УДК 517.988.57

Я. М. Дымарский (Луган. пед. ин-т)

О ВЕТВЯХ МАЛЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

In the case of double degeneration of a linearized problem, we study the points of bifurcation of the null solutions of nonlinear equations of special type.

Досліджуються точки біфуркації нульового розв'язку нелінійних рівнянь спеціального вигляду у випадку двократного виродження лінеаризованої задачі.

1. **Введение.** Проблеме бифуркаций посвящена обширная литература (см., например, [1–4] и имеющуюся там библиографию). Результаты настоящей работы примыкают к результатам [5–7], однако здесь предложен новый метод исследования. Он основан на рассмотрении некоторого многообразия, порожденного семейством линейных уравнений. С помощью этого метода можно выяснить, является ли двукратное собственное значение линеаризованной задачи точкой бифуркации нелинейной задачи, точно назвать число возникающих ветвей малых решений, указать асимптотику ветвей в нуле. Перечисленные характеристики точек бифуркации допускают наглядную геометрическую интерпретацию и легко вычислимы для важных конкретных случаев (задача Дирихле, периодическая задача).

Пусть H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормою $\|\cdot\|$; H_0 — линейное подпространство в H, полное относительно некоторой нормы $\|\cdot\|_0$, причем вложение H_0 в H компактно. Типичный пример: H — пространство функций L_2, а H_0 — некоторое подпространство более регулярных функций. Обозначим через D линейный фредгольмов оператор индекса нуль [4], действующий из H_0 в H. Потребуем, чтобы D был симметричным, т. е. для любых u_1 и u_2 из H_0 выполняется равенство $\langle Du_1, u_2\rangle = \langle u_1, Du_2\rangle$. Через $L(H_0, H)$ обозначим пространство компактных симметричных линейных операторов, действующих из H_0 в H, с обычной нормой. Обозначим через $A(\cdot)$ гладкое класса C^1 отображение из H_0 в $L(H_0, H)$. Это отображение порождает нелинейный оператор $Au = A(u)u$, действующий из H_0 в H. Рассмотрим уравнение

$$Du + \lambda A(u)u = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in H_0$. Пусть оператор $A(\cdot)$ имеет вид

$$A(u) = I + A_i(u) + B(u), \tag{2}$$

где I — компактный оператор вложения H_0 в H, оператор A_i однородный порядка i, оператор B гладкий и $B(u) = o(\|u\|^i)$. Оператор A_i называется однородным порядка i (i — натуральное число), если $A_i(u) = \hat{A}(u, \ldots, u)$, где $\hat{A}(v_1, \ldots, v_i)$ — полилинейный симметрический непрерывный оператор i переменных [8].

Пара $(\lambda, 0) \in \mathbb{R} \times H_0$ удовлетворяет уравнению (1) при всех λ. Назовем ее тривиальным решением. Пару (λ, u), удовлетворяющую (1), назовем решением этого уравнения, если $u \neq 0$. При этом λ называется собственным значением, а u — собственным вектором.

Определение [1]. *Число λ_0 называется точкой бифуркации для уравнения* (1), *если для каждого $\varepsilon > 0$ уравнение* (1) *имеет решение, удовлетворяющее неравенству* $|\lambda - \lambda_0| + \|u\| < \varepsilon$.

Известно [1], что точки бифуркации для уравнения (1) находятся только среди собственных значений линеаризованной задачи, т. е. среди чисел λ_0, для которых уравнение $Du + \lambda_0 u = 0$ нетривиально разрешимо относительно $u \in H_0$. Доказано [1], что каждое простое собственное значение λ_0 является точкой бифуркации, причем из точки $(\lambda_0, 0)$ на плоскости $\{\lambda, u\}$ выходят, вообще говоря, две гладких ветви решений. В дальнейшем $\lambda_0 \neq 0$ — двукратное собственное значение линеаризованной задачи, u_1, u_2 — ортонормированные в H собственные векторы, отвечающие λ_0.

