УДК 517.944

И. И. Скрыпник (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (ВЕСОВОЙ СЛУЧАЙ)

We establish the interior regularity of solutions and their derivatives with respect to spatial coordinates for a degenerate quasilinear parabolic equation of the second order.

Встановлюється внутрішня гельдеровість розв'язків та похідних розв'язків за просторовими координатами для квазілінійного виродженого параболічного рівняння другого порядку.

В данной работе изучается гельдеровость решений параболических уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = a_0\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$(x, t) \in \Omega_T = \Omega \times (0, T), \quad 0 < T < \infty.$$

Предполагается, что функции $a_i(x, t, u, p)$, $i = 0, 1, \ldots, N$, удовлетворяют условию Каратеодори и с некоторыми положительными постоянными C_0, C_1, C_2, выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x, t, u, p) p_i \geq C_0 v(x) |p|^m - \varphi_0(x, t), \quad m \geq 2, \tag{2}$$

$$|a_i(x, t, u, p)| \leq C_1 v(x) |p|^{m-1} + \varphi_1(x, t), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

$$|a_0(x, t, u, p)| \leq C_2 v(x) |p|^m + \varphi_2(x, t), \tag{4}$$

где $\varphi_i(x, t)$, $i = 0, 1, 2$, — некоторые заданные функции и $v(x) \in A_{1+m/N}$. Определение и основные свойства классов A_p можно найти, например, в [1]. В случае $m = 2$ и $v(x) \equiv 1$ в [2] для решений уравнения (1) введены классы $B_2(\Omega_T, M, \gamma, r, \delta, \kappa)$ и доказано вложение $B_2(\Omega_T, M, \gamma, r, \delta, \kappa)$ в $C^{\alpha, \alpha/2}(\Omega_T)$. Для случая $m = 2$ и $v(x) \in A_{1+2/N}$ в [3, 4] для решений уравнения (1) доказано неравенство Харнака. При $m \neq 2$ и $v(x) \equiv 1$ в [5, 6] для решений уравнения (1) введены классы $B_m(\Omega_T, M, \gamma, r, \delta, \kappa)$ и показано, что $B_m(\Omega_T, M, \gamma, r, \delta, \kappa) \subset$ $\subset C^{\alpha, \alpha/m}(\Omega_T)$. В данной статье развивается метод работы [5] для случая $v(x) \in A_{1+m/N}$, $m \geq 2$.

Замечание 1. Аналогично [7], используя технику доказательства лемм 1, 4–6 данной работы можно рассмотреть вопросы о гельдеровости градиентов решения уравнения (1) и гельдеровости положительных решений уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u^m\right) = 0, \quad m > 1, \quad (x, t) \in \Omega_T. \tag{5}$$

В этом случае в п. 4 мы сформулируем лишь условия на $v(x)$ и основные утверждения.

1. Определения и вспомогательные утверждения. Следуя [1], будем говорить, что $v(x) \in D_\mu$, если с некоторой постоянной C, не зависящей от ρ, s, выполнено неравенство

© И. И. СКРЫПНИК, 1996

$$\frac{\nu(B_\rho(x_0))}{\nu(B_s(x_0))} \le C\left(\frac{\rho}{s}\right)^{N\mu} \tag{6}$$

для произвольных $B_\rho(x_0)$, $B_s(x_0)$, $0 < s \le \rho$, где $B_\rho(x_0)$ — шар радиуса ρ с центром в x_0,

$$\nu(B_\rho(x_0)) = \int\limits_{B_\rho(x_0)} \nu(x)\,dx.$$

Также будем говорить, что $\nu(x) \in D_\infty$, если с некоторой постоянной C, не зависящей от ρ, x_0, выполнено неравенство $\nu(B_{2\rho}(x_0)) \le C\nu(B_\rho(x_0))$.

Можно показать, что $A_p \subset D_p$ и существует такое $\mu < p$, что $A_p \subset D_\mu$.

