УДК 517. 53

А. А. Довгошей (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ЧЕБЫШЕВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛИНОМАМИ НА ЗАМКНУТОМ ПОДМНОЖЕСТВЕ С ЕДИНСТВЕННОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТОЧКОЙ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ*

We describe the domain of analyticity of a continuous function f in terms of the sequence of the best polynomial approximations of f on a compact set K $(K \subset \mathbb{C})$ and the sequence of norms of Chebyshev polynomials for K.

У термінах послідовності найкращих наближень поліномами неперервної функції f на компактній множині K $(K \subset \mathbb{C})$ і послідовності норм чебишовських поліномів для K описана область аналітичності f.

В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с изучением зависимости между аналитическим продолжением функции f, заданной на компакте K, и скоростью полиномиальной аппроксимации этой функции на K. К первым результатам такого типа следует, по-видимому, отнести теорему Бернштейна – Уолша [1, 2]. Однако, как в [1, 2], так и в последующих работах (см., например, [3, 4]) рассматривался, как правило, случай регулярного (в смысле задачи Дирихле для $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$) компакта K. Для нерегулярных компактов, в частности, для компактов, имеющих нулевую логарифмическую емкость, $\operatorname{cap} K = 0$, проблема остается практически не исследованной.

Из всех компактов K бесконечной мощности, $\operatorname{card} K = \infty$, и нулевой емкости, $\operatorname{cap} K = 0$, наиболее просто, в определенном смысле, устроены компакты с единственной предельной точкой $b \in K$. Если обозначить через K' производное множество компакта K, то условие единственности предельной точки $b \in \in K$ может быть записано в виде $\exists!\, b \in K'$ или $K' = \{b\}$.

Основная цель настоящей статьи — описать взаимосвязь между наилучшими полиномиальными приближениями функции f на компакте с единственной предельной точкой и строением „максимального" открытого множества U, в которое f может быть аналитически продолжена.

Приведем теперь необходимые в дальнейшем определения и обозначения.

Для произвольного компакта K комплексной плоскости $\mathbb{C}$ $C(K)$ — пространство непрерывных на K функций, снабженное максимум-нормой

$$\forall f \in C(K): \ \|f\|_K = \max\{|f(z)| : z \in K\};$$

$\operatorname{Hol}(K)$ — подпространство $C(K)$ функций, допускающих голоморфное продолжение в какую-либо окрестность K.

Для $f \in C(K)$ через $E_n(f, K) = E_n(f)$ обозначим наилучшее полиномиальное приближение f на K:

$$E_n(f, K) = \min\{\|f - P_n\|_K : \deg P_n \le n\}.$$

Для изучения последовательности $E_n(f)$ далее используются интерполяционные многочлены, построенные по узлам Фекете.

Набор точек $\{w_0^{(n)}; w_1^{(n)}; \ldots, w_n^{(n)}\}$, $w_j^{(n)} \in K$, называется n-й системой точек (узлов) Фекете, если для этого набора достигается максимум модуля определителя Вандермонда

* Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда, грант NU-94000.

$$V_{n+1}(z_0; z_1; \ldots, z_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{j=k+1}^{n} (z_k - z_j). \tag{1}$$

Максимум модуля определителя n-го порядка будем обозначать

$$\tilde{V}_n = \max \{ | V_n(z_0; z_1; \ldots, z_{n-1}) | : z_j \in K, \ 0 \le j \le n-1 \}. \tag{2}$$

По определению системы узлов Фекете

$$| V_{n+1}(w_0^{(n)}; w_1^{(n)}; \ldots, w_n^{(n)}) | = \tilde{V}_{n+1}. \tag{3}$$

Будем рассматривать на K последовательности полиномов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{W_n\}_{n=2}^{\infty}$: $T_n(z)$ — полином Чебышева для K; $B_n(z)$ — полином Чебышева для K с нулями на K [5, с. 287];

$$W_n(z) = \prod_{j=0}^{n-1} (z - w_j^{(n-1)})$$

— полином с нулями в узлах Фекете. Будем считать, что $\deg W_n = \deg B_n = \deg T_n = n$.

