УДК 517.9:519.3

П. І. Когут (Дніпропетр. техн. ун-т транспорту)

АСИМПТОТИКИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РОЗПОДІЛЕНОЮ СИСТЕМОЮ З ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Higher-order asymptotics is constructed and justified for optimal control over parabolic systems with rapidly oscillating coefficients in the principal part that describe processes in inhomogeneous and periodic media. The investigation is based on the use of methods of multiscale asymptotic decomposition and some results of the theory of averaging.

Будується та обгрунтовується асимптотика вищих порядків для оптимального керування параболічною системою з швидкоосцилюючими коефіцієнтами в головній частині, що описує процес високоінтенсивного теплопереносу в неоднорідному періодичному середовищі. Аналіз грунтується на використанні методів багатомасштабних розкладань та результатів теорії усереднення.

Основи асимптотичного аналізу і його застосування для якісного дослідження великого класу задач, пов'язаних з вивченням властивостей неоднорідних дрібнозернистих середовищ та процесів, які в них проходять, досить детально викладені в [1, 2]. Такі процеси, як правило, описуються диференціальними рівняннями зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами в головній частині оператора. Чисельні методи для їх аналізу непридатні в зв'язку з неоднорідністю мікроскопічної структури матеріалу (коефіцієнти рівнянь сильно змінюються при переході від однієї складової до іншої). Ця ж обставина робить практично неможливим „доведення до числа" задач оптимального керування такими системами. В зв'язку з цим, у даній роботі будується та обгрунтовується повний асимптотичний розв'язок однієї задачі оптимального керування параболічною системою, яка описує процеси високоінтенсивного теплопереносу в неодорідних середовищах з ε-періодичною структурою. Встановлена структура асимптотичного розв'язку, вивчені його диференціальні властивості та доведена його збіжність при $\varepsilon \to 0$ до розв'язку так званої осередненої задачі.

1. Постановка задачі. Розглянемо в одномірному ε-періодичному середовищі керований процес, який описується початково-крайовою задачею

$$R\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(t,x) + p(t,x), \tag{1}$$

$$(t,x)\in Q; \quad Q = (0,T)\times(0,l);$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x\in(0,l); \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(t,l)}{\partial t} + K\left(\frac{l}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u(t,l)}{\partial x} = g(t), \quad t\in(0,T), \tag{3}$$

де $0<\varepsilon<<1$ — параметр, що характеризує „періодичність" мікроскопічної структури середовища; $R(\xi)$ — теплоємність одиниці об'єму; $K(\xi)$ — коефіцієнт теплопередачі; $R(\xi)$, $K(\xi)$ — 1-періодичні функції; $f(t,x)$, $g(t)$ — задані функції; $p(t)$ — функція керування; $l/\varepsilon = m$.

На множині допустимих керувань $P = \left\{ p\in L^2\left(0,T;H^1(0,l)\right)\right\}$ потрібно знайти

$$\inf_{p\in P} I[p] = \inf_{p\in P}\left\{\int_0^T\int_0^l \left[\left(u(t,x)-z_d(t,x)\right)^2 + d\cdot p^2(t,x)\right]dx\,dt\right\}, \tag{4}$$

$$d = \text{const} > 0,$$

де $z_d\in L^2(Q)$ — задана функція.

Відомо [3, с. 122; 4, с. 4], що при кожному $\varepsilon > 0$ існує єдиний розв'язок задачі оптимального керування (1)–(4), який визначається із співвідношень

$$R_\varepsilon \frac{d\overline{u}_\varepsilon}{dt} = A_\varepsilon \overline{u}_\varepsilon + \bar{f}(t) + (p(t), 0), \quad \overline{u}_\varepsilon(0) = (u_0, u_0(l)), \tag{5}$$

$$-R_\varepsilon \frac{d\overline{z}_\varepsilon}{dt} = A_\varepsilon \overline{u}_\varepsilon + (u_\varepsilon - z_d, 0), \quad \overline{z}_\varepsilon(T) = (0, 0), \tag{6}$$

де $p = -d^{-1} z_\varepsilon$ (м. в.), а оператори A_ε та R_ε діють за правилами:

$$\bar{f}(t) = (f(t, x), g(t)),$$

$$\mathbf{L}^2 \supset D(A_\varepsilon) \ni (u, u(l)) \xrightarrow{A_\varepsilon} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \right), K\left(\frac{l}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u(l)}{\partial x} \right),$$

$$\mathbf{L}^2 \ni (u, u(l)) \xrightarrow{R_\varepsilon} \left(R\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(u, u(l)) \right),$$

$$D(A_\varepsilon) = \{ (u, u(l)) \in \mathbf{L}^2 \mid u \in H^1(0, l),\ \partial u(0)/\partial x = 0 \},$$

$\mathbf{L}^2 = \{ \overline{u} = (u, u(l)) \}$ — гільбертів простір, у якому скалярний добуток визначається за правилом $\langle \overline{u}_1, \overline{u}_2 \rangle_{\mathbf{L}^2} = (u_1, u_2)_{L^2(0,l)} + u_1(l) u_2(l)$.