2. Основные понятия и обозначения. Рассмотрим задачу

$$\begin{pmatrix} e+d & b \\ b & e-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{3}$$

о собственном значении $\gamma \in \mathbb{R}$ и единичном собственном векторе $z = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Полагаем, что φ — параметризация единичной окружности S_1. Параметры e, d, $b \in \mathbb{R}^1$. Нас интересует зависимость φ от e, d, b. Задача (3) равносильна системе

$$\begin{cases} b\cos 2\varphi - d\sin 2\varphi = 0, & (4) \\ \gamma = e + d\cos 2\varphi + b\sin 2\varphi. & (5) \end{cases}$$

Уравнение (4) задает многообразие $Q \subset S_1 \times \mathbb{R}^2$, определяющее искомую связь между φ, d и b. Из (4), в частности, следует, что z не зависит от параметра e. Многообразие Q представляет собой линейчатую поверхность [9], направляющей которой является окружность S_1. Прямолинейная образующая равномерно вращается вокруг направляющей. Обойдя S_1, образующая совершает два оборота; S_1 задается системой $d = b = 0$. Окружность S_1 разбивает Q на два подмногообразия Q_k: $(d\cos 2\varphi + b\sin 2\varphi)(-1)^k > 0$, $k = 1, 2$ (см. (5)). Каждое Q_k является открытым связным подмножеством Q. Если точка $M(\varphi, d, b) \in Q_k$, то соответствующее собственное значение γ, вычисляемое с помощью (5), имеет номер k: $\gamma = \gamma_k$. Если $N(0, 0, \varphi) \in S_1$, то N соответствует матрица с двухкратным собственным значением: $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = e$. Если мы рассматриваем матрицы с невырожденным спектром, т. е.

$$d^2 + b^2 > 0, \tag{6}$$

то в плоскости $\{d, b\}$ полезно ввести полярные координаты (R, α):

$$d = R\cos\alpha, \quad b = R\sin\alpha, \tag{7}$$

где $R > 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Угол α понимаем как параметризацию единичной окружности S_2: $d^2 + b^2 = R^2 = 1$. Система (4), (5) в координатах φ, R, α имеет вид

$$\begin{cases} \alpha = (2\varphi + \pi k) \bmod (2\pi), & (8) \\ \gamma = e + (-1)^k R, & (9) \end{cases}$$

где $k = 1, 2$ — по-прежнему номер собственного значения γ. Рассмотрим прямое произведение $S_1 \times S_2 = \mathrm{Tor}$. Это тор, параметризованный координатами (φ, α). Пересечение $Q \cap \mathrm{Tor} = q$ представляет собой объединение $q = q_1 \cup q_2$ двух замкнутых кривых $q_k = Q_k \cap \mathrm{Tor}$. Это „винтовые линии", намотанные на Tor. Точка, обойдя q_k, совершает один оборот вокруг S_1 и два оборота вокруг S_2. Кривые q_k задаются уравнениями (8). На развертке тора q_k изображаются отрезками.

Введем отображения, действующие из S_1 в $\mathbb{R}$:

$$a_i(\varphi) = \langle A_i(u_1\cos\varphi + u_2\sin\varphi)u_1, u_1\rangle,$$

$$b_i(\varphi) = \langle A_i(u_1\cos\varphi + u_2\sin\varphi)u_1, u_2\rangle,$$

$$c_i(\varphi) = \langle A_i(u_1\cos\varphi + u_2\sin\varphi)u_2, u_2\rangle, \tag{10}$$

$$d_i(\varphi) = \frac{1}{2}(a_i(\varphi) - c_i(\varphi)),$$

$$e_i(\varphi) = \frac{1}{2}(a_i(\varphi) + c_i(\varphi)).$$

Отображения d_i и b_i порождают отображение

$$h_i\colon S_1 \to S_1 \times \mathbb{R}^2, \quad h_i(\varphi) = (\varphi, d_i(\varphi), b_i(\varphi)). \tag{11}$$

Если для каждого $\varphi \in S_1$ справедливо $d_i^2(\varphi) + b_i^2(\varphi) > 0$, то соотношения (7), где $d = d_i$, $b = b_i$, определяют отображение $\alpha = \alpha(\varphi)$, действующее из S_1 в S_2, и отображение

$$\hat{h}_i: \quad s_1 \to \mathrm{Tor}, \quad \hat{h}_i(\varphi) = (\varphi, \alpha(\varphi)). \tag{12}$$

3. Формулировки основных теорем. Сначала сформулируем вспомогательные утверждения о связях между образами $\mathrm{Im}(h_i)$ и $\mathrm{Im}(\hat{h}_i)$ и многообразиями Q_k и q_k, $k = 1, 2$, соответственно.