Замечание. Полиномы Чебышева T_n, как известно, однозначно определяются компактом K, что, вообще говоря, не верно для полиномов W_n и B_n. Поэтому далее последовательности $\{W_n\}_{n=2}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ следует понимать как произвольные фиксированные последовательности таких полиномов.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть K — компакт на плоскости $\mathbb{C}$, $f \in C(K)$ и $\exists\, ! z_0 \in K'$. Функция f принадлежит* $\mathrm{Hol}(K)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\frac{E_n(f, K)}{\| T_{n+1} \|_K} \right)^{1/n} = \frac{1}{R} < \infty;$$

при этом $\{ z : | z - z_0 | < R \}$ — наибольший открытый круг с центром z_0, в котором f может быть доопределена до аналитической функции.

Перейдем к доказательству вспомогательных результатов.

Пусть последовательность $\{A_n\}_{n=2}^{\infty}$ совпадает с любой из последовательностей $\{\| T_n \|_K\}_{n=2}^{\infty}$, $\{\| B_n \|_K\}_{n=2}^{\infty}$ или $\{\| W_n \|_K\}_{n=2}^{\infty}$.

Лемма 1. *Для произвольного компакта K на плоскости и любого натурального $n \ge 2$ справедливо неравенство*

$$\tilde{V}_n A_n \le \tilde{V}_{n+1} \le (n+1) \tilde{V}_n A_n. \tag{4}$$

Доказательство. При $A_n = \| T_n \|_K$ неравенство (4) известно [5, с. 287], а так как для всех $n \ge 2$ $\| T_n \|_K \le \| B_n \|_K \le \| W_n \|_K$, правое неравенство в двойном неравенстве (4) выполняется. Левое неравенство — это следствие тождества

$$W_n(z) = \frac{V_{n+1}(z; w_0^{(n-1)}; \ldots, w_{n-1}^{(n-1)})}{V_n(w_0^{(n-1)}; w_1^{(n-1)}; \ldots, w_{n-1}^{(n-1)})},$$

которое становится очевидным после замены V_n и V_{n+1} на их значения по формуле (1). Теперь из (2) и (3) имеем

$$\forall z \in K: \ \tilde{V}_n \, | W_n(z) | \leq | V_{n+1}(z; w_0^{(n-1)}; \ldots, w_{n-1}^{(n-1)}) | \leq \tilde{V}_{n+1}.$$

Следствие 1. 1) *Для любого компакта* $K \subset \mathbb{C}$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\| T_n \|_K}{\| B_n \|_K} \right)^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\| T_n \|_K}{\| W_n \|_K} \right)^{1/n} = 1. \tag{5}$$

2) *Если* $\operatorname{cap} K = 0$, *то*

$$\lim_{n \to \infty} (A_n)^{1/n} = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Равенство (5) прямо следует из (4), а для доказательства (6) нужно использовать соотношение

$$\tau = \operatorname{cap} K = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\tilde{V}_{n+1}}{\tilde{V}_n} \right)^{1/n},$$

где τ — трансфинитный диаметр K [5, с. 287–302].

Лемма 2. *Пусть* K — *компакт*, $\operatorname{cap} K = 0$, *и* z_0 — *изолированная точка* K, *тогда*

$$\exists N = N(z_0, K) \quad \forall n \geq N: B_n(z_0) = W_n(z_0) = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Нужно проверить, что для всех достаточно больших n точка z_0 является корнем многочленов B_n и W_n. Рассмотрим случай полиномов B_n.

Положим $d = \min \{ | z - z_0 | : z \in K, \ z \neq z_0 \}$; если z_0 — изолированная точка K, то $d > 0$. Пусть $B_n(z_0) \neq 0$, тогда

$$\| B_n \|_K \geq | B_n(z_0) | = \prod_{j=0}^{n-1} | z_0 - b_j^{(n-1)} | \geq d^n,$$

где $\{ b_0^{(n-1)}; b_1^{(n-1)}; \ldots, b_{n-1}^{(n-1)} \}$, $b_j^{(n-1)} \in K$, — множество корней полинома B_n. Если (7) не верно, то, используя это неравенство, находим возрастающую последовательность натуральных чисел $\{ n_j \}_{j=1}^{\infty}$, для которой $\| B_{n_j} \|_K \geq d^{n_j}$. Следовательно,

$$\limsup_{n \to \infty} \| B_n \|_K^{1/n} \geq d > 0,$$

что противоречит (6).