Под пространством $W_m^{1,0}(\Omega_T, \nu)$ будем понимать пространство измеримых функций $u(x,t)$ с конечной нормой

$$\|u(x,t)\|^m_{W_m^{1,0}(\Omega_T,\nu)} =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (1+\nu(x))|u(x,t)|^m\,dx\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^m dx\,dt.$$

Рассмотрим пространство $V_{2,m}(\Omega_T, \nu)$ функций с конечной нормой

$$\|u(x,t)\|_{V_{2,m}(\Omega_T,\nu)} = \left\{\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\,dx\right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^m dx\,dt\right\}^{1/m}. \tag{7}$$

Пространство $\overset{\circ}{V}_{2,m}(\Omega_T; \nu)$ определяется как замыкание пространства функций $\varphi(x,t) \in C^\infty(\Omega_T)$ с компактным носителем в $\Omega \times [0, T]$ в норме, определяемой равенством (7). Также будем рассматривать пространство $V_m(\Omega_T; \nu)$ функций с конечной нормой

$$\|u(x,t)\|^m_{V_m(\Omega_T,\nu)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^m\,dx +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^m dx\,dt.$$

В случае, когда $\nu_1 \in D_\infty$, $\nu \in A_{1+m/N}$, и выполнено неравенство

$$\frac{s}{\rho}\left[\frac{\nu_1(B_s(x_0))}{\nu_1(B_\rho(x_0))}\right]^{1/q} \le C\left[\frac{\nu(B_s(x_0))}{\nu(B_\rho(x_0))}\right]^{1/m}, \quad 0 < s \le \rho, \tag{8}$$

с $q > m$ и постоянной C, не зависящей от s, ρ, x_0, используя результаты [1], можно показать, что справедлива оценка

$$\frac{1}{\operatorname{meas} B_\rho(x_0)} \int\limits_0^T \int\limits_{B_\rho(x_0)} |u(x,t)|^{q_1}\,dx\,dt +$$

$$+\frac{1}{\nu\big(B_\rho(x_0)\big)}\int_0^T\int_{B_\rho(x_0)}\nu(x)|u(x,t)|^{q_1}\,dx\,dt\;+$$

$$+\frac{1}{\nu_1\big(B_\rho(x_0)\big)}\int_0^T\int_{B_\rho(x_0)}\nu_1(x)|u(x,t)|^{q_1}\,dx\,dt\;\le$$

$$\le C\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\frac{1}{\operatorname{meas}B_\rho(x_0)}\int_{B_\rho(x_0)}|u(x,t)|^m\,dx\right\}^{(q_1-m)/m}\times$$

$$\times\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\frac{T}{\operatorname{meas}B_\rho(x_0)}\int_{B_\rho(x_0)}|u(x,t)|^m\,dx\;+\right.$$

$$\left.+\frac{\rho^m}{\nu\big(B_\rho(x_0)\big)}\int_0^T\int_{B_\rho(x_0)}\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^m dx\,dt\right\} \qquad (9)$$

с некоторым $q_1>m$, постоянной C, не зависящей от T, ρ, x_0, $u(x,t)\in\in\mathring{V}_m\big(B_\rho(x_0)\times(0,T),\nu\big)$.

Заметим, для любой функции $u(x,t)\in\mathring{V}_m\big(B_\rho(x_0)\times(0,T),\nu\big)$, $\nu(x)\in\in A_{1+m/N}$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{\operatorname{meas}B_\rho(x_0)}\int_0^T\int_{B_\rho(x_0)}|u(x,t)|^q\,dx\,dt\;\le$$

$$\le C\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\frac{1}{\operatorname{meas}B_\rho(x_0)}\int_{B_\rho(x_0)}|u(x,t)|^m\,dx\right\}^{(q-m)/m}\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho^m}{\nu\big(B_\rho(x_0)\big)}\int_0^T\int_{B_\rho(x_0)}\nu(x)\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^m dx\,dt\right\}, \qquad (10)$$

где

$$q=m\frac{m+N-N(\mu-1)}{N},\quad \mu<1+\frac{m}{N}. \qquad (11)$$

Под решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x,t)\in V_{2,m}(\Omega_T,\nu)$, удовлетворяющую тождеству

$$0=\int_\Omega u(x,t)\varphi(x,t)\,dx\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\left\{-u(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\;+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^N a_i\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x_i}+a_0\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi(x,t)\right\}dx\,dt \qquad (12)$$

для любой функции $\varphi(x,t)\in\mathring{V}_{2,m}(\Omega_T,\nu)$, удовлетворяющей условию $\partial\varphi/\partial t\in L_2(\Omega_T)$, и произвольных t_1,t_2, $0<t_1<t_2\le T$.