Лемма 1. *Пусть отображение h_i трансверсально Q и $\mathrm{Im}(h_i)\cap Q \neq \varnothing$. Тогда множество $\mathrm{Im}(h_i)\cap Q$ представляет собой объединение конечного числа пар точек вида*

$$\mathrm{Im}(h_i)\cap Q =$$

$$= \bigcup_{j=1}^{p}\left\{(\varphi_j, d_i(\varphi_j), b_i(\varphi_j)), (\varphi_j + \pi, (-1)^i d_i(\varphi_j), (-1)^i b_i(\varphi_j))\right\}. \tag{13}$$

Лемма 2. *В условиях леммы 1 возможны только следующие случаи расположения точек из одной пары в объединении (13). Если одна из точек пары принадлежит подмногообразию $S_1 \subset Q$, то и вторая точка имеет это же свойство. Если i нечетное и точки пары не принадлежат подмногообразию S_1, то они принадлежат подмногообразиям Q_k, $k = 1, 2$, с разными k. Если i четное и точки пары не принадлежат подмногообразию S_k, то они принадлежат одному и тому же подмногообразию Q_k.*

Лемма 3. *Пусть отображение $\hat{h}_i$ трансверсально q и $\mathrm{Im}(\hat{h}_i)\cap q \neq \varnothing$. Тогда множество $\mathrm{Im}(\hat{h}_i)\cap q$ представляет собой объединение конечного числа пар точек вида*

$$\mathrm{Im}(\hat{h}_i)\cap q = \bigcup_{j=1}^{p}\left\{(\varphi_j, \alpha(\varphi_j)), (\varphi_j + \pi, (\alpha(\varphi_j) + i\pi) \bmod (2\pi))\right\}. \tag{14}$$

Лемма 4. *В условиях леммы 3 возможны только следующие расположения точек из одной пары в объединении (14). Если i нечетное, то точки из одной пары принадлежат подмногообразиям q_k, $k = 1, 2$, с разными k. Если i четное, то они принадлежат одному и тому же подмногообразию q_k.*

Переходим к формулировкам основных теорем.

Теорема 1. *Пусть отображение h_i трансверсально Q и $\mathrm{Im}(h_i) \cap Q \neq \neq \varnothing$. Тогда: 1) число λ_0 является точкой бифуркации для уравнения (1); 2) из точки $(\lambda_0, 0)$ выходит конечное число пар ветвей решений $(\lambda_j^{\pm}, u_j^{\pm})$, $j = 1, \ldots, p$, уравнения (1); 3) количество ветвей $2p$ равно количеству точек пересечения $\mathrm{Im}(h_i) \cap Q$; 2) все ветви имеют асимптотику*

$$\lambda_j^{\pm} = \lambda_0(1 + \beta_j(\pm r)^i) + o(r^i),$$
$$u_j^{\pm} = \pm r(u_1 \cos\varphi_j + u_2 \sin\varphi_j) + o(r^i), \quad j = 1, \ldots, p, \quad 0 < r < r_0, \tag{15}$$

где φ_j, β_i — некоторые постоянные; 5) постоянные φ_j из (15) — первые координаты первых точек в парах из объединения (13); они определяются из уравнения

$$b_i(\varphi)\cos 2\varphi - d_i(\varphi)\sin 2\varphi = 0;$$

соответствующие постоянные β_j определяются по формуле

$$\beta_j = -(e_i(\varphi_j) + d_i(\varphi_j)\cos 2\varphi_j + b_i(\varphi_j)\sin 2\varphi_j).$$

