УДК 533.9

Н. А. Бритов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ЛОКАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

For solutions of the two-dimensional first boundary-value problem of magnetohydrodynamics, we obtain *a priori* asymptotic (for high Hartmann numbers) estimates of components of the velocity of a liquid and the stream function in the interior of the flow in spaces of continuous functions.

Одержані асимптотичні (для великих значень параметра Хартмана) апріорні оцінки компонент швидкості рідини та функції струму в середині області течії у просторах неперервних функцій для розв'язків двовимірної першої крайової задачі магнітної гідродинаміки.

Рассматривается краевая задача, описывающая стационарное двумерное течение вязкой, несжимаемой, электропроводной жидкости в замкнутой, ограниченной, неодносвязной области D. Граница области $S = \bigcup_{i=0}^{n} S_i$ состоит из конечного числа замкнутых контуров (S_0 — внешний контур), отвечающих условию Ляпунова, непроницаема для жидкости и является идеальным проводником. Внешность D имеет магнитную проницаемость вакуума. Течение возбуждается заданным на S движением с известной скоростью $v_0 \in C^2(S)$, направленной по касательной к S. На течение действует постоянное потенциальное магнитное поле с индукцией $\boldsymbol{B}$. Поле $\boldsymbol{B}$ пренебрежимо мало искажается течением (безындукционный случай).

1. Краевая задача. В бескоординатной форме и в безразмерных переменных краевая задача имеет вид

$$(\nabla \times)^2 \boldsymbol{v} + \nabla(p + 0{,}5R|\boldsymbol{v}|^2) = -R\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) +$$

$$+ \mathrm{Ha}^2(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0; \quad \boldsymbol{v}|_S = \boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\tau}$ — соответственно внешняя нормаль и единичный касательный к S вектор, $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau}$; точкой $(\cdot)$ и косым крестиком $(\times)$ обозначены соответственно скалярное и векторное произведения векторов.

Векторное поле индукции представляется в виде $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_d + \boldsymbol{\kappa} b$, где векторное поле $\boldsymbol{B}_d \not\equiv 0$ компланарно плоскости течения. Относительно поля $\boldsymbol{B}_d$ предполагается, что оно не обращается в нуль в $D \cup S$ и не касательно к S, т. е.

$$0 < \inf_{D \cup S} |\boldsymbol{B}_d| = \underline{m} \le |\boldsymbol{B}_d| \le \overline{m} = \sup_{D \cup S} |\boldsymbol{B}_d| < \infty,$$

$$\int_{S_i} \boldsymbol{B} \cdot \nu \, dS_i = 0, \quad \int_{S_0} |\boldsymbol{B} \cdot \nu|^2 dS_0 = 0.$$

Из двумерности и потенциальности $\boldsymbol{B}$ следует, что $b = \mathrm{const}$.

Так как $\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{\nu} = 0$, векторное поле $\boldsymbol{v}$ может быть представлено в виде $\boldsymbol{v} = \nabla \times (\psi \boldsymbol{\kappa})$. Функция тока ψ на контурах S_i принимает постоянные значения и определена с точностью до постоянной, которую можно зафиксировать условием $\psi|_{S_0} = 0$.

В работе [1] для решений задачи (1) доказаны следующие априорные оценки:

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L_2} &\le C_\psi(v_0, B_d, R, D, S) R\,\mathrm{Ha}^{-1/2}, \\ \|v \times B_d\|_{L_2} &\le C_B(v_0, B_d, D, S) R\,\mathrm{Ha}^{-1/2}, \\ \|v\|_{L_2} &\le C_v(v_0, B_d, R, D, S) R, \\ \|\nabla \times v\|_{L_2} &\le C_\nabla(v_0, B_d, R, D, S) R\,\mathrm{Ha}^{1/2}. \end{aligned} \tag{2}$$

В примере, построенном в [2], для нормы ψ установлена оценка

$$\|\psi\|_{L_2} \le M_\psi \mathrm{Ha}^{-3/2},$$

которая, по-видимому, неулучшаема. Поэтому можно говорить о следующей оценке для ψ:

$$\|\psi\| \le M_\psi F_\psi(\mathrm{Ha}), \quad \mathrm{Ha}^{-3/2} \le F_\psi(\mathrm{Ha}) \le \mathrm{Ha}^{-1/2}. \tag{3}$$

Это неравенство является основой для получения внутренних и локальных оценок решений задачи (1).

Целью работы является получение для задачи (1) асимптотических (для больших значений числа Ha) оценок норм функции тока ψ и поля скоростей v в пространстве непрерывных функций. Для их получения может применяться любая техника исследования регулярности решений систем нелинейных эллиптических уравнений, в частности методы Е. Де Джорджи [3], Дж. Мозера [4] и их развитие [5]. Наиболее просто указанные оценки получаются с использованием локального варианта леммы Геринга [6] и теорем вложения в форме мультипликативных неравенств [5].