Аналогично рассматривается и случай полиномов W_n.

Предположим теперь, что K — компакт с единственной предельной точкой b. Будем считать, что $b = 0$, а остальные точки K пронумеруем в порядке невозрастания их модулей $| z_1 | \geq | z_2 | \geq | z_3 | \geq \ldots \geq 0$. Теорему 1, очевидно, достаточно доказать при этом, не умаляющем общности, предположении.

Лемма 3. *Пусть*

$$K \subset D(0, R_1) = \{ z : |z| < R_1 \}, \quad K' = \{ 0 \}, \quad f \in C(K).$$

Если f *аналитически продолжается в круг* $D(0, r)$, $r > R_1$, *то*

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\frac{E_n(f, K)}{\| T_{n+1} \|_K} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{r}. \tag{8}$$

Доказательство. Для оценки величины $E_n(f)$ воспользуемся интерполяционным многочленом Лагранжа в форме Эрмита [6, с. 72]

$$L_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\omega(t) - \omega(z)}{t - z} \frac{\hat{f}(t)}{\omega(t)} dt,$$

где

$$\omega(z) = \prod_{k=0}^{n} (z - \eta_k),$$

точки z и η_k принадлежат K, G — область со спрямляемой границей, для которой $K \subseteq G$, а $\hat{f}$ — аналитическое продолжение f в $\overline{G}$. В качестве G возьмем круг $D(0, R)$, выбрав радиус R из условия $r > R > R_1$. Интерполяционные многочлены $L_n(z)$ будем строить по узлам Фекете $\{w_0^{(n)}; w_1^{(n)}; \ldots$ $\ldots, w_n^{(n)}\}$, т. е. $\omega(z) = W_{n+1}(z)$. Используя интегральное представление погрешности интерполирования, разность между исходной функцией f и интерполяционным многочленом L_n в точке $z \in K$ запишем в виде

$$f(z) - L_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{W_{n+1}(z)}{t - z} \frac{\hat{f}(t)}{W_{n+1}(z)} dt. \tag{9}$$

Так как $K' = \{0\}$, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|z_{N+1}| \le \varepsilon < |z_N|$, где z_N и z_{N+1} — точки компакта K. Используя (7), можно утверждать, что для достаточно больших n

$$\{z_1; z_2; \ldots; z_N\} \subseteq \{w_0^{(n)}; w_1^{(n)}; \ldots; w_n^{(n)}\}, \tag{10}$$

т. е. точки z_j, $1 \le j \le N(\varepsilon)$, попадают в n-ю систему узлов Фекете. При таких n из формулы (9) легко выводится оценка

$$E_n(f, K) \prod_{j=1}^{N} (R - |z|_j) \le \frac{R \| W_{n+1} \|_K}{2\pi (R - \varepsilon)^{n+2-N}} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta. \tag{11}$$

Из неравенства (11) при $n \to \infty$ получаем следующее соотношение:

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{E_n(f)}{\| W_{n+1} \|_K} \right)^{1/n} \le \frac{1}{R - \varepsilon},$$

что с учетом 5 эквивалентно неравенству

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{E_n(f)}{\| T_{n+1} \|_K} \right)^{1/n} \le \frac{1}{R - \varepsilon}.$$

Если в последнем выражении перейти к пределу сначала при $\varepsilon \to 0$, а затем при $R \to r$, то получим (8).