Теорема 2. *Пусть отображение $\hat{h}_i$ трансверсально q и $\mathrm{Im}(\hat{h}_i) \cap q \neq \neq \varnothing$. Тогда: 1) число λ_0 является точкой бифуркации для уравнения (1); 2) из точки $(\lambda_0, 0)$ выходит конечное число пар ветвей решений $(\lambda_j^{\pm}, u_j^{\pm})$, $j = 1, \ldots, p$, уравнения (1); 3) количество ветвей $2p$ равно количеству точек пересечения $\mathrm{Im}(h_i) \cap q$; 4) все ветви имеют асимптотику (15); 5) постоянные φ_j из асимптотики (15) — первые координаты первых точек в парах из объединения (14); они определяются из уравнений $\alpha(\varphi) = 2\varphi + + \pi k$, $k = 0, 1$; соответствующие постоянные β определяются по формуле*

$$\beta_j = -\left(e_i(\varphi_j) + (-1)^k \sqrt{d_i^2(\varphi_j) + b_i^2(\varphi_j)}\right).$$

В следующей теореме сформулированы достаточные условия отсутствия бифуркации в исследуемой точке.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие $\mathrm{Im}(\hat{h}_i) \cap q = \varnothing$. Тогда число λ_0 не является точкой бифуркации для уравнения (1).*

4. Разрешимость нелинейной двумерной задачи. Рассмотрим нелинейную задачу

$$\begin{pmatrix} e(\varphi) + d(\varphi) & b(\varphi) \\ b(\varphi) & e(\varphi) - d(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{16}$$

о собственном значении $\gamma \in \mathbb{R}$ и единичном собственном векторе $z = = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\varphi \in S_1$. Пару (γ, φ), удовлетворяющую (16), назовем решением этого уравнения. Предположим, что функции $d(\varphi)$, $e(\varphi)$, $b(\varphi)$ гладкие. Нас интересует разрешимость уравнения (16). Необходимые и достаточные условия разрешимости сформулируем с помощью многообразия Q и отображения

$$h\colon S_1 \to S_1 \times \mathbb{R}^2, \quad h(\varphi) = (\varphi, d(\varphi), b(\varphi)). \tag{17}$$

Теорема 4. *Пара* (γ_0, φ_0) *является решением задачи* (16) *тогда и только тогда, когда* $M = h(\varphi_0) \in Q$ *и*

$$\gamma_0 = e(\varphi_0) + d(\varphi_0)\cos 2\varphi_0 + b(\varphi_0)\sin 2\varphi_0. \tag{18}$$

Доказательство. Пара (γ_0, φ_0) является решением (16) в том и только том случае, когда она является решением задачи

$$\begin{pmatrix} e(\varphi_0) + d(\varphi_0) & b(\varphi_0) \\ b(\varphi_0) & e(\varphi_0) - d(\varphi_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \tag{19}$$

линейной относительно вектора z. Последняя равносильна системе (4), (5), где $b = b(\varphi_0)$, $d = d(\varphi_0)$, что и доказывает теорему.

Теореме 4 можно дать следующую геометрическую трактовку.

Следствие 1. *Значения неизвестного* φ *из задачи* (16) — *проекции на* S_1 *точек пересечения многообразий* $\mathrm{Im}(h)$ *и* Q. *Неизвестное* φ *определяется из уравнения* (4) *при* $b = b(\varphi)$, $d = d(\varphi)$, *т. е. из уравнения* $b(\varphi)\cos 2\varphi - d(\varphi)\sin 2\varphi = 0$. *Соответствующее собственное значение определяется затем по формуле* (5) *при найденном значении* $\varphi = \varphi_0$.

Предположим, что отображения $d(\varphi)$ и $b(\varphi)$ удовлетворяют условию (6) при всех $\varphi \in S_1$. В этом случае соотношения (7) определяют отображение $\alpha = \alpha(\varphi)$, действующее из S_1 в S_2, и отображение

$$\hat{h}\colon \; S_1 \to \mathrm{Tor}, \quad \hat{h}(\varphi) = (\varphi, \alpha(\varphi)). \tag{20}$$

Теорема 5. *Пусть при всех* $\varphi \in S_1$ *значения отображений* $d(\varphi)$ *и* $b(\varphi)$ *удовлетворяют условию* (6). *В этом случае пара* (γ_0, φ_0) *является решением уравнения* (16) *тогда и только тогда, когда* $P = h(\varphi_0) \in q_k$, $k = 1, 2$, *и*

$$\gamma_0 = e(\varphi_0) + (-1)^k \sqrt{d^2(\varphi_0) + b^2(\varphi_0)}. \tag{21}$$

Доказательство. Задача (16) равносильна задаче (19), которая, в свою очередь, равносильна системе (8), (9).

