешимости краевых задач:

$$L(x) = y, \quad x \in W_2^r(\text{гр.}), \tag{4}$$

где $y \in L_2(G)$, $W_2^r(G)$ — пространство Соболева, $W_2^r(\text{гр.})$ — некоторое подпространство из $W_2^r(G)$,

$$L(x) = \sum_{|\alpha| \le r} a_\alpha(t) D^\alpha(x), \qquad D_j = \frac{\partial}{\partial t_j}, \quad j = 1, \ldots, n;$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \quad t = (t_1, \ldots, t_n),$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ — линейное дифференциальное выражение порядка r, в котором комплекснозначные коэффициенты $a_\alpha(t)$ предполагаются достаточно гладкими (подробнее см. [3], гл. II). Эта концепция развита Ю. М. Березанским в [3]. Известно, что задача (4) называется условно разрешимой, если существует последовательность $x_n \in W_2^r(\text{гр.})$ такая, что $L(x_n) \to$

$\to y$ в $W_2^{-r}(G)$ [3, с. 102]. Легко видеть, что задача (4) будет условно разрешимой, если для элемента $y \in W_2^{-r}(G)$ существует почти решение, совпадающее с последовательностью $\{x_n\}$. С другой стороны, s — обобщенное решение $x \in \in W_2^{-s}(G)$ задачи (4) для $y \in \tilde{W}_2^{-\max(r, r+s)}(G)$, определяется как функция x, удовлетворяющая соотношению

$$(x, L^+(v))_0 = (y, v)_0 \quad \forall v \in W_1^r(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+s}(G), \tag{5}$$

где $(\ ,\ )_0$ — скалярное произведение в $L_2(G)$, $W_1^r(\text{гр})^+$ — совокупность всех функций $v \in W_2^r(G)$, для которых при любом $x \in W_2^r(\text{гр})$ справедливо равенство $(L(x), v)_0 = (x, L^+(v))_0$, L^+ — сопряженное к L дифференциальное выражение

$$L^+(x) = \sum_{|\alpha| \le r} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\left(\overline{a_\alpha(t)x}\right)$$

[3, с. 105]. Очевидно, соотношение (5) является частным случаем равенства (3), поэтому предложенная в этой работе концепция обобщенного решения представляет простое обобщение классического понятия обобщенного решения, изложенного и развитого в [3].

Теорема 1. *Пусть E, F — банаховы пространства и A — замкнутый инъективный линейный оператор, действующий из E в F с плотными областью определения $D(A) \subset E$ и множеством значений $R(A) \subset F$. Тогда операторное уравнение $A(x) = y$ имеет единственное обобщенное решение для всех $y \in F$.*

Доказательство. Покажем вначале единственность обобщенного решения $\bar{x}$. Предположим, что операторное уравнение (1) за исключением обобщенного решения $\bar{x} \in \bar{E}$ имеет еще одно обобщенное решение $\tilde{x} \in \bar{E}$ $(\bar{x} \ne \tilde{x})$. Тогда

$$g(\bar{x}) = A^* f(\bar{x}) = f(y) = A^* f(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) \quad \forall f \in D(A^*),$$

а значит, $g(\bar{x}) = g(\tilde{x})$ для всех $g \in N' = R(A^*)$. Поскольку векторные пространства $\bar{E}$ и N' находятся в двойственности, то $\bar{x} = \tilde{x}$ и мы получаем противоречие. Таким образом, операторное уравнение (1) может иметь не более одного обобщенного решения.

Перейдем теперь к доказательству существования обобщенного решения. Предположим, что правая часть операторного уравнения (1), т. е. элемент y, не принадлежит множеству значений $R(A)$ опаратора A. Так как уравнение (1) является плотно разрешимым, существует последовательность элементов $\{y_n\}$ из $R(A)$ такая, что $y_n \to y$, $n \to \infty$, по норме $\cdot F$. Покажем, что последовательность $\{x_n = A^{-1}(y_n)\}$ будет почти решением, а ее предельный элемент $\bar{x} \in \bar{E}$. С этой целью рассмотрим обратный оператор $x = A^{-1}(y)$, действующий из векторного пространства $R(A)$ в E. Обозначим через $\mathcal{T}$ топологию, индуцированную на $R(A) \subset F$ нормой банахова пространства F, а через $(R(A), \mathcal{T})$, $(E, \sigma(E, R(A^*)))$ векторные пространства $R(A)$ и E, наделенные топологиями $\mathcal{T}$ и $\sigma(E, R(A^*))$ соответственно. Докажем, что обратный оператор $B = A^{-1}$ будет непрерывным линейным оператором, действующим из линейного нормированного пространства $(R(A), \mathcal{T})$ в отделимое топологическое векторное пространство $(E, \sigma(E, R(A^*)))$. Для этого достаточно показать, что прообраз

$$T = B^{-1}[W(g_1, \ldots, g_n; \varepsilon)] = A[W(g_1, \ldots, g_n; \varepsilon)]$$

множества

$$W(g_1, \dots, g_n; \varepsilon) = \{x\colon x \in E, g_1(x) < \varepsilon, \dots, g_n(x) < \varepsilon\},$$
$$\varepsilon \in R^1, \quad g_i(x) \in R(A^*) = N', \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