Лемма 4. *Пусть K — произвольный компакт на плоскости, точки $z_0 \notin K$, $\operatorname{dist}(z_0, K) = \min\{|z_0 - \xi| : \xi \in K\}$. Тогда для любого многочлена $P_n(z)$ степени не выше n выполняется неравенство*

$$|P_n(z_0)| \le \frac{(n+1) \| P_n \|_K \, |W_{n+1}(z_0)|}{\operatorname{dist}(z_0, K) \| W_n \|_K}. \tag{12}$$

Доказательство. Построим для $P_n(z)$ интерполяционный многочлен n-й степени и заметим, что остаток интерполяции равен нулю. Если в качестве узлов интерполяции выбрать точки Фекете $\{w_0^{(n)}; w_1^{(n)}; \ldots, w_n^{(n)}\}$, то, используя интерполяционную формулу Лагранжа, получаем

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{W_{n+1}(z) P_n(w_k^{(n)})}{(z - w_k^{(n)}) W'_{n+1}(w_k^{(n)})}.$$

Отсюда при $z_0 \notin K$ справедливо неравенство

$$|P_n(z_0)| \leq \|P_n\|_K \frac{|W_{n+1}(z_0)|}{\min\limits_K |z_0 - w_k^{(n)}|} \sum_{k=0}^{n} |W'_{n+1}(w_k^{(n)})|^{-1}. \tag{13}$$

Оценим сумму в правой части (13). Так как при любом k, $0 \leq k \leq n$,

$$|W'_{n+1}(w_k^{(n)})| = \prod_{j \neq k} |w_j^{(n)} - w_k^{(n)}|,$$

приводя оцениваемую сумму к общему знаменателю и используя (1) – (3), получаем

$$\sum_{k=0}^{n} |W'_{n+1}(w_k^{(n)})|^{-1} =$$

$$= (\tilde{V}_{n+1})^{-1} \sum_{j=0}^{n} |V_n(w_0^{(n)}; \ldots, w_{j-1}^{(n)}; w_{j+1}^{(n)}; \ldots, w_n^{(n)})| \leq \frac{(n+1)\tilde{V}_n}{\tilde{V}_{n+1}}.$$

Подставляя полученную оценку в (13), имеем

$$|P_n(z_0)| \leq \frac{(n+1)\|P_n\|_K |W_{n+1}(z_0)| \tilde{V}_n}{\operatorname{dist}(z_0, K) \tilde{V}_{n+1}}. \tag{14}$$

В силу неравенства (4) $(\tilde{V}_n / \tilde{V}_{n+1}) \leq \|W_n\|_K^{-1}$. Используя это неравенство и неравенство (14), получаем (12).

Для компактов с единственной предельной точкой ноль из леммы 4 легко выводится следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть K — компакт и $K' = \{0\}$. Тогда для произвольной точки $z_0 \notin K$ и произвольной последовательности полиномов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $\deg P_n \leq n$, выполняется неравенство*

$$\limsup_{n \to \infty} |P_n(z_0)|^{1/n} \leq |z_0| \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{\|P_n\|_K}{\|T_n\|_K} \right)^{1/n}. \tag{15}$$

Доказательство. Зафиксируем малое ε, $0 < \varepsilon < |z_0|$, и, как в лемме 3, выберем $N = N(\varepsilon)$, для которого $|z_{N+1}| \leq \varepsilon < |z_N|$. Тогда для достаточно больших n из условия (10) следует неравенство

$$(|z_0| - \varepsilon)^{n-N} \leq |W_n(z_0)| \prod_{j=1}^{N} |z_0 - z_j|^{-1} \leq (|z_0| + \varepsilon)^{n-N}.$$

Извлекая корень n-й степени и переходя к пределу при $n \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$, получаем равенство

$$\lim_{n\to\infty} |W_n(z_0)|^{1/n} = |z_0|.$$

Из этого равенства и неравенства (12) следует

$$\limsup_{n\to\infty} |P_n(z_0)|^{1/n} \le |z_0| \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\|P_n\|_K}{\|W_n\|_K}\right)^{1/n}.$$

Для завершения доказательства достаточно использовать (5).