Следствие 2. *Пусть при всех* $\varphi \in S_1$ *отображения* $d(\varphi)$ *и* $b(\varphi)$ *удовлетворяют условию* (6). *В этом случае значения неизвестного* φ *задачи* (16) — *проекции на* S_1 *точек пересечения многообразий* $\mathrm{Im}\,\hat{h}$ *и* q. *Неизвестное* φ *определяется из уравнений* (8), *где* $\alpha = \alpha(\varphi)$, *т. е. из уравнений* $\alpha(\varphi) = (2\varphi + \pi k) \bmod 2\pi$, $k = 1, 2$. *Соответствующее значение* γ *определяется по формуле* (21).

В заключение пункта сформулируем очевидные достаточные условия конечной разрешимости задачи (16).

Теорема 6. *Пусть отображение* h *трансверсально* Q *и* $\mathrm{Im}(h) \cap Q \neq \varnothing$. *Тогда задача* (16) *имеет конечное число решений.*

Теорема 7. *Пусть при всех* $\varphi \in S_1$ *значения отображений* $d(\varphi)$ *и* $b(\varphi)$ *удовлетворяют условию* (6); $\hat{h}$ *трансверсально* q *и* $\mathrm{Im}(\hat{h}) \cap q \neq \varnothing$. *Тогда задача* (16) *имеет конечное число решений.*

5. Ветви решений нелинейной двумерной задачи. Рассмотрим более общую, чем (16), задачу

$$\begin{pmatrix} e(\varphi)+d(\varphi) & b(\varphi) \\ b(\varphi) & e(\varphi)-d(\varphi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(\gamma,r,\varphi) \\ f_2(\gamma,r,\varphi) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

о собственном значении $\gamma\in\mathbb{R}$ и единичном собственном векторе $z = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\varphi\in S_1$. Здесь r — малый вещественный параметр. Потребуем, чтобы функции $e(\varphi)$, $d(\varphi)$, $b(\varphi)$ были гладкими, функции $f_j(\gamma,r,\varphi)$ были гладкими по паре (γ,φ) и непрерывными по совокупности переменных и удовлетворяли условию

$$f_j(\gamma,0,\varphi) = 0 \quad \text{при всех} \quad (\gamma,\varphi)\in\mathbb{R}\times S_1. \tag{23}$$

Отметим, что в силу (23) задача (22) при $r=0$ совпадает с задачей (16). Исследуем разрешимость задачи (22) относительно пары (γ,φ) при малых r.

Теорема 8. *Пусть отображение h трансверсально многообразию Q и $\mathrm{Im}(h)\cap Q\neq\varnothing$. Тогда из каждого решения (γ_j,φ_j), $j=1,\ldots,m$, задачи* (16) *выходит изолированная непрерывная ветвь решений $(\gamma_j(r),\varphi_j(r))$, $|r|<r_0$, задачи* (22).

Доказательство основано на применении теоремы о существовании неявной функции $(\gamma,\varphi) = (\gamma(r),\varphi(r))$, определяемой уравнением $F(\gamma,\varphi,r)=0$ в окрестности точки $(\gamma_j,\varphi_j,0)$, где

$$F(\gamma,\varphi,r) = \begin{pmatrix} e(\varphi)+d(\varphi) & b(\varphi) \\ b(\varphi) & e(\varphi)-d(\varphi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} - \\ -\gamma\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(\gamma,r,\varphi) \\ f_2(\gamma,r,\varphi) \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда функции $d(\varphi)$ и $b(\varphi)$ удовлетворяют условию (6) при всех $\varphi\in S_1$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть отображение $\hat{h}$ трансверсально многообразию q и $\mathrm{Im}(\hat{h})\cap q\neq\varnothing$. Тогда из каждого решения (γ_j,φ_j), $j=1,\ldots,m$, задачи* (16) *выходит изолированная непрерывная ветвь решений $(\gamma_j(r),\varphi_j(r))$, $|r|<r_0$, задачи* (22).