В дальнейшем для простоты изложения будем предполагать, что выполнена оценка

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in B_\rho(x_0)} v(x) \le C \frac{\rho^m}{\left[\int_{B_\rho(x_0)} v^{-N/m}(x)\,dx\right]^{m/N}} \tag{13}$$

с постоянной C, не зависящей от x_0, ρ. Для общего случая будем делать необходимые замечания в ходе доказательства. Используя неравенство Гельдера, из (13) легко получить оценку

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in B_\rho(x_0)} v(x) \le C \frac{v\big(B_\rho(x_0)\big)}{\rho^N}. \tag{14}$$

Будем предполагать, что

$$\left\{\varphi_0(x,t) + \left[\varphi_1(x,t) v^{-1/m}(x)\right]^{m'} + \varphi_2(x,t)\right\}[v(x)]^{-1/q_0} \in L_{q_0}(\Omega_T),$$

где $m' = m/(m-1)$, $q_0' = q_0/(q_0-1)$,

$$q_0 = \frac{N + m + (\mu-1)N}{m(1-(\mu-1)(N-\kappa_1)/m)}, \quad 0 < \kappa_1 < 1 - \frac{\mu-1}{m}N. \tag{15}$$

Замечания. **2.** Если $v(x) = |x|^\lambda$, то условие $v(x) \in A_{1+m/N}$ означает, что $-N < \lambda < m$. Условие (13) будет выполнено, если $0 < \lambda < m$.

3. Если для $a_0(x,t,u,p)$ выполнена оценка

$$|a_0(x,t,u,p)| \le C_2 v(x)|p|^{m-1} + \varphi_2(x,t),$$

то аналогично [3, 4] можно показать, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in\Omega_T} |u(x,t)| \le M < +\infty.$$

Отметим также следующее неравенство (доказательство имеется, например, в [2]):

$$(l-k)\operatorname{meas} A^+_{l,R} \le C \frac{R^{n+1}}{\operatorname{meas}\left\{B_R(x_0)\setminus A^+_{k,R}\right\}} \int\limits_{A^+_{k,R}\setminus A^+_{l,R}} \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right| dx, \tag{16}$$

справедливое для $f(x) \in W_1^1(B_R(x_0))$ и любых $l, k \in R^1$, $l > k$. Здесь $A^+_{k,R} = \{x \in B_R(x_0) : f(x) > k\}$.

2. Классы $B_m(\Omega_T, M, \gamma, q, \delta, \kappa, v)$, $m \ge 2$. Пусть Ω — открытое ограниченное множество в R^N, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$. Если $(x_0, t_0) \in \Omega_T$, то полагаем $B_R = \{x : |x - x_0| < R\}$ и $Q(R,\rho) = B_R \times (t_0 - \rho, t_0)$, $\rho > 0$. Будем предполагать, что R, ρ настолько малы, что $Q(R,\rho) \subset \Omega_T$.

Для ограниченной измеримой функции $u(x,t)$, определенной в $Q(R,\rho)$, рассмотрим функции $[u(x,t) - k]_\pm$, $k \in R^1$, и пусть $H_\pm$ — число, удовлетворяющее условию

$$\operatorname{ess\,sup}\{[u(x,t)-k]_\pm : (x,t) \in Q(R,\rho)\} \le H_\pm \le \delta, \tag{17}$$

где δ — заданное положительное число. При $z \in R^1$ справедливо равенство

$$\psi(H_{\pm}, z, \nu) = \ln^{+}\left\{\frac{H_{\pm}}{H_{\pm} - z + \nu}\right\},$$

$$\nu < \min\{H_{\pm}, 1\}, \tag{18}$$

$$\psi^{(1)}(H_{\pm}, z, \nu) = \frac{d}{dz}\psi(H_{\pm}, z, \nu).$$

Будем говорить, что измеримая функция $u(x, t) \in V_{2,m}(\Omega_T, \upsilon)$ принадлежит классу $B_m(\Omega_T, M, \gamma, q, \delta, \kappa, \upsilon)$, если

$$\operatorname{ess\,sup}\{|u(x, t)|: (x, t) \in \Omega_T\} \leq M \tag{19}$$

и выполнены неравенства

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t_0 - \rho \leq t \leq t_0} \int_{B_R} [u(x, t) - k]_{\pm}^2 \xi^m(x, t)\, dx + \iint_{Q(R,\rho)} \upsilon(x)\left|\frac{\partial}{\partial x}[u(x, t) - k]_{\pm}\right|^m \xi^m(x, t)\, dx\, dt \leq$$

$$\leq \int_{B_R} [u(x, t_0 - \rho) - k]_{\pm}^2 \xi^m(x, t_0 - \rho)\, dx + \gamma\left\{\iint_{Q(R,\rho)} \upsilon(x)\big|[u(x, t) - k]_{\pm}\big|\left|\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}\right|^m dx\, dt + \right.$$

$$+ \iint_{Q(R,\rho)} [u(x, t) - k]_{\pm}^2 \xi^{m-1}(x, t)\left|\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t}\right| dx\, dt +$$

