УДК 517.9

**А. Н. Станжицкий, И. Н. Копась** (Киев. ун-т)

# ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРАХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ*

We study invariant tori of stochastic systems of Itô type on a plane and present conditions for stability of such sets in probability.

Досліджуються інваріантні тори стохастичних систем типу Іто на площині. Наведено умови стійкості за ймовірністю таких множин.

В работе [1] изучались инвариантные множества квазилинейных стохастических систем типа Ито. Приведены условия, при которых первые интегралы линейной части будут инвариантными множествами полной системы. Однако в теории нелинейных колебаний большой интерес представляют интегральные множества, являющиеся инвариантными торами. Изучению таких инвариантных множеств на плоскости для стохастических дифференциальных уравнений типа Ито и посвящена данная работа.

Напомним, что непустое множество $D \subset R^n$ есть инвариантным множеством для случайного процесса $\xi(t) \in R^n$, если $P\{\xi(t) \in D / \xi(0) \in D\} = 1$, для $t \geq 0$.

Рассмотрим на плоскости систему стохастических дифференциальных уравнений типа Ито

$$\begin{aligned} dx &= f_1(x, y)dt + \sigma_1(x, y)d\omega(t), \\ dy &= f_2(x, y)dt + \sigma_2(x, y)d\omega(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где функции $f_1, \sigma_1, f_2, \sigma_2$ определены на $R^2$ и удовлетворяют условиям теоремы существования решений, $\omega(t)$ $(t \geq 0)$ — винеровский процесс.

Пусть детерминированная система

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \tag{2}$$

имеет инвариантный тор

$$x = g_1(\varphi), \quad y = g_2(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \tag{3}$$

где $g_1, g_2 \in C^2([0, 2\pi])$.

Выясним условия, при которых инвариантный тор (3) системы (2) будет инвариантным множеством и системы (1). При изучении инвариантных множеств типа (3) удобно, согласно [2], перейти к локальным координатам $(\varphi, h)$.

Пусть $(g_1')^2 + (g_2')^2 \neq 0$ $\forall\, \varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда, как известно, от декартовых координат $(x, y)$ можно перейти к локальным координатам $(\varphi, h)$ по формулам

$$x = g_1(\varphi) - g_2'(\varphi)h, \quad y = g_2(\varphi) + g_1'(\varphi)h. \tag{4}$$

При такой замене инвариантный тор (3) переходит в тор $h = 0$.

Проведем замену (4) для уравнения (1). Но поскольку стохастическое дифференцирование отличается от обычного, то данная процедура будет намного сложнее, чем в детерминированном случае. Замену (4) перепишем в виде

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$x = P_1(\varphi, h), \quad y = P_2(\varphi, h), \tag{5}$$

а обратную замену обозначим

$$\varphi = r_1(x, y), \quad h = r_2(x, y). \tag{6}$$

При этом

$$\begin{aligned} x &\equiv P_1(r_1(x, y), r_2(x, y)), \\ x &\equiv P_2(r_1(x, y), r_2(x, y)). \end{aligned} \tag{7}$$

Согласно формуле Ито имеем

$$d\varphi = r'_{1x}dx + r'_{1y}dy + \frac{1}{2}\left(r''_{1xx}\sigma_1^2 + 2r_{1xy}\sigma_1\sigma_2 + r''_{1yy}\sigma_2^2\right)dt =$$

$$= r'_{1x}(f_1\,dt + \sigma_1\,d\omega) + r'_{1y}(f_2\,dt + \sigma_2\,d\omega) + \frac{1}{2}\left(r''_{1xx}\sigma_1^2 + 2r''_{1xy}\sigma_1\sigma_2 + r''_{1yy}\sigma_2^2\right)dt,$$

$$dh = r'_{2x}(f_1\,dt + \sigma_1\,d\omega) + r'_{2y}(f_2\,dt + \sigma_2\,d\omega) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(r''_{2xx}\sigma_1^2 + 2r'_{2xy}\sigma_1\sigma_2 + r''_{2yy}\sigma_2^2\right)dt.$$