2. Мультипликативные неравенства. В книге [5] мультипликативные неравенства приводятся для функций из пространств $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$. В работе использован их аналог для соленоидальных векторных полей. Пусть $\langle u, v\rangle$ — скалярное произведение векторных полей в $L_2(D)$ и $J(D)$ — множество бесконечно дифференцируемых в D, финитных, соленоидальных векторных полей. Пополнение $J(D)$ по норме, порождаемой скалярным произведением $[u, v] = \langle \nabla \times u, \nabla \times v\rangle$, обозначим через $H(D)$. Нормы в пространствах L_p обозначаются $\|\cdot\|_p$, при $p = 2$ индекс опускается.

Для построения априорных оценок решений краевых задач магнитной гидродинамики применяется система ортогональных криволинейных координат, связанная с полем B_d [1]. Для этой системы координат коэффициенты Ламе имеют свойство $\underline{m} \le \Lambda_1 = \Lambda_2 = |B_d| \le \overline{m}$.

Теорема 1. *Пусть $q > 2$ и векторное поле $u(u_1, u_2) \in H(D)$. Тогда при* $2 < q \le 6$

$$\|u_1\|_q \le 4\,\overline{m}\,\underline{m}^{-1} \|u_1\|^{1-3\alpha} \|u_2\|^{\alpha} \|\nabla \times u\|^{2\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}. \tag{4}$$

Доказательство аналогично доказательству мультипликативных неравенств для функций [5] и здесь ввиду громоздкости не приводится.

3. Внутренние оценки. Пусть $D' \subset D'' \subset D$ — любая внутренняя подобласть D и $\theta(x)$ — „срезающая" функция подобласти D'. Поле скоростей течения раскладывается на коллинеарную и ортогональную B_d составляющие: $v = (v_1, v_2)$. Для задачи (1) стандартным образом записывается интегральное тождество, в котором в качестве пробного выбирается поле

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \boldsymbol{\kappa} \times (\theta^4 \nabla \psi + 4\theta^3 \psi \nabla \theta).$$

Подстановка $\boldsymbol{\Phi}(x)$ в интегральное тождество приводит к следующему равенству типа уравнения баланса энергии [1]:

$$\| \theta^2 \nabla \times \boldsymbol{v} \|^2 + \mathrm{Ha}^2 \| \theta^2 \boldsymbol{B} \nabla \psi \|^2 = -8 \langle \theta^2 \nabla \times \boldsymbol{v}, \psi | \nabla \theta |^2 \rangle -$$

$$-8 \langle \theta^2 \nabla \times \boldsymbol{v}, \theta \nabla \psi \cdot \nabla \theta \rangle - 4 \langle \theta^2 \nabla \times \boldsymbol{v}, \psi (| \nabla \theta |^2 + \theta \Delta \theta) \rangle +$$

$$+ 2R \langle \theta^2 \nabla \times \boldsymbol{v}, \theta \boldsymbol{v} \cdot (\psi \nabla \theta) \rangle - 4\, \mathrm{Ha}^2 \langle \theta^2 \boldsymbol{B} \cdot \nabla \psi, \theta \psi \boldsymbol{B} \cdot \nabla \theta \rangle. \tag{5}$$

Из этого равенства получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \| \theta^2 \nabla \times \boldsymbol{v} \| &\le 2 [N(\psi) + \mathrm{Ha} \| \theta \psi \boldsymbol{B} \cdot \nabla \theta \|], \\ \| \theta^2 \boldsymbol{B} \cdot \nabla \psi \| &\le N(\psi) \mathrm{Ha}^{-1} + \| \theta \psi \boldsymbol{B} \cdot \nabla \theta \|, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$N(\psi) = 4 \| \psi | \nabla \theta |^2 \| + 2 (\| \psi | \nabla \theta |^2 \| + \| \psi \theta \Delta \theta \|) +$$

$$+ 4 \| \theta \nabla \psi \cdot \nabla \theta \| + R \| \psi \|_4 \| \theta \boldsymbol{v} \cdot \nabla \theta \|_4.$$

В последнем равенстве требуется оценить последнее слагаемое. Поскольку функция ψ равна нулю на внешнем контуре, для оценки ее норм можно применять мультипликативное неравенство. Из этого неравенства с учетом связи функции тока и векторного поля скоростей следует

$$\| \psi \|_4 \le \sqrt{2} \| \psi \|^{1/2} \| v_2 \|^{1/4} \| v_1 \|^{1/4}.$$

Из определения „срезающей" функции вытекают оценки:

$$| \theta(x) | \le 1, \quad | \nabla \theta(x) | \le M_1^* \rho^{-1}, \quad | \Delta \theta(x) | \le M_2^* \rho^{-2},$$

где ρ — наименьшая ширина „полосы" $D'' \backslash D'$.