$$\left. + \left[\int_{t_0 - \rho}^{t_0} \upsilon\big(A_{k,R}^{\pm}(t)\big)\, dt\right]^{m(1+\kappa)/q}\right\}, \tag{20}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t_0 - \rho \leq t \leq \rho_0} \int_{B_R} \psi^2\big(H_{\pm}, [u(x, t) - k]_{\pm}, \nu\big)\zeta^m(x)\, dx \leq$$

$$\leq \int_{B_R} \psi^2\big(H_{\pm}, [u(x, t_0 - \rho) - k]_{\pm}, \nu\big)\zeta^m(x)\, dx +$$

$$+ \gamma \iint_{Q(R,\rho)} \upsilon(x)\,\psi\big(H_{\pm}, [u(x, t) - k]_{\pm}, \nu\big)\left|\psi^{(1)}\big(H_{\pm}, [u(x, t) - k]_{\pm}, \nu\big)\right|^{2-m}\left|\frac{\partial \zeta(x)}{\partial x}\right| dx\, dt +$$

$$+ \frac{\gamma}{\nu^m}\left(1 + \ln\frac{H_{\pm}}{\nu}\right)\left\{\left[\int_{t_0 - \rho}^{t_0} \upsilon\big(A_{k,R}^{\pm}(t)\big)\, dt\right]^{m(1+\kappa)/q}\right\}, \tag{21}$$

где

$$A_{k,R}^{\pm}(t) = \{x \in B_R : [u(x, t) - k]_{\pm} > 0\},$$

$$\upsilon\big(A_{k,R}^{\pm}(t)\big) = \int_{A_{k,R}^{\pm}(t)} \upsilon(x)\, dx; \quad \xi(x, t) \geq 0, \quad \zeta(x) \geq 0,$$

$$\xi(x,t) \in C_0^\infty(B_R \times R^1), \qquad \zeta(x) \in C_0^\infty(B_R).$$

Различные параметры в (20), (21) удовлетворяют следующим условиям:

1) δ, γ — фиксированные положительные числа;

2) k — число, удовлетворяющее неравенству

$$\operatorname{ess\,sup}\{\,|\,[u(x,t)-k]_\pm|: (x,t)\in Q(R,\rho)\} \le \delta, \tag{22}$$

3) $\kappa = \dfrac{m}{N}\kappa_1 > 0, \quad q = \dfrac{q_0}{q_0-1}m(1+\kappa), \quad \kappa_1 < 1 - \dfrac{m}{N}(\mu-1).$

Отметим также интегральное тождество

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t}u_h(x,t)\varphi(x,t) + \sum_{i=1}^N \left[a_i\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_h \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x_i} + \right.$$
$$\left. + \left[a_0\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_h \varphi(x,t)\right\} dx\,dt = 0, \tag{23}$$

справедливое для всех $\varphi(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_m^{1,0}(\Omega_T, \nu)$, $h < t_1 < t_2 < T-h$.

Здесь

$$u_h(x,t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(u,\tau)\,d\tau,$$

$$[g(x,t)]_{\bar h} = \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} g(x,\tau)\,d\tau.$$

Замечание 4. В случае, когда условие (13) не выполнено, будем предполагать, что существует $0<\kappa<1$ такое, что для $q = (q_0/(q_0-1))m(1+\kappa)$ выполнено неравенство (10).

Неравенства (20), (21) для решений уравнения (1) доказываются аналогично [5], если подставить в интегральное тождество (23) соответственно функции

$$\varphi_1(x,t) = \pm[u_h(x,t)-k]_\pm \xi^m(x,t),$$

$$\varphi_2(x,t) = \psi(H_\pm, [u_h(x,t)-k]_\pm, \nu)\,\psi^{(1)}(H_\pm, [u_h(x,t)-k]_\pm, \nu)\,\zeta^m(x)$$

вместо пробной функции $\varphi(x,t)$. Здесь $\xi(x,t)$ — срезающая функция для цилиндра $B_R \times R^1$, $\zeta(x)$ — срезающая функция для шара B_R.