Зауваження 1. При виконанні умов

$$\begin{gathered} R, K \in L^\infty(0,1); \quad R(\xi) > 0, \quad K(\xi) \ge \nu > 0 \ \text{(м. в.)}, \\ f \in L^2\big(0, T; H^1(0, l)\big); \quad g \in L^2(0, T); \quad u_0 \in H^1(0, l) \subset C(0, l) \end{gathered} \tag{7}$$

задача (1) – (3) для довільних $p \in P$ та $\varepsilon > 0$ допускає єдиний розв'язок $u_\varepsilon(p)$ такий, що [5, с. 109] $u_\varepsilon(p) \in C\big(0, T; H^1(0, l)\big)$; $\overline{u}_\varepsilon(p) \in W_2^1\big(0, T; \mathbf{L}^2\big)$.

Отже, для системи (5), (6) також буде існувати єдиний розв'язок, для якого, зокрема, справедливі включення $z_\varepsilon(p) \in C\big(0, T; H^1(0, l)\big)$; $\overline{z}_\varepsilon(p) \in W_2^1(0, T; \mathbf{L}^2)$.

2. Формалізм асимптотичного методу. Наслідуючи традиційний евристичний підхід, будемо шукати розв'язок задачі (5), (6) у вигляді асимптотичного двомасштабного ряду

$$\begin{bmatrix} u_\varepsilon^{(\infty)} \\ z_\varepsilon^{(\infty)} \end{bmatrix} \approx \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{q=0}^{r} \sum_{p=0}^{r-q} \mathbf{N}_{q, r-q-p}^{p}(\xi) \frac{\partial^{r-p}}{\partial t^q \partial x^{r-q-p}} \begin{bmatrix} v(t, x) \\ w(t, x) \end{bmatrix}, \tag{8}$$

де

$$v(t, x) \approx \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j(t, x), \quad w(t, x) \approx \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j(t, x);$$

$\xi = x/\varepsilon$ — „швидка" змінна, яка характеризує локальні властивості середовища; $\mathbf{N}_{0,0}^0(\xi) = \operatorname{diag}(1, 1)$; $\mathbf{N}_{i,j}^k(\xi) \in \mathcal{L}(R^2)$ — квадратні матриці з 1-періодичними відносно ξ елементами.

У відповідності до відомої схеми побудови асимптотичних розв'язків [1, с. 121], перепишемо систему (6), (7) в операторній формі

$$\begin{gathered} P_1 v = \begin{bmatrix} f(t, x) \\ -z_d(t, x) \end{bmatrix}; \quad P_2 v = \begin{bmatrix} g(t) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_3 v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ u(0, x) = u_0(x); \quad z(T, x) = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Будемо визначати невідомі 1-періодичні матриці $\mathbf{N}_{i,j}^k(\xi)$ як розв'язки в класі $(\Xi(T_0))^4$ матричного рівняння

$$L_{\xi\xi}\mathbf{N}^{p}_{q,\,r-q-p}(\xi) \;=\; \int\limits_0^1 \mathbf{T}^{p}_{q,\,r-q-p}(\xi)\,d\xi \;-\; \mathbf{T}^{p}_{q,\,r-q-p}(\xi), \tag{10}$$

де

$$\Xi(T_0) \;=\; W_2^1(T_0) \cap \left\{ u \in L^2(T_0) \,\middle|\, \int\limits_{T_0} u(\xi)\,d\xi \;=\; 0 \right\};$$

T_0 — коло, ізоморфне відрізку $\{\xi \mid \xi \in [0,\,1]\}$ після ототожнювання точок $\xi = 0$ та $\xi = 1$;

$$L_{\alpha\alpha} \;=\; \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(K(\xi)\frac{\partial}{\partial\alpha} \right);$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{ij,\,p}_{q,\,r-q-p}(\xi) \;=\; & -\frac{d}{d\xi}\Big[K(\xi)\mathbf{N}^{ij,\,p}_{q,\,r-q-p-1}(\xi) \Big] - K(\xi)\frac{d}{d\xi}\mathbf{N}^{ij,\,p}_{q,\,r-q-p-1}(\xi) \;- \\ & - K(\xi)\mathbf{N}^{ij,\,p}_{q,\,r-q-p-2}(\xi) \;+\; (-1)^{i+1}R(\xi)\mathbf{N}^{ij,\,p-1}_{q-1,\,r-q-p}(\xi) \;+ \\ & + \begin{cases} d^{-1}\mathbf{N}^{i+1,\,j,\,p}_{q,\,r-q-p-2}(\xi), & i = 1, \\ -\mathbf{N}^{i-1,\,j,\,p}_{q,\,r-q-p-2}(\xi), & i = 2, \end{cases} \qquad \forall\; i, j \;=\; 1, 2. \end{aligned} \tag{11}$$

Зауваження 2. Оскільки згідно з (7) для довільних $r = \overline{0,\infty}$; $q = \overline{0,r}$, $p = \overline{0,r-q}$ справедливі включення $\mathbf{T}^{ij,\,p}_{q,\,r-q-p} \in L^2(T_0)$, $i, j = 1, 2$, послідовність рекурентних задач (10) допускає єдиний розв'язок у класі $(\Xi(T_0))^4$ [1, с. 339].