Теорема 2. *Пусть K — компакт, $K' = \{0\}$, $f \in C(K)$. Если*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{E_n(f, K)}{\|T_{n+1}\|_K}\right)^{1/n} = \frac{1}{r} \tag{16}$$

и $D(0,r) \supset K$ (т. е. $r > |z_1|$), то круг $D(0,r)$ — максимальный круг с центром в нуле, в который функция f допускает аналитическое продолжение. Обратно, если $D(0,r)$ — максимальный круг с центром в нуле, в который f допускает аналитическое продолжение, и $D(0,r) \supset K$, то выполняется равенство (16).

Доказательство. Пусть выполняется (16) и $D(0,r) \supset K$. Покажем, что f может быть аналитически продолжена в круг $D(0,r)$.

Обозначим через $P_{n,f}$ многочлен наилучшего приближения f на K, т. е.

$$\|f - P_{n,f}\|_K = E_n(f, K), \quad \deg P_{n,f} \le n.$$

Рассмотрим ряд

$$S(z) = P_{0,f}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} (P_{n+1,f}(z) - P_{n,f}(z)).$$

Из равенств (6) и (16) следует, что $S(z)$ сходится к f равномерно на K. Для доказательства наличия у f аналитического продолжения в $D(0,r)$ достаточно установить равномерную сходимость ряда $S(z)$ на окружности $T_{r_1} = \{z : |z| = r_1\}$ для любого r_1 такого, что $r_1 < r$ и $D(0, r_1) \supset K$.

Из определения $P_{n,f}$ следует

$$\|P_{n,f} - P_{n+1,f}\|_K \le \|f - P_{n,f}\|_K + \|f - P_{n+1,f}\|_K \le 2E_n(f)$$

Используя (15), получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\|P_{n+1,f} - P_{n,f}\|_{T_{r_1}}\right)^{1/(n+1)} \le r_1 \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{E_n(f)}{\|T_{n+1}\|_K}\right)^{1/(n+1)} \le \frac{r_1}{r}.$$

Так как $r_1 < r$, то по признаку Коши ряд $S(z)$ равномерно сходится на T_{r_1}. Таким образом, f аналитически продолжается в $D(0, r)$.

Покажем, что $D(0,r)$ — максимальный круг, в который f допускает аналитическое продолжение. Допустим, что f продолжается до голоморфной функции в $D(0,R)$, где $R > r$. Используя (8), получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{E_n(f, K)}{\|T_{n+1}\|_K}\right)^{1/n} = \frac{1}{r} \le \frac{1}{R}.$$

Таким образом, из $R > r$ следует, что $R \le r$ — противоречие.

Обратно, пусть $D(0, r) \supset K$ — максимальный круг, в который f может быть аналитически продолжена. Докажем равенство (16).

Положим

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{E_n(f)}{\|T_{n+1}\|_K}\right)^{1/n} = \frac{1}{R_1}.$$

Из (8) следует, что $R_1 \geq r$, а в силу доказанного выше f аналитически продолжается в $D(0, R_1)$. Из максимальности $D(0, r)$ вытекает неравенство $r \geq R_1$, т. е. $R_1 = r$, что и доказывает (16).

Теорема 2 является частью теоремы 1, для доказательства которой осталось рассмотреть случай

$$\infty > \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{E_n(f, K)}{\|T_{n+1}\|_K}\right)^{1/n} \geq \frac{1}{|z_1|}.$$

Определим на полуоткрытом интервале $(0; |z_1|]$ функцию N, принимающую натуральные значения. В произвольной точке $\rho \in (0; |z_1|]$ значение функции $N(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} N_\rho$ — по определению решение следующего двойного неравенства:

$$|z_{N_\rho+1}| < \rho \leq |z_{N_\rho}|,$$

т. е. $N_\rho + 1$ — номер первой точки компакта K, попавшей в открытый круг $D(0, \rho)$. Положим

$$Q_{N_\rho}(z) = \prod_{j=1}^{N_\rho}(z - z_j). \tag{17}$$

В силу леммы 2 для всех достаточно больших n полиномы B_n и W_n делятся на полином Q_{N_ρ}. Обозначим через $\tilde{B}_{n-N_\rho}$ и $\tilde{W}_{n-N_\rho}$ частное от деления этих полиномов на Q_{N_ρ}:

$$B_n = Q_{N_\rho}\tilde{B}_{n-N_\rho}, \qquad W_n = Q_{N_\rho}\tilde{W}_{n-N_\rho}.$$