Дифференцируя тождество (7) по $x$, а затем по $y$, находим выражения для $r'_{1x}$, $r'_{1y}$, $r'_{2x}$, $r'_{2y}$. Имеем

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial P_2}{\partial r_2}}{\dfrac{\partial P_1}{\partial r_1}\dfrac{\partial P_2}{\partial r_2} - \dfrac{\partial P_1}{\partial r_2}\dfrac{\partial P_2}{\partial r_1}}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial P_1}{\partial r_1}}{\dfrac{\partial P_1}{\partial r_1}\dfrac{\partial P_2}{\partial r_2} - \dfrac{\partial P_1}{\partial r_2}\dfrac{\partial P_2}{\partial r_1}}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial P_2}{\partial r_1}}{\dfrac{\partial P_1}{\partial r_1}\dfrac{\partial P_2}{\partial r_2} - \dfrac{\partial P_2}{\partial r_1}\dfrac{\partial P_1}{\partial r_2}}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial P_1}{\partial r_1}}{\dfrac{\partial P_1}{\partial r_1}\dfrac{\partial P_2}{\partial r_2} - \dfrac{\partial P_1}{\partial r_2}\dfrac{\partial P_2}{\partial r_1}}. \tag{11}$$

Дифференцируя выражения (10) и (11), можно найти производные

$$\frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 r_2}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 r_2}{\partial y^2}.$$

Обозначим

$$Q(r_1, r_2) = \frac{\partial P_1}{\partial r_1}\frac{\partial P_2}{\partial r_2} - \frac{\partial P_1}{\partial r_2}\frac{\partial P_2}{\partial r_1}.$$

Выражая полученные производные через $\varphi$ и $h$, после несложных выкладок будем иметь

$$\frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{-g_2'(\varphi) - g_1''(\varphi)h}{Q(\varphi, h)},$$
$$\frac{\partial r_2}{\partial y} = \frac{g_1'(\varphi) - g_2''(\varphi)h}{Q(\varphi, h)}, \tag{12}$$

где

$$Q(\varphi, h) = (g_1')^2 + (g_2')^2 + (g_2'g_1'' - g_1'g_2'')h.$$

Поскольку вторые производные зависят от $r_1$ и $r_2$, то и они, очевидно, выражаются через $\varphi$ и $h$. А поэтому систему (1) можно переписать в координатах $\varphi$ и $h$, где второе уравнение имеет вид

$$dh = \left(r_{2x}'f_1 + r_{2y}''f_2 + \frac{1}{2}r_{2x}''\sigma_1^2 + r_{2xy}''\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}r_{2yy}''\sigma_2^2\right)dt + (r_{2x}'\sigma_1 + r_{2y}'\sigma_2)\,d\omega. \tag{13}$$

Условие инвариантности множества $h = 0$ приводит к уравнениям

$$r_{2x}'(\varphi, 0)f_1(g_1(\varphi), g_2(\varphi)) + r_{2y}'(\varphi, 0)f_2(g_1(\varphi), g_2(\varphi)) +$$
$$+ \frac{1}{2}r_{2xx}''(\varphi, 0)\sigma_1^2(g_1(\varphi), g_2(\varphi)) + r_{2xy}''\sigma_1(g_1(\varphi), g_2(\varphi))\sigma_2(g_1(\varphi), g_2(\varphi)) +$$
$$+ \frac{1}{2}r_{2yy}''(\varphi, 0)\sigma_2^2(g_1(\varphi), g_2(\varphi)) = 0,$$
$$\sigma_1(g_1(\varphi), g_2(\varphi))\,g_2'(\varphi) = \sigma_2(g_1(\varphi), g_2(\varphi))\,g_1'(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Но поскольку множество

$$x = g_1(\varphi), \quad y = g_2(\varphi)$$

инвариантно для системы (2), то

$$r_{2x}'(\varphi, 0)f_1(g_1, g_2) + r_{2y}'(\varphi, 0)f_2(g_1, g_2) = 0 \quad \forall\, \varphi \in [0, 2\pi].$$