Надалі будемо вважати: а) $\mathbf{N}^{p}_{q,\,k}(\xi) = 0$, якщо хоча б один з індексів буде від'ємним; б) якщо в (10) $\mathbf{T}^{ij,\,p}_{q,\,r-q-p}(\xi) = \mathrm{const}$ для всіх $i, j = 1, 2$, то $\mathbf{N}^{p}_{q,\,k}(\xi) = 0$. Тоді справедливий такий результат.

Лема 1. *Нехай* $R \in L^\infty(T_0)$, $K \in W_2^1(T_0)$, $K(\xi) \ge \nu > 0$ *для довільних* $\xi \in [0,\,1]$ *і базисом індукції в* (10) *є* $\mathbf{N}^{0}_{0,\,0}(\xi) = \mathrm{diag}\,(1,\,1)$. *Тоді:* 1) *для довільних* $r = \overline{0,2}$ *та* $p = \overline{0,r}$ *матриці* $\mathbf{N}^{p}_{p,\,r-2p}(\xi)$ *діагональні;* 2) *для довільних* $r = \overline{0,\infty}$, $q = \overline{0,r}$ *та* $p = \overline{0,r-q}$ *таких, що* $p \ne q$, $\mathbf{N}^{p}_{q,\,r-q-p}(\xi) = 0$.

Таким чином, кількість членів в емпіричному розкладенні (8) можна суттєво зменшити, а отже, формулу (8) можна подати у вигляді

$$\begin{bmatrix} u_\varepsilon^{(\infty)} \\ z_\varepsilon^{(\infty)} \end{bmatrix} \;\approx\; \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{p=1}^{s+1} \mathbf{N}^{s-p+1}_{s-p+1,\,2p-1+\alpha}(\xi)\,\frac{\partial^{s+p-\alpha}}{\partial t^{s+1-p}\partial x^{2p-1-\alpha}} \begin{bmatrix} \nu(t,\,x) \\ w(t,\,x) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

де $s = |[\,r/2\,]|$ — ціла частина від числа $r/2$, $\alpha = 1 - r + 2s$.

Враховуючи лему 1, підставимо асимптотичний ряд (8) в (9). Одержимо

$$\begin{aligned} P_1 \begin{bmatrix} u_\varepsilon^{(\infty)} \\ z_\varepsilon^{(\infty)} \end{bmatrix} \;\approx& \\ \approx\; \sum_{r=2}^{\infty} \varepsilon^{r-2} \sum_{p=1}^{s+1} & \mathbf{h}^{s-p+1}_{s-p+1,\,2p-1-\alpha}(\xi)\,\frac{\partial^{s+p-\alpha}}{\partial t^{s+1-p}\partial x^{2p-1-\alpha}} \begin{bmatrix} \nu(t,\,x) \\ w(t,\,x) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} P_2 \begin{bmatrix} u_\varepsilon^{(\infty)} \\ z_\varepsilon^{(\infty)} \end{bmatrix} \;\approx\; & \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^{r-1} \sum_{p=1}^{s+1} \left\{ \mathbf{L}^{s+p-\alpha}_{s+p-\alpha,\,2p-1-\alpha}\,\frac{\partial^{s+p-\alpha}}{\partial t^{s+1-p}\partial x^{2p-1-\alpha}} \begin{bmatrix} \nu(t,\,l) \\ w(t,\,l) \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{N}^{s+p-\alpha}_{s+p-\alpha,\,2p-2-\alpha}(0)\,\frac{\partial^{s+p-\alpha}}{\partial t^{s+2-p}\partial x^{2p-2-\alpha}} \begin{bmatrix} \nu(t,\,l) \\ w(t,\,l) \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$P_3\begin{bmatrix} u_\varepsilon^{(\infty)} \\ z_\varepsilon^{(\infty)} \end{bmatrix} \approx \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^{r-1} \sum_{p=1}^{s+1} \mathbf{L}_{s-p+1,\,2p-1-\alpha}^{s-p+1} \frac{\partial^{s+p-\alpha}}{\partial t^{s+1-p} \partial x^{2p-1-\alpha}} \begin{bmatrix} \nu(t,0) \\ w(t,0) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

де

$$\mathbf{h}_{q,p}^k = \left\langle \mathbf{T}_{q,p}^k(\xi) \right\rangle = \int_0^1 \mathbf{T}_{q,p}^k(\xi)\, d\xi.$$