Наряду с компактом K будем рассматривать семейство компактов $K_\rho = K \cap$ $\cap D(0, \rho)$, $\rho \in (0; |z_1|]$. Если $d = \operatorname{dist}(K_\rho, K \backslash K_\rho)$, то

$$\forall z \in K_\rho : |Q_{N_\rho}(z)| \geq d^{N_\rho}. \tag{18}$$

По аналогии с полиномами T_n, W_n, B_n будем для K_ρ рассматривать полиномы $T_n^{(\rho)}$, $W_n^{(\rho)}$ и $B_n^{(\rho)}$, т. е. $T_n^{(\rho)}$ — полином Чебышева для K_ρ и т. д.

Лемма 6. *Пусть K — компакт, $K' = \{0\}$, тогда для любого фиксированного $\rho \in (0; |z_1|]$ и всех достаточно больших n справедливо неравенство*

$$d^{N_\rho}\|T_{n-N_\rho}^{(\rho)}\|_{K_\rho} \leq \|B_n\|_K \leq \|Q_{N_\rho}\|_{K_\rho}\|B_{n-N_\rho}^{(\rho)}\|_{K_\rho}, \tag{19}$$

где $d = \operatorname{dist}(K_\rho, K \backslash K_\rho)$.

Доказательство. Следующие неравенства вытекают из определения B_n и $B_n^{(\rho)}$:

$$\|B_n\|_K = \|Q_{N_\rho}\tilde{B}_{n-N_\rho}\|_K \leq \|Q_{N_\rho}B^{(\rho)}_{n-N_\rho}\|_K =$$
$$= \|Q_{N_\rho}B^{(\rho)}_{n-N_\rho}\|_{K_\rho} \leq \|Q_{N_\rho}\|_{K_\rho}\|B^{(\rho)}_{n-N_\rho}\|_{K_\rho}.$$

Аналогично, из определения B_n, $T_n^{(\rho)}$ и (18) следует

$$\|B_n\|_K = \|Q_{N_\rho}\tilde{B}_{n-N_\rho}\|_{K_\rho} \geq d^{N_\rho}\|\tilde{B}_{n-N_\rho}\|_{K_\rho} \geq d^{N_\rho}\|T^{(\rho)}_{n-N_\rho}\|_{K_\rho}.$$

Замечание. В последнем неравенстве многочлен $T^{(\rho)}_{n-N_\rho}$ возникает из-за того, что a priori не ясно, имеют ли полиномы Q_{N_ρ} и $\tilde{B}_{n-N_\rho}$ общие корни.

Пусть $f \in C(K)$, $K' = \{0\}$, $\rho \in (0; |z_1|]$. Обозначим через $L^{(\rho)}$ интерполяционный многочлен Лагранжа функции f с узлами интерполяции $\{z_1; z_2; \ldots \ldots, z_{N_\rho}\}$. Положим

$$\tilde{f} = f - L^{(\rho)}, \tag{20}$$

тогда $\tilde{f}(z_1) = \tilde{f}(z_2) = \ldots = \tilde{f}(z_{N_\rho}) = 0$.

Введем в рассмотрение вспомогательную величину $E_n^0(\tilde{f}) = E_n^0(\tilde{f}, K)$, которую определим при $n \geq N_\rho$ равенством

$$E_n^0(\tilde{f}, K) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\|\tilde{f} - P_n\|_K : \deg P_n \leq n,\ P_n(z_1) = \ldots = P_n(z_{N_\rho}) = 0\}. \tag{21}$$

Лемма 7. *Пусть K — компакт, $K' = \{0\}$. Тогда для любого фиксированного $\rho \in (0; |z_1|]$, всех достаточно больших n и произвольной $f \in C(K)$ справедливо неравенство*

$$E_n^0(\tilde{f}, K) \geq E_n(f, K) \geq \frac{1}{n+2}E_n^0(\tilde{f}, K). \tag{22}$$