будет окрестностью нуля в пространстве $(R(A), \mathcal{T})$, поскольку $W(g_1, \dots, g_n; \varepsilon)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля пространства $(E, \sigma(E, R(A^*)))$. Действительно,

$$A[W(g_1, \dots, g_n; \varepsilon)] = \{A(x)\colon g_1(x) < \varepsilon, \dots, g_n(x) < \varepsilon\} =$$
$$= \{A(x)\colon f_1(A(x)) < \varepsilon, \dots, f_n(A(x)) < \varepsilon\},$$

где $g_i(x) = f_i(A(x))$, $f_i(y) \in M' = D(A^*)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Следовательно,

$$T = \{y : f_1(y) < \varepsilon, \dots, f_n(y) < \varepsilon, \ y \in R(A)\} = W_{R(A)}(f_1, \dots, f_n; \varepsilon),$$

где $W_{R(A)}(f_1, \dots, f_n; \varepsilon)$ — окрестность, принадлежащая фундаментальной системе окрестностей векторного пространства $R(A)$, наделенного топологией $\sigma(R(A), M') = \sigma(R(A), D(A^*))$.

Поскольку нормированная топология $\mathcal{T}$ сильнее слабой топологии $\sigma(R(A), D(A^*))$, то $T = W_{R(A)}(f_1, \dots, f_n; \varepsilon)$ является окрестностью нуля в топологии $\mathcal{T}$. Таким образом, непрерывность оператора $B = A^{-1}\colon (R(A), \mathcal{T}) \to (E, \sigma(E, R(A^*)))$ доказана. Так как пространство $\overline{E}$ полно, F, $\overline{E}$ — отделимые топологические векторные пространства и каждое непрерывное линейное отображение B пространства $(R(A), \mathcal{T})$ в $\overline{E}$ однозначно продолжается до непрерывного линейного отображения $\overline{B}$ пространства F в $\overline{E}$ [1, с. 163], последовательность $\{x_n = A^{-1}(y_n) = \overline{B}(y_n)\}$ сходится к некоторому элементу $\overline{x} \in \overline{E}$, который будет предельным элементом почти решения $\{x_n = A^{-1}(y_n)\}$. Как указывалось ранее, $\overline{x}$ будет при этом обобщенным решением уравнения (1). Теорема доказана.

Рассмотрим примеры обобщенных решений для бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_i = b_i, \tag{6}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n, \dots), \quad b = (b_1, \dots, b_n, \dots) \in l_2 \quad \forall\, i = 1, 2, \dots .$$

Предположим, что бесконечная матрица $A = \|a_{ij}\|_{i, j = \overline{1, \infty}}$, определяемая системой (6), удовлетворяет условию Гильберта–Шмидта

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty, \tag{7}$$

тогда оператор $y = A(x) = Ax$, порождаемый матрицей A, будет ограниченным линейным оператором, действующим в пространстве l_2. В силу неравенства (7) вектор $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, \dots) \in l_2$ для всех i, поэтому каждую строку a_i матрицы A можно считать элементом l_2. Нетрудно заметить, что оператор $y = A(x)$ будет инъективным тогда и только тогда, когда система элементов $\mathfrak{N} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ является тотальной в пространстве l_2.

***Определение* 3.** *Будем называть бесконечную матрицу* $A = \|a_{ij}\|_{i, j = \overline{1, \infty}}$, *удовлетворяющую условию Гильберта–Шмидта* (7), *матрицей с разреженны-*

ми строками, если каждая строка a_i *матрицы* A *не принадлежит замкнутому линейному подпространству* $\overline{L}_i = \overline{L}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots)$, *порожденному остальными векторами* $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots)$ *системы* $\mathfrak{A}$ *в метрике пространства* l_2: $a_i \,\overline{\in}\, \overline{L}_i$ *для всех* $i \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Система единичных ортов*

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots 0, \ldots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots 0, \ldots), \ldots, \quad e_n = (0, \ldots 0, 1, 0 \ldots)$$

пространства l_2 *содержится во множестве значений* $R(A)$ *инъективного оператора* $A(x) = Ax$ *тогда и только тогда, когда матрица* $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,\infty}}$ *имеет разреженные строки.*

Следствие. *Всякий инъективный ограниченный линейный оператор* $y = A(x)$, *действующий в пространстве* l_2, *определяемый матрицей* A *с разреженными строками, имеет всюду плотное в* l_2 *множество значений* $R(A)$.

Для нахождения обобщенного решения системы (6) рассмотрим полное линейное метрическое пространство s всех числовых последовательностей с метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in s$.

Теорема 3. *Обобщенное решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений* (6), *для которой матрица* A *и транспонированная матрица* A^* *имеют разреженные строки, принадлежит пространству* s; *при этом произвольное почти решение* $\{x_n\}$ *для системы* (6) *сходится к ее обобщенному решению в метрике пространства* s.

Примеры матриц с разреженными строками довольно многочисленны; можно показать, что такими матрицами являются диагональные и треугольные матрицы с отличными от нуля диагональными элементами, унитарные матрицы и т. д., поэтому существует большой класс систем линейных алгебраических уравнений (6), удовлетворяющих условию теоремы 3.

1. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 410 с.
2. *Функциональный* анализ. СМБ / Под ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.

Получено 25.10.94