Зокрема, по аналогії з [1, с. 45] одержимо

$$\mathbf{L}_{01}^0 = K(0)\left[\frac{d}{d\xi}\mathbf{N}_{01}^0(0) + \mathbf{N}_{00}^0(0) \right] = \operatorname{diag}\left(\left\langle K^{-1}(\xi) \right\rangle^{-1}, -\left\langle K^{-1}(\xi) \right\rangle^{-1} \right),$$

$$\mathbf{h}_{10}^1 = \operatorname{diag}\left(\langle R(\xi)\rangle, -\langle R(\xi)\rangle \right), \qquad \mathbf{h}_{02}^0 = \begin{bmatrix} -\left\langle K^{-1}(\xi)\right\rangle^{-1} & d^{-1} \\ -1 & -\left\langle K^{-1}(\xi)\right\rangle^{-1} \end{bmatrix}.$$

Для визначення невідомих функцій $\nu_j(t,x)$ та $w_j(t,x)$ накладемо умови

$$\nu_0(0,x) = u_0(x); \qquad w_0(T,x) = 0;$$

$$\nu_j(0,x) = 0, \qquad w_j(T,x) = 0 \quad \forall\, j = \overline{1,\infty} \quad (16)$$

та підставимо регулярні ряди для $\nu(t,x)$ і $w(t,x)$ в (13)–(15) та (9). Одержимо послідовність початково-крайових задач, яка при кожному $j = 0, 1, \ldots$ буде характеризувати так звані осереднені умови оптимальності j-го порядку. Неважко помітити, що після афінної заміни змінних в одержаних співвідношеннях $\left(\nu_j \leftrightarrow \tilde{\nu}_j, w_j \leftrightarrow \tilde{w}_j\right)$ вони будуть являти собою необхідні та достатні умови оптимальності для таких задач оптимального керування

$$\langle R(\xi)\rangle \frac{\partial \tilde{\nu}_j}{\partial t} - \left\langle K^{-1}(\xi)\right\rangle^{-1} \frac{\partial^2 \tilde{\nu}_j}{\partial x^2} = \tilde{f}_{1j}(t,x) + p_j(t,x), \quad (t,x) \in Q,$$

$$\tilde{\nu}_j(0,x) = \tilde{\nu}_j^0(x), \quad x \in (0,l),$$

$$\frac{\partial \tilde{\nu}_j(t,0)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial \tilde{\nu}_j(t,l)}{\partial t} + \left\langle K^{-1}(\xi)\right\rangle^{-1} \frac{\partial \tilde{\nu}_j(t,l)}{\partial x} = \tilde{l}_{1j}(t), \quad t \in (0,T), \quad (17)$$

$$I[p] = \left\| \tilde{u}_j - \tilde{f}_{2j} \right\|_{L^2(Q)}^2 + d\left\| p_j \right\|_{L^2(Q)}^2 + \int_0^l \left(\tilde{\nu}_j(T,x) - \langle R(\xi)\rangle \tilde{z}_j^0(x) \right)^2 dx +$$

$$+ \left(\tilde{\nu}_j(T,l) - \tilde{z}_j^0(l) \right)^2 \xrightarrow[p_j \in P]{} \inf, \quad P = \left\{ p_j \in L^2\left(0,T; H^1(0,l)\right) \right\},$$

в яких функції неоднорідностей визначаються за рекурентними правилами через вихідні дані. Таким чином, враховуючи лінійно-квадратичний характер задачі (17) та результати роботи [3, с. 122], можна, спираючись на метод математичної індукції, стверджувати справедливість такого результату.

Лема 2. *Якщо* $f \in C^\infty(Q)$, $u_0 \in C^\infty(0,l)$, $g \in C^\infty(0,T)$ *і функції* $R(\xi)$, $K(\xi)$ *достатньо регулярні, то послідовність задач оптимального керування* (17) *при кожному* $j = 0, 1, \ldots$ *має єдиний розв'язок у класі* $C\left(0,T; H^1(0,l)\right)$, *а отже, однозначно визначаються в* $C\left(0,T; H^1(0,l)\right)$ *невідомі функції* $\nu_j(t,x)$ *та* $w_j(t,x)$.

Зокрема, при $j = 0$ функції $\nu_0(t,x)$ та $w_0(t,x)$ будуть визначатися як пряма та спряжена змінні для так званої осередненої задачі оптимального керування

$$
\begin{gathered}
\langle R(\xi)\rangle \frac{\partial \mathrm{v}_0}{\partial t} - \left\langle K^{-1}(\xi)\right\rangle^{-1} \frac{\partial^2 \mathrm{v}_0}{\partial x^2} = f(t,x) + p_0(t,x), \quad (t,x)\in Q, \\
\mathrm{v}_0(0,x) = u_0(x), \quad x\in(0,l), \\
\frac{\partial \mathrm{v}_0(t,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{v}_0(t,l)}{\partial t} + \left\langle K^{-1}(\xi)\right\rangle^{-1} \frac{\partial \mathrm{v}_0(t,l)}{\partial x} = g(t), \quad t\in(0,T), \\
I[p] = \|\mathrm{v}_0 - z_d\|^2_{L^2(Q)} + d\|p_0\|^2_{L^2(Q)} \xrightarrow[p_*\in P]{} \inf, \\
P = \left\{p_0 \in L^2\big(0,T; H^1(0,l)\big)\right\}.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