В условиях теорем 8 и 9 не исключено, что задача (22) имеет другие решения при малых r помимо описанных. Чтобы исключить их из рассмотрения, обозначим

$$\Gamma = 2\max_{j=1,\ldots,m}|\gamma_j|.$$

Теорема 10. *Пусть выполнены условия* (23). *Тогда существует такое $r_0>0$, что для всех $-r_0<r<r_0$ задача* (22) *не имеет других решений $(\gamma(r),\varphi(r))$, удовлетворяющих условию $|\gamma(r)|\le\Gamma$, за исключением указанных в теоремах* 9 *и* 10.

Доказательство немедленно следует из компактности многообразия $\{\gamma,\varphi\} = [-\Gamma,\Gamma]\times S_1$ и изолированности ветвей $(\gamma_j(r),\varphi_j(r))$.

В заключение пункта сформулируем следующую теорему, дающую достаточные условия отсутствия ветвей решений исследуемой задачи.

Теорема 11. *Пусть выполнено условие* $\operatorname{Im}(\hat{h}) \cap q = \varnothing$. *Тогда существует такое* $r_0 > 0$, *что задача* (22) *при* $-r_0 < r < r_0$ *не имеет решений, удовлетворяющих условию* $|\gamma(r)| \le \Gamma$.

6. Доказательство основных теорем. В окрестности точки $(\lambda_0, 0)$ операторное уравнение (1) с помощью известной схемы [8, с. 380] сведем к конечномерной системе — уравнению разветвления. Любой вектор $u \in H_0$ единственным образом представляется в виде $u = r(u_1 \cos\varphi + u_2 \sin\varphi) + v$, где $r > 0$, $\varphi \in s_1$, $v \perp u_1, u_2$.

Лемма 5. *В окрестности точки* $(\lambda_0, 0)$ *уравнение* (1) *имеет уравнение разветвления вида*

$$\begin{pmatrix} e_i(\varphi) + d_i(\varphi) & b_i(\varphi) \\ b_i(\varphi) & e_i(\varphi) - d_i(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \gamma \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(\gamma, r, \varphi) \\ f_2(\gamma, r, \varphi) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где функции f_i, *удовлетворяют всем требованиям, сформулированным в начале п.* 5, *а* $\gamma = -(\lambda - \lambda_0)/(\lambda_0 r^i)$.

Лемма 6. *Пусть* $(\gamma(r), \varphi(r))$, $0 < r < r_0$, — *ветвь решений уравнения* (24). *Тогда в окрестности точки* $(\lambda_0, 0)$ *уравнение* (1) *имеет ветвь решений* $(\lambda, u) = (\lambda_0 - \lambda_0 r^i \gamma(r), r(u_1 \cos\varphi(r) + u_2 \sin\varphi(r)) + v(r))$, *где* $v(r) = o(r^i)$.

Доказательство лемм 5, 6 осуществляется стандартно [8] с учетом разложения (2) и введенных отображений (10).

Доказательство лемм 1–4. Конечность множества $\operatorname{Im}(h_i) \cap Q$ следует из условия трансверсальности h_i к Q и компактности S_1. Отображения h_i имеют свойство: $h_i(\varphi + \pi) = (\varphi + \pi, (-1)^i (d_i(\varphi), b_i(\varphi)))$. Многообразие Q инвариантно относительно действия преобразований $T: (\varphi, d, b) \to (\varphi + \pi, d, b)$ и $Z: (\varphi, d, b) \to (\varphi, -d, -b)$. Из указанного свойства h_i и инвариантности Q следуют утверждения лемм 1, 2. Доказательство лемм 3, 4 аналогично.

Доказательства теорем 1–3 следуют теперь из лемм 5, 6, 1–4, введенных отображений (11), (12), (17), (20) и теорем 8–11.