3. Внутренняя гладкость функций из класса $B_m(\Omega_T, M, \gamma, q, \delta, \kappa, \nu)$. Зафиксируем точку $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ и определим

$$\kappa_0 = \frac{\kappa(m+N)+N(\mu-1)}{m+N-N(\mu-1)}, \tag{24}$$

$$Q_R^{N\kappa_0} = B_R \times \left(t_0 - R^{-N\kappa_0(m-2)/m}\tau(R), t_0\right), \tag{25}$$

где μ — число из (11),

$$\tau(R) = R^m \frac{\operatorname{meas} B_R}{\nu(B_R)}, \quad B_R = B_R(x_0).$$

Пусть

$$\mu_+ = \operatorname{ess\,sup}\{u(x,t):\ (x,t)\in Q_R^{N\kappa_0}\},$$

$$\mu_- = \operatorname{ess\,inf}\{u(x,t):\ (x,t)\in Q_R^{N\kappa_0}\}$$

и ω — некоторое число, удовлетворяющее неравенству

$$2M \ge \omega \ge \mu_+ - \mu_- = \operatorname{ess\,osc}\{u(x,t):\ (x,t)\in Q_R^{N\kappa_0}\}.$$

Аналогично [8] выберем последовательность $\beta_n = \beta^{-n}$ такую, что $\beta > 1$ и выполнена оценка

$$\beta_{n+1}^m \frac{\operatorname{meas} B_{\beta_{n+1}R}}{\nu(B_{\beta_{n+1}R})} < \beta_n^m \frac{\operatorname{meas} B_{\beta_n R}}{\nu(B_{\beta_n R})} \quad \text{при} \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{26}$$

Пусть s^* — некоторое положительное число, которое мы выберем позднее, и

$$\theta = \left(\frac{\beta^{s^*}}{\omega}\right)^{m-2}. \tag{27}$$

Рассмотрим цилиндр

$$Q_R^\theta = B_R \times (t_0 - \theta\tau(R), t_0). \tag{28}$$

Если $\omega > \beta^{s^*} R^{N\kappa_0/m}$, то $Q_R^\theta \subset Q_R^{N\kappa_0}$. Рассмотрим также цилиндр

$$\overline{Q}_R^\eta = B_R \times (\bar t - \eta\,\tau(R), \bar t\,), \quad \eta > 0, \tag{29}$$

где $\bar t \le t_0$ и $\bar t - \eta\tau(R) \ge t_0 - \theta\tau(R)$,

$$\eta = \left(\frac{\beta^{s_0}}{\omega}\right)^{m-2}, \quad s_0 < s^*, \tag{30}$$

s_0 — наименьшее положительное целое число, удовлетворяющее неравенству

$$2M\beta^{-s_0} \le \delta. \tag{31}$$

Лемма 1. *Существует* $\alpha_0 \in (0,1)$, *не зависящее от* ω, R, s^*, *такое, что если выполнено неравенство*

$$\operatorname{meas}\{(x,t)\in \overline{Q}_R^\eta:\ u(x,t) < \mu_- + \omega\beta^{-s_0}\} \le \alpha_0 \operatorname{meas} \overline{Q}_R^\eta, \tag{32}$$

то справедлива одна из оценок

$$R^{N\kappa_0/m} \ge \left(\frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)^{1+\left(\frac{1+\kappa}{q}-\frac{1}{m}\right)_+(m-2)}, \tag{33}$$

$$u(x,t) \ge \mu_- + \frac{\omega}{\beta^{s_0+1}} \quad \text{для всех} \quad (x,t)\in \overline{Q}_{R/\beta}^\eta. \tag{34}$$

Доказательство. Предположим, что (33) не выполнено; тогда $Q_R^\theta \subset Q_R^{N\kappa_0}$ и зафиксируем цилиндр $\overline{Q}_R^\eta$, для которого выполнены предположения леммы. Определим

$$R_n = \frac{R}{\beta} + \frac{R}{\beta^n}, \qquad \overline{R}_n = \frac{R}{\beta} + \frac{R}{2}\,\frac{1+\beta}{\beta^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть функция $\xi(x,t) \in C_0^\infty(B_R \times R^1)$ такая, что $\xi(x,t) \equiv 1$ в $\overline{Q}^{\eta}_{\overline{R}_n}$, $\xi(x,t) \equiv 0$ при $t = \bar{t} - \eta\tau(R_n)$,

$$\left|\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}\right| \le \frac{2\beta^{n+1}}{(\beta-1)R}, \qquad \left|\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial t}\right| \le C\,\frac{\beta^{n-nN(\mu-1)}}{\tau(R)}\left(\frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)^{(m-2)}.$$