3. Доведення збіжності. Наведемо один результат, який стосується збіжності задачі оптимального керування (1)–(4) при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються вихідні умови* (7). *Якщо* $p^0_\varepsilon(t,x)$ — *оптимальне керування в задачі* (1)–(4), *а* $u^0_\varepsilon(t,x)$ — *відповідний йому розв'язок початково-крайової задачі, то* $u^0_\varepsilon(t,x) \to \mathrm{v}_0(t,x)$ *$*$-слабко в* $L^\infty\big(0,T;H^1(0,l)\big)$, $p^0_\varepsilon(t,x) \to p^0_0(t,x)$ *слабко в* $L^2\big(0,T;H^1(0,l)\big)$, *де* $\mathrm{v}_0(t,x)$, $p^0_0(t,x)$ — *розв'язок осередненої задачі оптимального керування* (18).

Доведення. Оскільки при $\varepsilon \to 0$ послідовності $\{u_\varepsilon\}$, $\{z_\varepsilon\}$ обмежені в $C\big(0,T;H^1(0,l)\big)$, а $\{\overline{u}_\varepsilon\}$, $\{\overline{z}_\varepsilon\}$ обмежені в $W^1_2(0,T;\mathbf{L}^2)$, то майже при всіх t вони відносно компактні в $L^2(0,l)$. Перш ніж перейти до границі в співвідношеннях (5), (6), перепишемо їх в інтегральній формі. Позначивши $\overline{\Psi} = (\Psi, \Psi(l)) \in \mathbf{L}^2$, $(u, u(l)) \xrightarrow{B} (-d^{-1}u, 0)$, одержимо

$$
\int_0^l K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}dx = \left\langle \overline{\Psi}, \bar{f} + B\overline{z}_\varepsilon - R_\varepsilon \frac{d\overline{u}_\varepsilon}{dt}\right\rangle_{\mathbf{L}^2} \quad \forall\, \Psi \in H^1(0,l). \tag{19}
$$

Оскільки $z_\varepsilon \to w_0$, $u_\varepsilon \to \mathrm{v}_0$ сильно в $L^2(0,l)$,

$$
R(\cdot/\varepsilon) \to \int_0^1 R(\varepsilon)d\xi
$$

$*$-слабко в $L^\infty(0,1)$ [2, с. 78], $\xi_\varepsilon \to \xi$ слабко в $L^2(0,l)$, де $\xi_\varepsilon = K(\cdot/\varepsilon)\partial u_\varepsilon/\partial x$, то, переходячи до границі в (19) в термінах розподілень і позначаючи $(u, u(l)) \xrightarrow{R_*} (\langle R(\xi)\rangle u, u(l))$, одержуємо

$$
\int_0^l \frac{\partial \Psi}{\partial x}\xi dx = \left\langle \overline{\Psi}, \bar{f} + B\overline{w}_0 - R_* \frac{d\overline{\mathrm{v}}_0}{dt}\right\rangle_{\mathbf{L}^2}.
$$

Для того щоб встановити зв'язок між величинами ξ та v_0, введемо допоміжну функцію

$$
\mathrm{v}_\varepsilon(x) = xz + \varepsilon \int_0^{x/\varepsilon}\left[K^{-1}(\mathrm{v})\left\langle K^{-1}(\tau)\right\rangle^{-1} - 1\right]dy\cdot z \quad \forall\, z\in(0,l).
$$

Тоді при всіх додатних $\varphi \in \mathcal{D}(0,l)$ виконується нерівність

$$
\int_0^l \varphi(x)K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{v}_\varepsilon}{\partial x}\right]^2 dx \ge 0.
$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left\langle K^{-1}(y)\right\rangle^{-1} z\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right] = R\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + d^{-1} z_\varepsilon - f$$

— обмежена в $L^2(0, l)$, $\partial u_\varepsilon / \partial x \to \partial v_0 / \partial x$ слабко в $L^2(0, l)$,

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} = K^{-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left\langle K^{-1}(y)\right\rangle^{-1} z \to z$$

$*$-слабко в $L^2(0, 1)$ та слабко в $L^2(0, l)$, то, беручи до уваги теорему типу „ротор – дивергенція" [6, с. 15], перейдемо в останній нерівності до границі при $\varepsilon \to 0$. Одержимо

$$\int_0^l \varphi(x)\left(\xi - \left\langle K^{-1}(\xi)\right\rangle^{-1} z\right)\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - z\right) dx \geq 0 \quad \forall\, \varphi > 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(0, l),$$

а отже,

$$\left(\xi - \left\langle K^{-1}(\xi)\right\rangle^{-1} z\right)\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - z\right) \geq 0 \quad \forall\, z \in (0, l).$$