7. Приложения. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u + \lambda A(u, \operatorname{grad}(u), x, y) u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{25}$$

где Δ — оператор Лапласа, Ω — квадрат со стороной π, функция $A(u, s, t, x, y)$ принадлежит классу C^1 на $\mathbb{R}^3 \times \Omega$ и удовлетворяет условию $A(0, 0, 0, x, y) = 1$, $(x, y) \in \Omega$. Если положить, что $D = \Delta$, $A(u)u = A(u, \operatorname{grad}(u), x, y)u$, $H = L_2(\Omega)$, $H_0 = \mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ ($\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ — пространство С. Л. Соболева функций, удовлетворяющих данному краевому условию), то задача (25) принимает вид уравнения (1). Линеаризованная по u при $u = 0$ задача имеет вид $\Delta u + \lambda u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$. Ее собственные значения — это числа

$$\lambda_{m,n} = m^2 + n^2, \quad m, n = 1, 2, \ldots . \tag{26}$$

Им соответствуют ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции

$$u_{m,n} = \frac{2}{\pi}\sin(mx)\sin(ny).$$

Двукратными среди чисел $\lambda_{m,n}$ являются те, у которых $m \neq n$ и которые допускают единственное (с точностью до перестановки) представление (26).

Теорема 12. *Пусть собственное значение* $\lambda_{m,n}$ *двукратно, причем числа* m *и* n *нечетные; разложение* A *по степеням* u, s *и* t *имеет вид* $A(u,s,t,x,y) = 1 + u + \ldots$. *Тогда* $\lambda_{m,n}$ *является точкой бифуркации задачи* (25). *Из точки* $(\lambda_{m,n}, 0)$ *выходят три пары ветвей решений* $(\lambda_j^{\pm}, u_j^{\pm})$ *вида*

$$\lambda_j^{\pm} = \lambda_{m,n}(1 \pm r\beta_j) + o(r),$$

$$u_j^{\pm} = \pm r(u_{m,n}\cos\varphi_j + u_{n,m}\sin\varphi_j) + o(r),$$

$j = 1, 2, 3$, $0 < r < r_0$, φ_j, β_j — *некоторые постоянные.*

Теорема 13. *Пусть собственное значение* $\lambda_{m,n}$ *двукратн; разложение* A *по степеням* u, s, t *имеет вид* $A(u,s,t,x,y) = 1 + u^2 + \ldots$. *Тогда* $\lambda_{m,n}$ *является точкой бифуркации задачи* (25). *Из точки* $(\lambda_{m,n}, 0)$ *выходят четыре пары ветвей решений* $(\lambda_j^{\pm}, u_j^{\pm})$ *вида*

$$\lambda_j^{\pm} = \lambda_{m,n}(1 - r^2\beta_j) + o(r^2),$$
$$u_j^{\pm} = \pm r(u_{m,n}\cos\varphi_j + u_{n,m}\sin\varphi_j) + o(r), \tag{27}$$

$$j = 1, 2, 3, 4, \quad 0 < r < r_0, \qquad \varphi_j = \frac{\pi}{4}(j-1),$$

$$\beta_1 = \beta_3 = \frac{9\pi^2}{64}, \qquad \beta_2 = \beta_4 = \frac{21\pi^2}{128}.$$

Теорема 14. *Пусть собственное значение* $\lambda_{m,n}$ *двукратно; разложение* A *по степеням* u, s, t *имеет вид* $A(u,s,t,x,y) = 1 + s^2 + t^2 + \ldots$. *Тогда* $\lambda_{m,n}$ *является точкой бифуркации задачи* (25). *Из точки* $(\lambda_{m,n}, 0)$ *выходят четыре пары ветвей решений* $(\lambda_j^{\pm}, u_j^{\pm})$ *вида* (27), *где* $j = \overline{1,4}$, $0 < r < r_0$, $\varphi_j = \pi(j-1)/4$, $\beta_1 = \beta_3 = 15\pi^2/32$, $\beta_2 = \beta_4 = 35\pi^2/64$.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение с периодическими краевыми условиями

$$u'' + \lambda A(u, u', x)u = 0, \quad u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi). \tag{28}$$