Тогда условия инвариантности примут вид

$$\sigma_1(g_1, g_2)\,g_1' = \sigma_2(g_1, g_2)\,g_2',$$
$$\frac{1}{2}r_{2xx}''(\varphi, 0)\sigma_1^2(g_1, g_2) + r_{2xy}''(\varphi, 0)\sigma_1(g_1, g_2)\sigma_2(g_1, g_2) + \tag{14}$$
$$+ \frac{1}{2}r_{2yy}''(\varphi, 0)\sigma_2^2(g_1, g_2) = 0 \quad \forall\, \varphi \in [0, 2\pi].$$

Изложенное выше можно резюмировать в виде теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть для системы* (1) *и* (2) *выполняются указанные выше условия. Для того чтобы инвариантный тор* (3) *системы* (2) *был инвариантным множеством системы* (1), *необходимо и достаточно выполнение условий* (14).

Далее будем считать систему (1) приведенной к локальным координатам $(\varphi, h)$ в некоторой окрестности многообразия (3) (не обязательно инвариантного). Таким образом, систему (1) перепишем в виде

$$\dot{\varphi} = P_1(\varphi, h) + Q_1(\varphi, h)\,\dot{\omega}(t),$$
$$\dot{h} = P_2(\varphi, h) + Q_2(\varphi, h)\,\dot{\omega}(t), \tag{15}$$

где $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\|h\| \le \delta$.

Условие инвариантности многообразия $h = 0$ приводит к равенствам $P_2(\varphi, 0) = Q_2(\varphi, 0) = 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Обозначим

$$\Gamma_0(\varphi) = (g_1'(\varphi))^2 + (g_2'(\varphi))^2.$$

Очевидно,

$$j_0 h^2 \leq \Gamma_0(\varphi) h^2 \leq j^0 h^2,$$

где

$$j^0 = \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} \Gamma_0(\varphi),\ j_0 = \min_{\varphi \in [0, 2\pi]} \Gamma_0(\varphi).$$

Из приведенного выше неравенства получаем оценку

$$j_0 h^2 \leq (x - f(\varphi))^2 \leq j^0 h^2. \tag{16}$$

Оценка (16) показывает, что характер устойчивости многообразия (3) однозначно определяется характером устойчивости тора $h = 0$.

**Определение.** *Инвариантное для процесса* $(\varphi(t), h(t))$ *множество* $h = 0$ *назовем устойчивым по вероятности, если*

$$\lim_{\|h\| \to 0} P_h \left\{ \sup_{t > 0} \|h(t)\| > \varepsilon \right\} = 0,$$

где $h(0) = h$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

Выделим в системе (15) линейные по $h$ члены. Из изложенного выше следует, что с точностью до $h^2$ система (15) имеет вид

$$\begin{aligned} d\varphi &= a_0(\varphi)\,dt + Q_{01}(\varphi)\,d\omega(t), \\ dh &= P_0(\varphi) h\,dt + Q_{02}(\varphi)\,d\omega(t). \end{aligned} \tag{17}$$

Систему (17) назовем, следуя [2], системой уравнений в вариациях инвариантного тора $h = 0$. Ясно, что она определена в предположении гладкости функций $f_1$, $f_2$, $\sigma_1$, $\sigma_2$ в окрестности многообразия (3).