Звідси $\xi = \left\langle K^{-1}(y)\right\rangle^{-1} \partial v_0 / \partial x$. Таким чином, враховуючи співвідношення (19), можемо записати

$$\int_0^l \frac{\partial \Psi}{\partial x}\left\langle K^{-1}(\xi)\right\rangle^{-1} \frac{\partial v_0}{\partial x} dx =$$

$$= \left\langle \overline{\Psi}, \bar{f} + B\overline{w}_0 - R_* \frac{\partial \overline{v}_0}{\partial t} \right\rangle_{L^2} \quad \forall\, \Psi \in H^1(0, l). \tag{20}$$

Повторюючи для співвідношення (6) подібні міркування, записуємо його границю разом з (20) в операторній формі

$$R_* \frac{d\overline{v}_0}{dt} = A_* \overline{v}_0 + \bar{f} + B\overline{w}_0, \quad -R_* \frac{d\overline{w}_0}{dt} = A_* \overline{w}_0 + C\,\overline{v}_0 - (z_d, 0), \tag{21}$$

де

$$(u, u(l)) \xrightarrow{C} (u, 0),$$

$$(u, u(l)) \xrightarrow{A_*} \left(\left\langle K^{-1}(\xi)\right\rangle^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\left\langle K^{-1}(\xi)\right\rangle^{-1} \frac{\partial u(t, l)}{\partial x}\right).$$

Оскільки граничні співвідношення (21) являють собою не що інше, як умови оптимальності для осередненої задачі (18), і $p_0^0 = d^{-1} w_0$, теорема доведена.

4. Обгрунтування асимптотичних наближень. Як випливає з наведеного вище, асимптотичні розв'язки системи співвідношень Ейлера (5), (6) можуть бути однозначно записані у вигляді

$$\begin{bmatrix} u_\varepsilon^{(\infty)} \\ z_\varepsilon^{(\infty)} \end{bmatrix} \approx \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{r=0}^{i} \sum_{p=1}^{s+1} \mathrm{N}^{s-p+1}_{s-p+1, 2p-1+\alpha}(\xi) \frac{\partial^{s+p-\alpha}}{\partial t^{s+1-p}\, \partial x^{2p-1-\alpha}} \begin{bmatrix} v_{i-r}(t, x) \\ w_{i-r}(t, x) \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Разом з тим, за лемою 1 не всі 1-періодичні матриці $\mathrm{N}^i_{ij}(\xi)$ мають діагональну форму. Це означає, що побудований формальний розв'язок не забезпечує точного виконання початкових та кінцевих умов в (5), (6). Отже, існують функції

$\theta_1(\xi, x)$ та $\theta_2(\xi, x)$ такі, що $u_\varepsilon^\infty(0, x) \approx \varepsilon^3 \theta_1(\xi, x)$, $z_\varepsilon^\infty(T, x) \approx \varepsilon^3 \theta_2(\xi, x)$. У зв'язку з цим, для визначення оцінок апроксимації оптимальних характеристик в задачі (1)–(4) введемо функції $\tilde{u} = u_\varepsilon - u^{(k)}$, $\tilde{z} = z_\varepsilon - z^{(k)}$, де u_ε, z_ε — точний розв'язок системи (5), (6), а $u^{(k)}$, $z^{(k)}$ визначаються з (22) як відповідні кінцеві суми включно до порядку ε^{k+1}. Очевидно, що без будь-якої модифікації структури асимптотичних наближень (22) можна одержати лише такі оцінки апроксимації:

$$\left\| u_\varepsilon - u^{(k)} \right\|_{L^2(0, T, H^1(0, l))} \le c_1 \varepsilon^{\min(k, 3)},$$

$$\left\| \overline{u}_\varepsilon - \overline{u}^{(k)} \right\|_{W_2^1(0, T, \mathrm{L}_2)} \le c_2 \varepsilon^{\min(k, 3)}.$$

Таким чином, необхідно ввести поправки типу примежового шару, які б виправляли нев'язку в моменти $t = 0$ та $t = T$. Будемо шукати примежові функції в такому вигляді:

$$\begin{bmatrix} \overline{u}(\tau, \xi, x) \\ \overline{z}(\tau, \xi, x) \end{bmatrix} = \sum_{r=3}^{\infty} \varepsilon^r \begin{bmatrix} \overline{u}_r(\tau, \xi, x) \\ \overline{z}_r(\tau, \xi, x) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(\eta, \xi, x) \\ \hat{z}(\eta, \xi, x) \end{bmatrix} = \sum_{r=3}^{\infty} \varepsilon^r \begin{bmatrix} \hat{u}_r(\eta, \xi, x) \\ \hat{z}_r(\eta, \xi, x) \end{bmatrix}, \tag{23}$$