Поле $\theta \boldsymbol{v}$ в силу свойств функции θ обращается в нуль на S. Поэтому для оценки $\| \theta \boldsymbol{v} \|$ можно применять мультипликативное неравенство

$$\| \theta \boldsymbol{v} \|_4 \le (4 \| v_1 \|^{1/4} + \sqrt{2}) \| v_2 \|^{1/2} \| \nabla \times \boldsymbol{v} \|^{1/2}.$$

Отсюда следует оценка

$$N(\psi) \le 2 [3 (M_1^* \rho^{-1})^2 + M_2^* \rho^{-2}] \| \psi \| + 4 M_1^* \rho^{-1} \| \boldsymbol{v} \| +$$

$$+ 2R M_1^* \rho^{-1} \| \psi \|^{1/2} \| v_2 \|^{1/4} \| v_1 \|^{1/4} (4 \| v_1 \|^{1/4} +$$

$$+ \sqrt{2}) \| v_2 \|^{1/2} \| \nabla \times \boldsymbol{v} \|^{1/2}.$$

Подставляя в эту оценку оценки (2), (3), получаем

$$N(\psi) \le 2 [3 (M_1^* \rho^{-1})^2 + M_2^* \rho^{-2}] F_\psi(\mathrm{Ha}) + 4 M_1^* \rho^{-1} M_v +$$

$$+ 2R M_1^* \rho^{-1} F_\psi(\mathrm{Ha})^{1/2} M_2^{1/4} M_v^{1/4} (4 M_v^{1/4} + \sqrt{2}) M_2^{1/2} M_\nabla^{1/2} \mathrm{Ha}^{-1/8} =$$

$$= M_{n1} \rho^{-1} + M_{n2} \rho^{-2} F_\psi(\mathrm{Ha}) + R M_{n3} \rho^{-1} F_\psi(\mathrm{Ha})^{1/2} \mathrm{Ha}^{-1/8}.$$

Последнюю оценку подставим в (6):

$$\| \theta^2 \boldsymbol{B} \cdot \nabla \psi \| \le N(\psi)\,\mathrm{Ha}^{-1} + \| \theta \psi \boldsymbol{B} \cdot \nabla \theta \|,$$

$$\| \theta \nabla \times \boldsymbol{v} \| \le 2 [M_{n1} \rho^{-1} + M_{n2} \rho^{-2} F_\psi(\mathrm{Ha}) +$$

$$+ R M_{n3} \rho^{-1}\,\mathrm{Ha}^{-1/8} F_\psi(\mathrm{Ha})^{1/2} + M_{n4} \rho^{-1}\,\mathrm{Ha} F_\psi(\mathrm{Ha})] = M^*_\nabla F_\nabla(\mathrm{Ha}); \qquad (7а)$$

$$\| \theta^2 \boldsymbol{B} \cdot \nabla \psi \| \le [M_{n1} \rho^{-1} + M_{n2} \rho^{-2} F_\psi(\mathrm{Ha}) +$$

$$+ R M_{n3} \rho^{-1}\,\mathrm{Ha}^{-1/8} F_\psi(\mathrm{Ha})^{1/2}]\,\mathrm{Ha}^{-1} + M_{n4} \rho^{-1} F_\psi(\mathrm{Ha}) = M^*_2 F_2(\mathrm{Ha}). \qquad (7б)$$

Это искомые внутренние оценки. Используя их и неравенства Гельдера и Юнга, можно получить внутреннюю оценку нормы $\boldsymbol{v}$:

$$\| \theta \boldsymbol{v} \|^2 \le 0{,}5 \| \theta \boldsymbol{v} \|^2 + 0{,}5 M^*_1 \rho^{-2} F_\psi(\mathrm{Ha})^2 + \| \theta \nabla \times \boldsymbol{v} \| F_\psi(\mathrm{Ha}).$$

Отсюда

$$\| \theta \boldsymbol{v} \| \le \{ \sqrt{2} (M^*_1)^{1/2} \rho^{-1} + 2 [M_{n1} \rho^{-1} + M_{n2} \rho^{-2} F_\psi(\mathrm{Ha}) +$$

$$+ R M_{n3} \rho^{-1}\,\mathrm{Ha}^{-1/8} F_\psi(\mathrm{Ha})^{1/2} + M_{n4} \rho^{-1}\,\mathrm{Ha} F_\psi(\mathrm{Ha})]^{1/2} \} \cdot$$

$$\cdot F_\psi(\mathrm{Ha})^{1/2} = M^*_v F_v(\mathrm{Ha}). \qquad (7в)$$

Из неравенств (7) и оценки для $F_\psi(\mathrm{Ha})$ вытекают неравенства, характеризующие поведение решений задачи (1) внутри области D:

$$\mathrm{Ha}^{-3/4} \le F_v(\mathrm{Ha}) \le 1, \quad 1 \le F_\nabla(\mathrm{Ha}) \le \mathrm{Ha}^{1/2},$$
$$\mathrm{Ha}^{-3/2} \le F_2(\mathrm{Ha}) \le \mathrm{Ha}^{-1/2}. \qquad (8)$$

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Если для функции тока* ψ, *отвечающей векторному полю* $\boldsymbol{v}$ — *решению задачи* (1), *выполняется оценка* (3), *то в любой внутренней подобласти* D' *области* D *для поля* $\boldsymbol{v}$ *справедливы оценки* (7), (8).