Пусть гладкая функция A удовлетворяет условию: $A(0,0,x) = 1$ на $[0,\pi]$. В данном случае $Du = u''$, $H = L_2(0,\pi)$, $H_0 = \dot{W}_{2,2}(0,\pi)$. Линеаризованная по u при $u = 0$ задача имеет вид $u'' + \lambda u = 0$, $u(0) = u(\pi)$, $u'(0) = u'(\pi)$. Ее собственные значения $\lambda_n = (2n)^2$, $n = 0, 1, \ldots$, двукратные при всех $n > 0$. Каждому λ_n, $n > 0$, соответствует пара ортонормированных собственных функций $u_{n,1} = \sqrt{2/\pi}\sin 2nx$, $u_{n,2} = \sqrt{2/\pi}\cos 2nx$.

Теорема 15. *Пусть разложение функции* A *по степеням* u, u' *имеет вид* $A(u,u',x) = 1 + uu' + \ldots$. *Тогда числа* λ_n *при* $n > 0$ *не являются точками бифуркации задачи* (28).

Теорема 16. *Пусть разложение функции A по степеням u, u' имеет вид $A(u, u', x) = 1 + u\sin 2x + \ldots$. Тогда число $\lambda_1 = 4$ является точкой бифуркации задачи* (28). *Из точки $(4, 0)$ выходит одна пара ветвей решений вида*

$$\lambda_1^{\pm} = 4(1 \pm 3(8\pi)^{-1/2}r) + o(r), \qquad u_1^{\pm} = \pm r u_{1,1} + o(r).$$

Доказательства теорем 12–16 осуществляются единообразно с помощью основных теорем из п. 3.

Доказательство теоремы 12. В условиях теоремы порядок однородности $i = 1$. Отображения (10) имеют вид

$$a_1(\varphi) = \xi\cos\varphi + \zeta\sin\varphi, \quad b_1(\varphi) = \sqrt{2}\,\zeta\sin(\varphi + \pi/4),$$

$$c_1(\varphi) = \zeta\cos\varphi + \xi\sin\varphi, \quad d_1^*(\varphi) = \frac{\xi - \zeta}{\sqrt{2}}\cos(\varphi + \pi/4),$$

где

$$\xi = \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{16}{9mn}, \qquad \zeta = \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \frac{16mn}{(m^2 - 4n^2)(n^2 - 4m^2)}.$$

Так как $d_1^2(\varphi) + b_1^2(\varphi) > 0$, определено отображение $\hat{h}_1$ (см. (12)). Из полученных выше соотношений следует

$$\operatorname{tg}(\alpha(\varphi)) = \frac{b_1}{d_1} = -\frac{9}{2}\left(\frac{mn}{m^2 - n^2}\right)^2 \operatorname{tg}(\varphi + \pi/4).$$

Условия трансверсальности $\hat{h}_1$ к q выполнены, поскольку $\alpha'(\varphi) < 0$. Из теоремы 2 следует утверждение теоремы 12.

Автор признателен А. М. Красносельскому и Ю. И. Сапронову за полезные обсуждения.

1. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1956. – 390 с.
2. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 256 с.
3. *Келлер Дж. Б., Антман С.* Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. – М.: Мир, 1979. – 254 с.
4. *Ize J.* Bifurcation theory for Fredholm operators // Memory of AMS. – 1976. – 7. – P. 174.
5. *Красносельский В. М.* Исследование малых решений одного класса нелинейных операторных уравнений // Докл. АН СССР. – 1966. – **180**, № 1. – С. 22–24.
6. *Красносельский В. М.* Исследование бифуркаций малых собственных функций в случае многомерного вырождения // Там же. – 1970. – **195**, № 5. – С. 1025–1028.
7. *Dancer E. N.* Bifurcation theory in real Banach space // Proc. London Math. Soc. – 1971. – **23**, № 4. – P. 699–734.
8. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенные методы решения операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 454 с.
9. *Выгодский М. Я.* Дифференциальная геометрия. – М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 510 с.

Получено 27.05.94