де $\eta = (t - T)/\varepsilon^2$, $\tau = t/\varepsilon^2$. Підставимо (23) в (5), (6) і виконаємо відповідні перетворення. Тоді, зокрема, для визначення невідомих функцій $\tilde{u}_r(\tau, \xi, x)$, $\tilde{z}_r(\tau, \xi, x)$ одержимо таку послідовність задач, в якій $r = 3, 4, \ldots$, $\tilde{u}_r \equiv 0$ та $\tilde{z}_r \equiv 0$ для всіх $r < 3$:

$$\left[R(\xi)\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(K\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right] \tilde{u}_r = \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(K(\xi)\frac{\partial}{\partial x} \right) + K(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} \right] \tilde{u}_{r-1} +$$

$$+ K(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{u}_{r-2} - d^{-1}\tilde{z}_{r-2}, \quad \tau \in \left(0, T/\varepsilon^2\right), \quad \xi \in (0, l/\varepsilon), \quad x \in (0, l),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\tilde{u}_r \Big|_{\xi = m} = -K(0)\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\tilde{u}_{r-1}\Big|_{\xi = m} + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}_{r-2}\Big|_{\xi = m} \right]; \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\tilde{u}_r \Big|_{\xi = 0} = -\frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}_{r-1}\Big|_{\xi = 0};$$

$$\tilde{u}_r\big|_{\tau = 0} = -\sum_{j=0}^{r}\sum_{p=1}^{s+1} \mathrm{N}^{12, s-p+1}_{s-p+1, 2p-1-\alpha}(\xi)\frac{\partial^{s+p-\alpha}}{\partial t^{s+1-p}\partial x^{2p-1-\alpha}} w_{r-j}(0, x) = S_r(\xi, x);$$

$$\left[-R(\xi)\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(K(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right] \tilde{z}_r = \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(K(\xi)\frac{\partial}{\partial x} \right) + K(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} \right] \tilde{z}_{r-1} +$$

$$+ K(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{u}_{r-2} + \tilde{u}_{r-2}, \quad \tau \in \left(0, T/\varepsilon^2\right), \quad \xi \in (0, l/\varepsilon), \quad x \in (0, l), \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\tilde{z}_r \Big|_{\xi = m} = K(0)\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\tilde{z}_{r-1}\Big|_{\xi = m} + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{z}_{r-2}\Big|_{\xi = m} \right];$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{z}_r \bigg|_{\xi=0} = -\frac{\partial}{\partial x} \tilde{z}_{r-1} \bigg|_{\xi=0}.$$

Зауважимо, що структура початково-крайових задач для примежових функцій $\hat{u}_r(\eta, \xi, x)$ та $\hat{z}_r(\eta, \xi, x)$ аналогічна. Тому проведемо якісний аналіз тільки для задач (24), (25). Видно, що задача (25) при $r = 3, 4$ має тривіальні розв'язки. Неважко перевірити, що задача (24) при $r = 3$ допускає нескінченно багато розв'язків у класі $W_2^1(0, T/\varepsilon^2; L^2(0, m))$. Розглянемо конкретний розв'язок цієї задачі, який, зокрема, буде задовольняти співвідношення

$$R(\xi)\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(K(\xi)\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \xi}\right), \quad \tau \in \left(0, T/\varepsilon^2\right), \quad \xi \in (0, l/\varepsilon = m),$$

$$\tilde{u}_3\big|_{\xi=m} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} = 0, \quad \tilde{u}_3\big|_{\tau=0} = -\mathbf{N}_{03}^{12,0}(\xi)\frac{\partial^3}{\partial x^3} w_0(0, x) = S(\xi, x). \tag{26}$$

Тоді єдиний розв'язок задачі (26) можна записати у вигляді

$$\tilde{u}_3(\tau, \xi, x) = \frac{\partial^3 w_0(0, x)}{\partial x^3} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \tau} X_n(\xi) \int_0^m X_n(\xi) \mathbf{N}_{03}^{12,0}(\xi)\, d\xi, \tag{27}$$

де $\{X_n(\xi)\}$ є повною в $W_2^1(0, m)$ системою власних функцій задачі

$$-R^{-1}(\xi)\frac{d}{d\xi}\left(K(\xi)\frac{dz}{d\xi}\right) = \lambda^2 z, \quad \xi \in (0, m), \quad \frac{dz}{d\xi}\bigg|_{\xi=0} = 0, \quad z\big|_{\xi=m} = 0,$$

а послідовність відповідних власних значень $\left\{\lambda_n^2\right\}_{n=\overline{0,\infty}}$ задовольняє умову

$$\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \ldots < \lambda_n^2 < \ldots, \qquad \lim_{n \to \infty} \lambda_n^2 = +\infty.$$

Отже,

$$|\tilde{u}_3(\tau, \xi, x)| \le e^{-\lambda_1^2 \tau} \left| \frac{\partial^3 w_0(0, x)}{\partial x^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^m X_n(\xi) \mathbf{N}_{03}^{12,0}(\xi)\, d\xi \right| = e^{-\lambda_1^2 \tau} |S_3(\xi, x)|.$$