Замечание. Как отмечалось выше, имеются примеры МГД-течений, для которых выполняется нижняя оценка функции $F_\psi(\mathrm{Ha})$. К сожалению, автору неизвестны примеры даже приближенных решений, для которых выполнялась бы верхняя оценка.

С помощью оценок (7), (8) получаются оценки норм решений задачи (1) вблизи границы. Пусть $D_s = D \setminus D'$. По построению

$$\| \nabla \times \boldsymbol{v} \|_{D'} \ge \| \theta \nabla \times \boldsymbol{v} \|_{D'}, \quad \| \boldsymbol{v} \|_{D'} \ge \| \theta \boldsymbol{v} \|_{D'}.$$

Поэтому

$$\| \nabla \times \boldsymbol{v} \|_{D_s} \le [M_\nabla - M^*_\nabla F_\nabla(\mathrm{Ha})\,\mathrm{Ha}^{-1/2}]\,\mathrm{Ha}^{1/2} = M^{(s)}_\nabla\,\mathrm{Ha}^{1/2},$$
$$\| \boldsymbol{v} \|_{D_s} \le M_v - M^*_v F_v(\mathrm{Ha}) \le M^{(s)}_v. \qquad (9)$$

При больших значениях Ha оценки (9) отличаются от глобальных только величиной (не зависящего от Ha) постоянного множителя.

4. Локальные оценки. Сначала будет получена оценка для функции тока ψ. Из оценки (2) и теоремы вложения С. Л. Соболева следует, что $\psi \in C(D)$. Поэтому достаточно оценить $\| \psi \|_\infty$.

Теорема 3. *Если для функции тока* ψ, *отвечающей векторному полю* $\boldsymbol{v}$ — *решению задачи* (1), *выполняется оценка* (2), *то справедлива оценка*

$$\|\psi\|_\infty = \sup_{D \cup S} \operatorname{esse} |\psi| \le M_\infty \mathrm{Ha}^{\frac{3p-10}{16(p-1)}} F_\psi(\mathrm{Ha})^{\frac{p-2}{2(p-1)}} = M_\infty F_\psi^\infty(\mathrm{Ha}), \tag{10}$$

$$\mathrm{Ha}^{\frac{-9p+14}{16(p-1)}} \le F_\psi^\infty(\mathrm{Ha}) \le \mathrm{Ha}^{\frac{-p-2}{16(p-1)}}, \quad 2 < p < 3.$$

Доказательство следует из оценок для составляющих поля $\boldsymbol{v}$ и мультипликативных неравенств. Пусть $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{w}$ — решение задачи (1), $\boldsymbol{a}$ — продолжение поля $\boldsymbol{v}_0$ внутрь D, построенное посредством „срезки" Хопфа [1], а $\hat{\psi}$ — функция тока, отвечающая полю $\boldsymbol{w}$. Пусть w_1 и w_2 — соответственно коллинеарная и ортогональная полю $\boldsymbol{B}_d$ составляющие $\boldsymbol{w}$. Тогда в силу мультипликативного неравенства [5]

$$\|\hat{\psi}\|_\infty \le M \overline{m} \underline{m}^{-1} \|w_1\|_p^{\frac{p}{4(p-1)}} \|w_2\|_p^{\frac{p}{4(p-1)}} \|\psi\|^{\frac{p-2}{2(p-1)}}, \quad 2 < p < 3. \tag{11}$$

Первая норма оценивается посредством неравенства (4), вторая — посредством мультипликативного неравенства для функций:

$$\|w_1\|_p \le 4\, \overline{m} \underline{m}^{-1} \|w_1\|^{3/p-1/2} \|w_2\|^{1/2-1/p} \|\nabla \times w\|^{1-2/p},$$

$$\|w_2\|_p \le 2^{2/p}\, \overline{m} \underline{m}^{-1} \|w_2\|^{2/p} \|\nabla \times w\|^{1-2/p}.$$

Оценка (10) получается после подстановки в (11) этих оценок, оценок (2), (3) и оценок для поля $\boldsymbol{a}$ [1].

Замечание. Если в (5) выбрать p сколь угодно близким к двум, то для $M_\infty F_\psi^\infty(\mathrm{Ha})$ получается оценка

$$\mathrm{Ha}^{-1/4+\gamma} \le F_\psi^\infty(\mathrm{Ha}) \le \mathrm{Ha}^{-1/4+\delta}, \quad \gamma, \delta > 0.$$

Теорема 3а. *Если для функции тока* ψ, *отвечающей векторному полю* $\boldsymbol{v}$ — *решению задачи* (1), *выполняется оценка* (2), *то для любой внутренней подобласти* $D' \subset D$ *справедлива оценка*

$$\sup_{D'} \operatorname{esse} |\psi| \le M_{\psi_0}^* F_{\psi_0}^\infty(\mathrm{Ha}), \tag{10a}$$

$$\mathrm{Ha}^{-\frac{9(3p-2)}{32(p-1)}} \le F_{\psi_0}^\infty(\mathrm{Ha}) \le \mathrm{Ha}^{-\frac{p+2}{16(p-1)}}, \quad 2 < p < 3.$$

Доказательство повторяет доказательство теоремы 3.