**Теорема 2.** *Пусть относительно системы* (1) *и тора* (3) *выполнены приведенные выше условия гладкости, инвариантности и вводимости локальных координат.*

*Тогда если найдется положительно определенная квадратичная форма* $V(\varphi, h) = S(\varphi) h^2$, *где* $S(\varphi)$ *— дважды непрерывно дифференцируемая и периодическая по* $\varphi$ *с периодом* $2\pi$ *функция такая, что в некоторой окрестности тора* $h = 0$ $L_0 V \leq -\beta h^2$ *(*$L_0$ *— производящий оператор марковского процесса для* (17)), *то многообразие* (3) *устойчиво по вероятности.*

***Доказательство.*** Как известно из [3], производящий оператор в силу (17) имеет вид

$$L_0 V = L_0(S(\varphi) h^2) = \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} a_0(\varphi)\, h^2 + 2 S(\varphi) P_0(\varphi) h^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 S(\varphi)}{\partial \varphi^2} Q_{01}^2(\varphi) h^2 + 2 \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} Q_{01}(\varphi) Q_{02}(\varphi) h^2 + 2 S(\varphi) Q_{02}(\varphi) h^2 \right\} \leq -\beta h^2. \tag{18}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное число. Нетрудно показать, что из условий гладкости правых частей (1) и условия инвариантности следует

$$\begin{aligned} |P_1(\varphi, h) - a_0(\varphi)| &\leq M(\varepsilon), \\ |Q_1(\varphi, h) - Q_{01}(\varphi)| &\leq M(\varepsilon), \\ |P_2(\varphi, h) - P_0(\varphi) h| &\leq M(\varepsilon) |h|, \\ |Q_2(\varphi, h) - Q_{02}(\varphi) h| &\leq M(\varepsilon) |h| \end{aligned} \tag{19}$$

для всех $\varphi$, $h$ из области $|h| \le \varepsilon$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, где $M(\varepsilon)$ — положительная постоянная, $M(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Обозначим через $L$ производящий оператор в силу системы (15). Он имеет вид

$$LV = L(S(\varphi)h^2) = L_0 V + \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} h^2 (P_1(\varphi, h) - a_0(\varphi)) +$$

$$+ 2S(\varphi) h (P_2(\varphi, h) - P_0(\varphi) h) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 S(\varphi)}{\partial \varphi^2} h^2 (Q_1^2(\varphi, h) - Q_{01}^2(\varphi)) + \right.$$

$$+ 2S(\varphi)(Q_2^2(\varphi, h) - Q_{02}^2(\varphi) h^2) +$$

$$\left. + 2 \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} h (Q_1(\varphi, h) Q_2(\varphi, h) - Q_{01}(\varphi) Q_{02}(\varphi) h) \right\}. \tag{20}$$

Равенство (20) в силу (19) допускает оценку

$$LV \le L_0 V + Kh^2 M(\varepsilon) + Kh^2 M(\varepsilon) + \frac{1}{2} \left\{ K(|h| M(\varepsilon) + M(\varepsilon) |h|) + \right.$$

$$\left. + \left( |h| \left( M(\varepsilon) + 2 \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |Q_{01}(\varphi)| \right) + M(\varepsilon)|h| + 2|h| \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |Q_{02}(\varphi)| \right) \right\} \le$$

$$\le L_0 V +$$

$$+ 2Kh^2 M(\varepsilon) \left( 1 + \frac{1}{2} \left\{ M(\varepsilon) + 2 \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |Q_{01}(\varphi)| + M(\varepsilon) + 2 \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |Q_{02}(\varphi)| \right\} \right) \le$$

$$\le -\beta h^2 + 2Kh^2 l(\varepsilon) \le 0 \tag{21}$$

при малых $\varepsilon$. Здесь

$$K = \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} \left\{ \left| \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} \right| + 2|S(\varphi)| + \left| \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right| \right\}, \quad l(\varepsilon) \to 0, \ \varepsilon \to 0.$$

Из неравенства (21) в силу теоремы 7.1 из [3] (гл. VII) следует устойчивость тора $h = 0$. Тогда доказательство теоремы вытекает из неравенства (16).

Теорема 2 есть обобщением на стохастический случай теоремы из [2] об устойчивости по первому приближению для инвариантных торов.

1. *Бабчук В. Г., Кулинич Г. Л.* Об одном методе нахождения инвариантных множеств стохастических дифференциальных уравнений Ито // Теория вероятностей и ее применения. – 1978. – **23**. – С. 454.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
3. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.

Получено 18.05.95