Цим показано, що функція $\tilde{u}_3 = \tilde{u}_3(\tau, \xi, x)$ має властивості примежової. Оскільки система функцій $\{X_n(\xi)\}_{n=\overline{1,\infty}}$ утворює базис в $W_2^1(0, m)$, виконується співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}_3(\tau, \xi, x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^m X_n(\gamma) \mathbf{N}_{03}^{12,0}(\gamma)\, d\gamma\right) X_n'(\xi)\, e^{-\lambda_n^2 \tau}\right] \left(-\frac{\partial^3 w_0(0, x)}{\partial x^3}\right),$$

а отже,

$$\left|\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}_3(\tau, \xi, x)\right| \le e^{-\lambda_1^2 \tau} c_{13}(x, \xi).$$

Завдяки регулярній залежності $x \to \tilde{u}_3(\tau, \xi, x)$, аналогічні оцінки справедливі і для виразів

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(K(\xi)\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(K(\xi)\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \xi}\right), \quad \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x}.$$

Таким чином, у відповідності до методу математичної індукції, аналогічним прийомом можна для довільних $r = \overline{3, \infty}$ конструктивно побудувати єдиний розв'язок системи співвідношень (24), (25), який буде задовольняти властивості примежових функцій для початкових даних. Сказане вище в повній мірі стосується якісного аналізу початково-крайових задач для визначення примежових функцій $\hat{u}_r(\eta, \xi, x)$ та $\hat{z}_r(\eta, \xi, x)$, які виправляють нев'язку в кінцевий момент часу $t = T$.

Отже, беручи до уваги проведений аналіз, можна запропонувати таку структуру асимптотичних наближень k-го порядку до розв'язку системи співвідношень Ейлера (5)–(6):

$$\begin{bmatrix} u^{(k)} \\ z^{(k)} \end{bmatrix} \approx \sum_{i=0}^{k+1} \varepsilon^i \sum_{r=0}^{i} \sum_{p=1}^{s+1} \mathbf{N}_{s-p+1,\,2p-1+\alpha}^{s-p+1}(\xi) \frac{\partial^{s+p-\alpha}}{\partial t^{s+1-p}\,\partial x^{2p-1-\alpha}} \begin{bmatrix} v_{i-r}(t,x) \\ w_{i-r}(t,x) \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{i=3}^{k} \varepsilon^i \left(\begin{bmatrix} \tilde{u}_i(\tau,\xi,x) \\ \tilde{z}_i(\tau,\xi,x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{u}_i(\eta,\xi,x) \\ \hat{z}_i(\eta,\xi,x) \end{bmatrix} \right). \tag{28}$$

Користуючись стандартною в таких випадках технікою [7, с. 1082], одержуємо такий результат.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови леми 2, то асимптотичне наближення k-го порядку до задачі оптимального керування визначається формулами (28) і для нього справедливі такі оцінки апроксимації:*

$$\left\| u_\varepsilon - u^{(k)} \right\|_{L^2(0,T,H^1(0,l))} \le \text{const}\,\varepsilon^k, \quad \left\| \overline{u}_\varepsilon - \overline{u}^{(k)} \right\|_{W_2^1(0,T,L^2)} \le \text{const}\,\varepsilon^k,$$

$$\left\| p_\varepsilon^0 - p^{(k)} \right\|_{L^2(0,T,H^1(0,l))} \le \text{const}\,\varepsilon^k, \quad \left| I\left[p_\varepsilon^0\right] - I\left[p^{(k)}\right] \right| \le \text{const}\,\varepsilon^{2k},$$

де

$$p^{(k)} = -\sum_{i=0}^{k+1} \varepsilon^i \sum_{r=0}^{i} \sum_{p=1}^{s+1} d^{-1}[0\ \ 1]\,\mathbf{N}_{s-p+1,\,2p-1+\alpha}^{s-p+1}(\xi) \times$$

$$\times \frac{\partial^{s+p-\alpha}}{\partial t^{s+1-p}\,\partial x^{2p-1-\alpha}} \begin{bmatrix} v_{i-r}(t,x) \\ w_{i-r}(t,x) \end{bmatrix} -$$

$$- d^{-1} \sum_{i=3}^{k} \varepsilon^i \left(\tilde{z}_i(\tau,\xi,x) + \hat{z}_i(\eta,\xi,x) \right).$$

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984. – 472 с.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
4. *Мельник В. С.* Граничное управление для некоторых нелинейных распределенных систем // Адаптив. САУ. – 1983. – Вып. 12. – С. 34–42.
5. *Хазан М. И.* Краевые задачи с эволюцией в граничном условии // Линейные и нелинейные краевые задачи. Спектральная теория. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. – С. 105–115.
6. *Аттуш Э.* Усреднение // Тр. семинара Н. Бурбаки за 1988 г.: Сб. статей. – М.: Мир, 1990. – С. 7–31.
7. *Капустян В. Е.* Асимптотический анализ ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Укр. мат. журн. – 1993. – 45, № 8. – С. 1072–1083.

Одержано 02.12.94