Выберем

$$k_n = \mu_- + \frac{\omega}{\beta^{s_0+1}} + \frac{\omega}{\beta^{s_0+n}}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Из (20), используя неравенство (11), получаем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\bar{t}-\eta\tau(R_n)\le t\le\bar{t}} \int\limits_{B_{\overline{R}_n}} \left|[u(x,t)-k_n]_-\right|^m dx \; +$$

$$+\;\frac{1}{\eta}\iint\limits_{\overline{Q}^{\eta}_{\overline{R}_n}} \nu(x)\left|\frac{\partial}{\partial x}[u(x,t)-k_n]_-\right|^m dx\,dt \;\le$$

$$\le\; C\beta^{mn}\left(\frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)^m \frac{1}{\tau(R)}\frac{1}{\eta}\int\limits_{\bar{t}-\eta\tau(R_n)}^{\bar{t}} \operatorname{meas} A_{\overline{K}_n, R_n}(t)\,dt \;+$$

$$+\; C\left[\frac{1}{\eta}\frac{\nu(B_R)}{\operatorname{meas} B_R}\int\limits_{\bar{t}-\eta\tau(R_n)}^{\bar{t}} \operatorname{meas} A_{\overline{K}_n, R_n}(t)\,dt\right]^{m(1+\kappa)/q} \eta^{m((1+\kappa)-1)/q}. \tag{35}$$

Вводя новую переменную $z = (t-\bar{t})/\eta$ и обозначая

$$Q_n = B_{R_n}\times(-\tau(R_n),0), \quad \overline{Q}_n = B_{\overline{R}_n}\times(-\tau(\overline{R}_n),0),$$

$$A_n(z) = \{x\in B_{R_n} : u(x,z) < k_n\},$$

получаем

$$\|(u-k_n)_-\|^m_{V_m(\overline{Q}_n,\,\nu)} \le$$

$$\le\; \beta^{mn}\left(\frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)^m \frac{1}{\tau(R)}\operatorname{meas} A_n + C\left[\frac{\nu(B_R)}{\operatorname{meas} B_R}\operatorname{meas} A_n\right]^{m(1+\kappa)/q} \eta^{m((1+\kappa)-1)/q},$$

$$\operatorname{meas} A_n = \int\limits_{-\tau(R_n)}^{0} \operatorname{meas} A_n(z)\,dz. \tag{36}$$

Полагая

$$Y_n = \frac{\operatorname{meas} A_n}{\tau(R)\operatorname{meas} B_R}, \quad Z_n = (\operatorname{meas} B_R)^{-(1+\kappa_0)/(1+\kappa)}\left[\frac{\nu(B_R)}{\operatorname{meas} B_R}\operatorname{meas} A_n\right]^{m/q}, \tag{37}$$

из (36) с использованием неравенства (10) получаем

$$Y_{n+1} \le C\beta^{2mn}\left\{Y_n^{1+(q-m)/q} + Y_n^{(q-m)/q} Z_n^{1+\kappa}\right\}. \tag{38}$$

При этом мы также использовали неравенство

$$\left(\frac{\beta^{s_0}}{\omega}\right)^m \eta^{m((1+\kappa)-1)/q} R^{N\kappa_0} \leq 1,$$

которое следует из определения η и предположения, что неравенство (33) не выполнено.

Аналогично [5], используя неравенства (10), (36), можно показать, что

$$Z_{n+1} \leq C\beta^{2mn}\left\{Y_n + Z_n^{1+\kappa}\right\}, \tag{39}$$

если учесть очевидное равенство, справедливое для $q = m((m+2N-N\mu))/N$ и κ_0, определенного равенством (24):

$$(m+N)\frac{m}{q} = N\frac{1+\kappa_0}{1+\kappa}. \tag{40}$$

Используя лемму 5.7 из [2, с. 113] из (38), (39) получаем, что $Y_n, Z_n \to 0$ при $n \to \infty$, если $Y_1 \leq \lambda_0$, $Z_1^{1+\kappa} \leq \lambda_0$, где λ_0 — некоторая постоянная, зависящая от C, m, κ, β, μ. Поэтому лемма 1 будет доказана, если мы выберем α_0 достаточно малым, зависящим лишь от λ_0.

Замечание 5. В случае, когда неравенство (13) не выполнено, можно получить неравенства, аналогичные (38), (39), при этом

$$Y_n = \frac{1}{\tau(R)\operatorname{meas} B_R}\operatorname{meas} A_n + \frac{\nu(A_n)}{R^m \operatorname{meas} B_R},$$

$$Z_n = [\operatorname{meas} B_R]^{-(1+\bar\kappa_0)/(1+\kappa)}[\nu(A_n)]^{m/q}, \quad \bar\kappa_0 = \frac{m+N}{N}\frac{m}{q}(1+\kappa) - 1. \tag{41}$$