Доказательство. Заметим, что для произвольных компакта K, полинома P имеем

$$\forall f \in C(K):\ (\deg P \leq n) \Rightarrow (E_n(f-P, K) = E_n(f, K)).$$

Отсюда при $n \geq N_\rho$ получаем

$$E_n(\tilde{f}, K) = E_n(f, K). \tag{23}$$

Кроме того, известно, что интерполяционный многочлен Лагранжа L_n, построенный по узлам Фекете компакта K, удовлетворяет следующему условию:

$$\forall f \in C(K):\ \|f - L_n\|_K \leq (n+2)\|f - P_n\|_K,$$

где P_n — произвольный многочлен степени не выше n [6, с. 83]. Используя это условие и условие (10) при достаточно больших n, получаем

$$E_n^0(\tilde{f}, K) \geq E_n(\tilde{f}, K) \geq \frac{1}{n+2}\|\tilde{f} - L_n\|_K \geq \frac{1}{n+2}E_n^0(\tilde{f}, K).$$

Из этой цепочки неравенств с учетом (23) следует (22).

Пусть $\overline{P}_n$ — полином, для которого в (21) достигается равенство. По определению $E_n^0(\tilde{f}, K)$ полином Q_{N_ρ} является делителем полинома $\overline{P}_n$. Положим $\tilde{P}_{n-N_\rho} = \overline{P}_n / Q_{N_\rho}$. Используя неравенство (18), оцениваем величину $E_n^0(\tilde{f}, K)$ снизу:

$$E_n^0(\tilde{f}, K) = \left\| \tilde{f} - Q_{N_\rho} \tilde{P}_{n-N_\rho} \right\|_K \geq d^{N_\rho} \left\| (\tilde{f} / Q_{N_\rho}) - \tilde{P}_{n-N_\rho} \right\|_{K_\rho} \geq$$

$$\geq d^{N_\rho} E_{n-N_\rho}(\tilde{f} / Q_{N_\rho}, K_\rho). \tag{24}$$

Пусть теперь для полинома M_{n-N_ρ} справедливо равенство

$$E_{n-N_\rho}(\tilde{f} / Q_{N_\rho}, K_\rho) = \| (\tilde{f} / Q_{N_\rho}) - M_{n-N_\rho} \|_{K_\rho}.$$

Тогда

$$E_{n-N_\rho}(\tilde{f} / Q_{N_\rho}, K_\rho) = \max_{z \in K_\rho} \left| \frac{\tilde{f}(z) - M_{n-N_\rho}(z) Q_{N_\rho}(z)}{Q_{N_\rho}(z)} \right| \geq$$

$$\geq (\| Q_{N_\rho} \|_{K_\rho})^{-1} \| \tilde{f} - Q_{N_\rho} M_{n-N_\rho} \|_{K_\rho} \geq \frac{E_n^0(\tilde{f}, K)}{\| Q_{N_\rho} \|_{K_\rho}}.$$

Из этих неравенств и (24) следует

$$d^{-N_\rho} E_n^0(\tilde{f}, K) \geq E_{n-N_\rho}(\tilde{f} / Q_{N_\rho}, K_\rho) \geq (\| Q_{N_\rho} \|_{K_\rho})^{-1} E_n^0(\tilde{f}, K). \tag{25}$$

Из неравенств (19), (22) и (25) легко выводится следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть K — компакт, $K' = \{0\}$, $f \in C(K)$, $\rho \in (0; |z_1|]$, $K_\rho = K \cap D(0, \rho)$. Тогда справедливо равенство*

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\frac{E_n(f, K)}{\| T_{n+1} \|_K} \right)^{1/n} = \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{E_n(\tilde{f} / Q_{N_\rho}, K_\rho)}{\| T_{n+1}^\rho \|_{K_\rho}} \right)^{1/n}, \tag{26}$$

где $\tilde{f}$ и Q_{N_ρ} определяются по формулам (20) *и* (17) *соответственно.*

Последняя лемма и теорема 2 позволяют завершить доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что непрерывная на K $(K' = \{0\})$ функция f принадлежит $\mathrm{Hol}(K)$ тогда и только тогда, когда f может быть доопределена до аналитической функции в некоторой окрестности нуля — это тривиальное следствие условия $K' = \{0\}$.