Для получения оценки для поля $\boldsymbol{v}$ используется локальный вариант леммы Геринга [6]. Здесь приводится формулировка этой леммы в двумерном случае в форме, которая будет использована при доказательстве теоремы о локальной оценке. Пусть $B_\rho(x_0) = \{x \in \Pi : |x - x_0| \le \rho\}$ — круг радиуса ρ на плоскости Π с центром в точке x_0, $|B_\rho| = \operatorname{mes}(B_\rho)$, ∂B_ρ — граница B_ρ. Пусть $g(x)$ и $f(x)$ — неотрицательные функции, определенные в B_3 и такие, что $g(x) \in L_p(B_3)$, $p > 1$, $f(x) \in L_p(B_3)$, $p' > p$.

Предложение. *Пусть для каждой точки* $x_0 \in B_3 \setminus \partial B_3$ *и* $\rho \le 0{,}5\operatorname{dist}(x_0, \partial B_3)$ *выполнено неравенство*

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} g^p(x)\,dx \le b|B_\rho|\left\{\left[|B_{2\rho}|^{-1}\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} g(x)\,dx\right]^p + \right.$$

$$\left. + |B_{2\rho}|^{-1}\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} f^p(x)\,dx\right\} + \alpha|B_{2\rho}|^{-1}\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} g^p(x)\,dx, \quad b > 1. \tag{12}$$

Тогда существуют положительные постоянные α_0, c, $p_1 > p$, *зависящие только от* p *и* p_0, *такие, что при* $\alpha < \alpha_0$ *функция* $g(x) \in L_{2,\mathrm{loc}}(Q_3)$ *для* $q \in [p, p_1]$ *и при* $0 < \delta < 3$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} g^q(x)\,dx \le c\left\{\left[\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} g^p(x)\,dx\right]^{q/p} + b\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} f^q(x)\,dx\right\}. \tag{13}$$

Доказательство предложения имеется в [7].

Применение леммы Геринга к задаче (1) использует схему [7]. Пусть $x_0 \in D$ и ρ — такое положительное число, что $B_{2\rho}(x_0)$ целиком принадлежит D, а $\theta(x)$ — „срезающая" функция, равная 1 в $B_\rho(x_0)$ и нулю вне $B_{2\rho}(x_0)$.

Лемма 1. *Пусть* $\boldsymbol{v}$ — *обобщенное решение задачи* (1). *Тогда* $(\nabla\times\boldsymbol{v}) \in L_{s,\mathrm{loc}}(D)$, $s > 2$ *и выполняется оценка*

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} |\nabla\times\boldsymbol{v}|^s\,dx \le c\left\{\left[\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} |\nabla\times\boldsymbol{v}|^2\,dx\right]^{q/p} + b\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} f^q(x)\,dx\right\}, \tag{14}$$

$$s = rq, \quad p_1 > 2/r = p, \quad q \in [2/r, p_1],$$

где b *и* c — *некоторые постоянные, не зависящие от* R, Ha, *а*

$$f(x) = 5^{1/p}[4^{2/p}|\psi\theta|\nabla\theta|^2|^{2/p} + 4^{2/p}|\psi(\theta|\nabla\theta|^2 + \theta^2\Delta\theta)|^{2/p} +$$

$$+ 4^{2/p}|\theta^2\,\nabla\psi\cdot\nabla\theta|^{2/p} + R^{2/p}|\theta^2\boldsymbol{v}\cdot(\psi\nabla\theta)|^{2/p} +$$

$$+ 2^{2/p}\,\mathrm{Ha}^{2/p}|\theta^2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\psi|^{1/p}|\theta\psi\boldsymbol{B}\cdot\nabla\theta|^{1/p}].$$

Доказательство. Для доказательства в равенстве (5) полагается

$$g = |\nabla\times\boldsymbol{v}|^r, \quad r < 2, \quad 2/r = p > 1, \quad 1/r + 1/s = 1, \quad s = r/(r-1).$$

Тогда в силу неравенств Гельдера и Юнга получаем

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} g^p(x)\,dx \le \int\limits_D \theta^2 g^p(x)\,dx = \|\theta^2\nabla\times\boldsymbol{v}\|^2 \le 2\|\theta\,\nabla\times\boldsymbol{v}\|_r\,\cdot$$

$$\cdot\{4\|\psi\theta|\nabla\theta|^2\|_s + 2[\|\theta^2\psi\Delta\theta\|_s + \|\theta\,\psi|\nabla\theta|^2\|_s] +$$

$$+ 4\|\theta^2\,\nabla\psi\cdot\nabla\theta\|_s + R\|\theta^2\boldsymbol{v}\cdot(\psi\nabla\theta)\|_s\} +$$

$$+ 4\,\mathrm{Ha}^2|\langle\theta^2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\psi, \theta\psi\boldsymbol{B}\cdot\nabla\theta\rangle| \le 0{,}5\left(\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} \theta^r g(x)\,dx\right)^p +$$

$$+32\{16\|\theta\psi|\nabla\theta|^2\|_s^2+4[\|\theta\psi|\nabla\theta|^2\|_s+\|\theta^2\psi\Delta\theta\|_s^2]+$$