Предположим, что условия леммы 1 выполнены для некоторого цилиндра $Q = B_{R/\beta} \times (\bar t - \eta\tau(R/\beta), t_0)$. Высота этого цилиндра не менее, чем $\eta\tau(R/\beta)$, и не более, чем $\eta\tau(R/\beta) + (\theta-\eta)\tau(R) \leq \theta\tau(R)$, при этом мы использовали неравенство (26). Положив $\rho = R\beta^{-2}$, мы можем записать

$$Q = Q_{\beta\rho}^{\tilde\theta} = B_{\beta\rho} \times \left(t_0 - \tilde\theta\tau(\beta\rho), t_0\right),$$

где

$$\tilde\theta = C\left(\beta^{\bar s}/\omega\right)^{m-2}, \quad s_0 \leq \bar s \leq s^*, \tag{42}$$

постоянная C зависит лишь от β, μ, m, N.

Лемма 2. *Предположим, что*

$$H_- = \left\|\left[u(x,t) - \left(\mu_- + \frac{\omega}{\beta^{s_0+1}}\right)\right]_-\right\|_{L_\infty(Q)} > \frac{\omega}{\beta^{s_0+2}}.$$

Тогда для любого $\alpha_1 \in (0,1)$ *существует положительное число* $s_1 = s_1(\alpha_1, \gamma, \kappa, \delta, q)$ *такое, что либо*

$$R^{N\kappa_0/m} \geq \left(\frac{\omega}{\beta^{s_1}}\right)^{1+[(1+\kappa)/q - 1/m]_+(m-2)}, \tag{43}$$

либо

$$\operatorname{meas}\{x \in B_R : u(x,t) < \mu_- + \omega/\beta^{s_1}\} \leq \alpha_1 \operatorname{meas} B_\rho \tag{44}$$

для всех $t \in \left[t_0 - \tilde\theta\tau(\beta\rho), t_0\right]$.

Доказательство. Используя неравенство (21), получаем

$$\int_{B_\rho} \psi^2\left(H_-, \left[u(x,t)-\left(\mu_- + \frac{\omega}{\beta^{s_0+1}}\right)\right]_-, \frac{\omega}{\beta^{s_0+n}}\right)dx \le$$

$$\le \frac{C}{\tau(\rho)}\left(\frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)^{m-2} \operatorname{meas} Q^{\tilde\theta}_{\beta\rho} + Cn\left(\frac{\beta^{s_0+n}}{\omega}\right)^m \tilde\theta^{m(1+\kappa)/q} R^{N\kappa_0} \operatorname{meas} B_R, \quad (45)$$

где n — произвольное натуральное число. При этом использовано равенство (40), κ_0 определено равенством (24). Выберем $s_1 = s_0 + n$. Если преположить, что неравенство (43) не выполнено, то правая часть (45) ограничена сверху величиной $C(s^*)\operatorname{meas} B_\rho$. Так как $H_- > \omega/\beta^{s_0+2}$, имеем

$$\psi^2\left(H_-, \left[u(x,t)-\left(\mu_- + \frac{\omega}{\beta^{s_0+1}}\right)\right]_+, \frac{\omega}{\beta^{s_0+n}}\right) \ge (n-3)^2 \ln^2\beta.$$

Поэтому для всех $t \in \left[t_0 - \tilde\theta\tau(\beta\rho), t_0\right]$ получаем

$$\operatorname{meas} A^-_{\mu^- + \omega/\beta^{s_0+n}} \le C(s^*)\frac{n}{(n-3)^2} \operatorname{meas} B_\rho. \quad .(46)$$

Выбрав n настолько большим, чтобы $C(s^*)n/(n-3)^2 \le \alpha_1$, мы получим требуемое утверждение.

Замечание 6. В случае, когда неравенство (13) не выполнено, мы можем получить неравенство

$$\int_{B_\rho} \psi^2\left(H_-, \left[u(x,t)-\left(\mu_- + \frac{\omega}{\beta^{s_0+1}}\right)\right]_-, \frac{\omega}{\beta^{s_0+n}}\right)dx \le$$

$$\le \frac{C}{\rho^m}(n-1)\left(\frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)^{m-2} \nu\left(Q^{\tilde\theta}_{\beta\rho}\right) + Cn\left(\frac{\beta^{s_0+n}}{\omega}\right)^m \tilde\theta^{m(1+\kappa)/q} R^{N\tilde\kappa_0} \operatorname{meas} B_\rho,$$

где $\tilde\kappa_0$ определено равенством (41); при этом использовано равенство

$$(m+N)\frac{m}{q} = N\frac{1+\tilde\kappa_0}{1+\kappa}. \quad (47)$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству леммы 2, так как

$$\nu\left(Q^{\tilde\theta}_{\beta\rho}\right) = \int_{t_0-\tilde\theta\tau(\beta\rho)}^{t_0} dt \int_{B_{\beta\rho}} \nu(x)dx \le C\tilde\theta\rho^m \operatorname{meas} B_\rho.$$

В дальнейшем выберем ρ^* не зависящим от ω и R, поэтому можем сказать, что s_1 не зависит от ω, R. Можем предположить также, что $s_1 > s^*$.