Пусть теперь

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{E_n(f, K)}{\| T_{n+1} \|_K} = \rho^{-1} < \infty. \tag{27}$$

Тогда в силу теоремы 2 и равенства (26) функция $\tilde{\tilde{f}} = (f - L^{(\rho)}) / Q_{N_\rho}$ аналитически продолжается в круг $D(0, \rho)$, причем это максимальный круг, в который $\tilde{\tilde{f}}$ может быть продолжена аналитически. Так как $f = \tilde{\tilde{f}} Q_{N_\rho} + L^{(\rho)}$, максимальный круг, в который аналитически продолжается f, имеет радиус не меньше чем ρ.

Предположим, что f доопределена до аналитической функции $\hat{f}$ в $D(0, \rho_1)$ и $\rho_1 > \rho$. Если некоторые из точек $\{z_1, \ldots, z_{N_\rho}\}$ попадают в круг $D(0,$

ρ_1), то в этих точках у функции $\hat{f} - L^{(\rho)}$ будут нули порядка не ниже первого и, следовательно, функция $(\hat{f} - L^{(\rho)}) / Q_{N_\rho}$ — аналитическое продолжение $\tilde{\tilde{f}}$ в $D(0, \rho_1)$. (Если таких точек нет, то наличие аналитического продолжения у $\tilde{\tilde{f}}$ в $D(0, \rho_1)$ очевидно.) Следовательно, предположение $\rho_1 > \rho$ приводит к противоречию.

Таким образом, из равенства (27) следует, что f аналитически продолжается в окрестность нуля и максимальный круг с центром в нуле, в котором f может быть доопределена до голоморфной функции — это $D(0, \rho)$.

Обратно. Предположим, что максимальный круг с центром в нуле, в котором f доопределяется до голоморфной функции $\hat{f}$, — это $D(0, \rho)$. Докажем, что выполняется равенство (27). Из предположения следует, что $(\hat{f} - L^{(\rho)}) / Q_{N_\rho}$ — аналитическое продолжение $(f - L^{(\rho)}) / Q_{N_\rho}$ в круг $D(0, \rho)$.

Из теоремы 2 вытекает справедливость равенства

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{E_n((f - L^{(\rho)})/Q_{N_\rho}, K_\rho)}{\| T_{n+1} \|_{K_\rho}} \right)^{1/n} = \frac{1}{\rho_1}, \tag{28}$$

где $\rho_1 \geq \rho$. Если $\rho_1 > \rho$, то, используя равенство (28) и уже доказанную часть теоремы 1, легко видеть, что f продолжается до аналитической в $D(0, \rho_1)$, а это противоречит предположению о максимальности $D(0, \rho)$. Следовательно, $\rho_1 = \rho$ и (27) доказано.

Следствие **2.** *Пусть* K *— компакт на плоскости* $\mathbb{C}$, $K' = \{0\}$, $f \in C(K)$. *Функция* f *продолжается до целой тогда и только тогда, когда*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{E_n(f, K)}{\| T_{n+1} \|_K} \right)^{1/n} = 0.$$

1. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (1912) // Собрание сочинений. Т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – С. 11–104.
2. *Walsh I. L.* Uber den grad der Approximation einer analytishen funktion // Munchner Bericte. – 1926. – P. 223–229.
3. *Батырев А. В.* К вопросу о наилучшем приближении аналитической функции полиномами // Докл. АН СССР. – 1951. – 76. – С. 173–175.
4. *Blatt H. P., Saff E. B., Simkani M.* Jentesch – Lzegö type theorems for the zeros of best approximants // J. London Math. Soc. – 1988. – 38, № 2. – P. 307–316.
5. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
6. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – М.: Мир, 1986. – 216 с.

Получено 10.04.95