$$+16\|\theta^2\nabla\psi\cdot\nabla\theta\|_s^2+R^2\|\theta^2\boldsymbol{v}\cdot(\psi\nabla\theta)\|_s^2\}+$$

$$+4\,\mathrm{Ha}^2|\langle\theta^2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\psi,\theta\psi\boldsymbol{B}\cdot\nabla\theta\rangle|\le 0{,}5\left(\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)}\theta^r g(x)\,dx\right)^p+$$

$$+32\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)}[16|\psi\theta|\nabla\theta|^2|^2+4|\psi(\theta|\nabla\theta|^2+\theta^2\Delta\theta|^2+16|\theta^2\nabla\psi\cdot\nabla\theta|^2+$$

$$+R^2|\theta^2\boldsymbol{v}\cdot(\psi\nabla\theta)|^2+4\,\mathrm{Ha}^2|\theta^2\boldsymbol{B}\cdot\nabla\psi||\theta\psi\boldsymbol{B}\cdot\nabla\theta|]\,dx\le$$

$$\le b|Q_\rho(x_0)|\left[\left(\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)}g(x)\,dx\right)^p+\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)}f(x)^p\,dx\right],$$

$$b=|Q_\rho(x_0)|^{-1}\max[0{,}5|Q_{2\rho}(x_0)|^r,5^{1/p}|Q_\rho(x_0)|].$$

Отсюда в силу (13) при $s=qr$ следует утверждение леммы.

Из (14) и теоремы вложения следует, что $\boldsymbol{v}\in C(D)$. Поэтому, как и в случае функции тока, достаточно оценить $\|\boldsymbol{v}\|_\infty$.

Теорема 4. *Если для функции тока* ψ, *отвечающей векторному полю* v — *решению задачи* (1), *выполняется оценка* (3), *то в любой внутренней замкнутой подобласти* $D'\subset D$ *для составляющих поля* $\boldsymbol{v}$ *справедливы оценки*

$$\sup_{D\cup S}\mathrm{esse}|v_1|\le M_{v1}^\infty M_\infty F_{v1}^\infty(\mathrm{Ha}),\qquad \sup_{D\cup S}\mathrm{esse}|v_2|\le M_{v2}^\infty M_\infty F_{v2}^\infty(\mathrm{Ha}),$$

$$\mathrm{Ha}^{\frac{12p-5(q+3)}{16(2p-q)}}\le F_{v1}^\infty(\mathrm{Ha})\le\mathrm{Ha}^{\frac{9q-7}{8(2p-q)}},\tag{15}$$

$$\mathrm{Ha}^{\frac{3(3p-4q)}{16(2p-q)}}\le F_{v2}^\infty(\mathrm{Ha})\le\mathrm{Ha}^{\frac{5q+4p-7}{8(2p-q)}},\quad 1<p<q.$$

Доказательство. Для получения оценок (15) применяется мультипликативное неравенство. Пусть $x_0\in D'$ и $\rho>0$ таково, что круг $B_{2\rho}(x_0)$ целиком содержится в D'. Пусть $\hat\theta(x)$ — „срезающая" функция, равная 1 в $B_{\rho/2}(x_0)$ и нулю вне $B_\rho(x_0)$; $s=rq>2$. Тогда из мультипликативного неравенства следуют оценки

$$\begin{gathered}\|\hat\theta v_1\|_\infty\le M_\infty F_v(\mathrm{Ha})^{\frac{s-2}{2(s-1)}}\Big[\|\hat\theta(\nabla\times\boldsymbol{v})\|_s^{\frac{s}{2(s-1)}}+\|v_1|\nabla\hat\theta|\|_s^{\frac{s}{2(s-1)}}\Big],\\ \|\hat\theta v_2\|_\infty\le M_\infty F_2(\mathrm{Ha})^{\frac{s-2}{2(s-1)}}\Big[\|\hat\theta(\nabla\times\boldsymbol{v})\|_s^{\frac{s}{2(s-1)}}+\|v_2|\nabla\hat\theta|\|_s^{\frac{s}{2(s-1)}}\Big].\end{gathered}\tag{16}$$

В (16) $\|\hat\theta(\nabla\times\boldsymbol{v})\|_s^s$ оценивается с помощью (14):

$$\|\hat\theta(\nabla\times\boldsymbol{v})\|_s^s\le\int\limits_{B_\rho(x_0)}|\nabla\times\boldsymbol{v}|^s\,dx\le c\left\{\left[\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)}|\nabla\times\boldsymbol{v}|^2\,dx\right]^{q/p}+\right.$$

$$+\, b \int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} f^q(x)\,dx \Bigg\} \le c \Bigg\{ [M_\nabla^* F_\nabla(\mathrm{Ha})]^{2q/p} + b \int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} f^q(x)\,dx \Bigg\}.$$

Последний интеграл оценивается следующим образом:

$$\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} f^q(x)\,dx \le 5^{q-1+1/p} \int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} [16^{q/p} |\psi\theta|\nabla\theta|^2|^{2q/p} +$$

$$+ 4^{q/p} |\psi(\theta|\nabla\theta| + \theta^2\Delta\theta|^{2q/p} + 16^{q/p} |\theta^2\nabla\psi\cdot\nabla\theta|^{2q/p} +$$

$$+ R^{2q/p} |\theta^2 \boldsymbol{v}\cdot(\psi\nabla\theta)|^{2q/p} + 4^{q/p}\mathrm{Ha}^{2q/p} |\theta^2 \boldsymbol{B}\cdot\nabla\psi|^{q/p}\cdot$$

$$\cdot |\theta\psi\boldsymbol{B}\cdot\nabla\theta|^{q/p}]\,dx \le 5^{q-1+1/p} \Bigg\{ 16^{q/p} [3(2M_1^*\rho^{-1})^{4q/p} +$$

$$+ 2(4M_2^*\rho^{-2})^{2q/p}] \int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} |\theta\psi|^{2q/p}\,dx + 2(M_1^*\rho^{-1})^{2q/p}\cdot$$

$$\cdot \left[16^{q/p} \int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} |\theta\boldsymbol{v}|^{2q/p}\,dx + R^{2q/p} \int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} (|\theta\boldsymbol{v}||\theta\psi|)^{2q/p}\,dx \right] +$$

$$+ 4^{q/p}\mathrm{Ha}^{2q/p} m^{-2} \{ 2(M_1^*\rho^{-1})^{q/p} \int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} |\theta v_2|^{q/p} |\theta\psi|^{q/p}\,dx \Bigg\}. \qquad (17)$$

Интегралы в (17) оцениваются с помощью мультипликативного неравенства Гельдера:

$$\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} |\theta\psi|^{2q/p}\,dx \le (2^{1/q}\,\overline{m}\underline{m}^{-1})^{2q/p} \|\theta\psi\|^{2/p}\cdot$$

$$\cdot \|\theta v_1\|^{(q-1)/p} \|\theta v_2\|^{(q-1)/p},$$

$$\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} |\theta\boldsymbol{v}|^{2q/p}\,dx \le 2^{-1}(2\,\overline{m}\underline{m}^{-1})^{2q/p} [2^{4q/p} \|\theta v_1\|^{3-q/p}\cdot$$

$$\cdot \|\theta v_2\|^{q/p-1} \|\nabla\times(\theta\boldsymbol{v})\|^{2(q/p-1)} +$$

$$+ 2^{1/p} \|\theta v_2\|^{2/p} \|\nabla\times(\theta\boldsymbol{v})\|^{2(q-1)/p}],$$

$$\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} |\theta\psi|^{2q/p} |\theta\boldsymbol{v}|^{2q/p}\,dx \le \|\theta\psi\|_\infty^{2q/p} \left(\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} |\theta\boldsymbol{v}|^{2q/p}\,dx \right) \le$$

$$\le 2^{-1}(2\,\overline{m}\underline{m}^{-1}\|\theta\psi\|_\infty)^{2q/p} [2^{4q/p} \|\theta v_1\|^{3-q/p} \|\theta v_2\|^{q/p-1}\cdot$$

$$\cdot \|\nabla\times(\theta\boldsymbol{v})\|^{2(q/p-1)} + 2^{1/p} \|\theta v_2\|^{2/p} \|\nabla\times(\theta\boldsymbol{v})\|^{2(q-1)/p}],$$

$$\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} \|\theta v_2\|^{q/p} |\theta\psi|^{q/p}\,dx \le 2^{3/2p} (\overline{m}\underline{m}^{-1})^{2q/p} \|\theta\psi\|^{1/p}\cdot$$

$$\cdot \| \theta v_2 \|^{(q+1)/2p} \| \theta v_1 \|^{(q-1)/2p} \| \nabla \times (\theta \boldsymbol{v}) \|^{(q-1)/p}.$$

Подставляя эти оценки в предыдущее неравенство и учитывая (7), (8), (10), получаем (зависимость функций F от Ha не указывается)

$$\int\limits_{B_{2\rho}(x_0)} f^q(x)\,dx \le 5^{q-1+1/p}(\overline{m}\,\underline{m}^{-1})^{2q/p}\{4^{(4q-1)/p}\rho^{-4q/p}\cdot$$

$$\cdot [3(M_1^*)^{4q/p} + 2(M_2^*)^{2q/p}](M_\psi F_\psi)^{2/p}(M_v^* F_v)^{(q-1)/p}\cdot$$

$$\cdot (M_2^* F_2)^{(q-1)/p} + 2^{4q/p-1}(M_1^*\rho^{-1})^{2q/p}[16^{q/p} +$$

$$+ R^{2q/p}(M_\psi^\infty F_\psi^\infty)^{2q/p}][2^{4q/p}(M_v^* F_v)^{3-q/p}(M_2^* F_2)^{q/p-1}\cdot$$

$$\cdot (M_\nabla^* F_\nabla)^{2(q-p)/p} + 2^{1/p}(M_2^* F_2)^{2/p}(M_\nabla^* F_\nabla)^{2(q-1)/p}] +$$

$$+ 2^{9q/2p}(M_1^*\rho^{-1})^{q/p}\overline{m}^2\,\mathrm{Ha}^{2q/p}(M_\psi F_\psi)^{1/p}(M_2^* F_2)^{(q+1)/2p}\cdot$$

$$\cdot (M_v^* F_v)^{(q-1)/2p}(M_\nabla^* F_\nabla)^{(q-1)/p}\} = M_f^* F_f(\mathrm{Ha}),$$

$$\mathrm{Ha}^{-(15-7q)/8p} \le F_f(\mathrm{Ha}) \le \mathrm{Ha}^{(9q-7)/4p}.$$

Нормы $\| v_1 | \nabla \hat{\theta} | \|_s$ оцениваются с помощью мультипликативных неравенств:

$$\| v_1 | \nabla \hat{\theta} | \|_s \le 4 M_1^* \rho^{-1} \| \theta v_1 \|_s \le$$

$$\le 16 M_1^* \rho^{-1} \overline{m}\,\underline{m}^{-1} \| \theta v_1 \|^{-1/2+3/s} \| \theta v_2 \|^{1/2-1/s} \| \nabla \times (\theta \boldsymbol{v}) \|^{1-2/s},$$

$$\| v_2 | \nabla \hat{\theta} | \|_s \le 4 M_1^* \rho^{-1} \| \theta v_1 \|_s \le$$

$$\le 2^{3-1/2s} M_1^* \rho^{-1} \overline{m}\,\underline{m}^{-1} \| \theta v_2 \|^{1/2s} \| \nabla \times (\theta v) \|^{1-1/2s}.$$

Полученные оценки подставляются в (16):

$$\| \hat{\theta} v_1 \|_\infty \le M_\infty F_v(\mathrm{Ha})^{\frac{s-2}{2(s-1)}} \Big\{ c[M_f^* F_f(\mathrm{Ha})]^{\frac{1}{2(s-1)}} +$$

$$+ (16 M_1^* \rho^{-1})^{\frac{s}{2(s-1)}} (\overline{m}\,\underline{m}^{-1})^{\frac{s}{2(s-1)}} [M_v^* F_v(\mathrm{Ha})]^{(6-s)/4(s-1)}\cdot$$

$$\cdot [M_2^* F_2(\mathrm{Ha})]^{(s-2)/4(s-1)} [M_\nabla^* F_\nabla(\mathrm{Ha})]^{(s-2)/2(s-1)} \Big\},$$

$$\| \hat{\theta} v_2 \|_\infty \le M_\infty F_2(\mathrm{Ha})^{\frac{s-2}{2(s-1)}} \Big\{ c[M_f^* F_f(\mathrm{Ha})]^{\frac{1}{2(s-1)}} +$$

$$+ (2^{3-1/2s} M_1^* \rho^{-1})^{\frac{s}{2(s-1)}} (\overline{m}\,\underline{m}^{-1})^{\frac{s}{2(s-1)}} [M_2^* F_2(\mathrm{Ha})]^{1/4(s-1)}\cdot$$

$$\cdot [M_\nabla^* F_\nabla(\mathrm{Ha})]^{(2s-1)/4(s-1)} \Big\}.$$

Отсюда следуют оценки (15) для круга $B_{2\rho}(x_0)$. Для завершения доказательства теоремы нужно выбрать конечное покрытие D' кругами $B^{(i)}_{\rho/2}(x_0)$, $i = 1$,

$2, \ldots, n_D$ (это возможно в силу компактности D') и в качестве M_{v1}^{∞}, M_{v2}^{∞} взять наибольшую из постоянных, полученных для каждого из $B_{\rho/2}^{(i)}(x_0)$. Нетрудно заметить, что $F_{v1}^{\infty}(\mathrm{Ha}) \geq F_{v2}^{\infty}(\mathrm{Ha})$ для всех $\mathrm{Ha} > 1$.

Легко видеть, что основную роль в определении поведения решений задачи (1) внутри области при больших значениях числа На играет оценка L_2-нормы функции тока течения. Условия на гладкость s и $\boldsymbol{v}_0(s)$ могут быть ослаблены.

1. *Бритов Н. А.* Априорные оценки, существование и единственность двумерных и осесимметричных безындукционных решений краевых задач магнитной гидродинамики // Магнитная гидродинамика. – 1988. – № 4. – С. 81–85.
2. *Бритов Н. А.* Течение между пористыми вращающимися цилиндрами в радиальном магнитном поле // Там же. – 1979. – № 3. – С. 135–137.
3. *De Giorgi E.* Sulla differenziabilita delle extremali degli integrali multipli regolari // Mem. delle Acad. sci. Torino, Ser. 3. – 1957. – **3**, № 1. – P. 25–43.
4. *Moser J.* A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularrity problem for elliptic differential equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1960. – **13**, № 3. – P. 457–468.
5. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
6. *Giaquinta M., Modica G.* Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems // J. reine und angew. Math. – 1979. – **311/312**. – P. 145–169.
7. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.

Получено 10.04.95