Лемма 3. *Предположим, что условия леммы* 1 *выполнены и пусть* $H_- > \omega/\beta^{s_0+2}$. *Тогда существует число* $s > s^*$, *не зависящее от* ω *и* R, *такое, что либо*

$$R^{\frac{N\kappa_0}{m}} > \left(\frac{\omega}{\beta^s}\right)^{1+\left[\frac{1+\kappa}{q}-\frac{1}{m}\right]_+(m-2)}, \quad (48)$$

либо

$$u(x,t) > \mu_- + \frac{\omega}{\beta^s} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in B_{R/\beta^3} \times \left(t_0 - \eta\tau(R/\beta^3), t_0\right). \tag{49}$$

Доказательство. Определим

$$\rho_n = \frac{\rho}{\beta} + \frac{\rho}{\beta^n}, \quad \bar{\rho}_n = \frac{\rho}{\beta} + \frac{\rho}{2}\frac{1+\beta}{\beta^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и рассмотрим цилиндры

$$D_n^{\tilde{\theta}} = B_{\rho_n} \times \left(t_0 - \tilde{\theta}\tau\left(\frac{R}{\beta}\right), t_0\right), \quad \overline{D}_n^{\tilde{\theta}} = B_{\bar{\rho}_n} \times \left(t_0 - \tilde{\theta}\tau\left(\frac{R}{\beta}\right), t_0\right).$$

Выберем функцию $\zeta(x)$ так, чтобы $\zeta(x) = 1$ в $B_{\bar{\rho}_n}$,

$$\zeta(x) \in C_0^\infty\left(B_{\rho_n}\right), \quad \left|\frac{\partial\zeta(x)}{\partial x}\right| \le \frac{C\beta^n}{\rho},$$

и пусть

$$k_n = \mu_- + \omega/\beta^{s_1+1} + \omega/\beta^{s_1+n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где s_1 такое же, как и в, как и лемме 2.

Предположим, что неравенство (48) не выполнено, тогда из леммы 1 имеем $u(x,t) > \mu_- + \omega/\beta^{s_1}$ для $t = t_0 - \tilde{\theta}\tau(R/\beta) = \bar{t} - \eta\tau(R/\beta)$, а значит,

$$\int_{B_{\rho_n}} [u(x,t_0) - k_n]_-^2 \zeta^m(x)\,dx = 0.$$

Так как для всех $t \in \left[t_0 - \tilde{\theta}\tau(R/\beta), t_0\right]$

$$\int_{B_{\bar{\rho}_n}} \left|[u(x,t) - k_n]_-\right|^2 dx \ge \left(\frac{\beta^{s_1}}{\omega}\right)^{m-2} \int_{B_{\bar{\rho}_n}} \left|[u(x,t) - k_n]_-\right|^m dx,$$

из неравенства (20), вводя новую переменную $z = (t - t_0)/\tilde{\theta}$ и обозначая

$$D_n = B_{\rho_n} \times (-\tau(R/\beta), 0), \qquad \overline{D}_n = B_{\bar{\rho}_n} \times (-\tau(R/\beta), 0),$$

получаем

$$\left\|[u(x,t) - k_n]_-\right\|_{V_m(\overline{D}_n, v)}^m \le C\frac{\beta^{mn}}{\rho^m}\frac{v(B_\rho)}{\operatorname{meas} B_\rho} \iint_{D_n} \left|[u(x,t) - k_n]_-\right|^m dx\,dt +$$

$$+ C\left[\frac{v(B_\rho)}{\operatorname{meas} B_\rho} \operatorname{meas} A_n\right]^{\frac{m(1+\kappa)}{q}} \left(\frac{\beta^{s_1}}{\omega}\right)^{m\left[\frac{1+\kappa}{q} - \frac{1}{m}\right]_+ (m-2)}, \tag{50}$$

где

$$\operatorname{meas} A_n = \int_{-\tau(R/\beta)}^{0} \operatorname{meas} A_n(z)\,dz.$$

Используя (50), аналогично доказательству леммы 1, мы можем повторить итеративный процесс и выбрать λ_1 таким, что если

$$\operatorname{meas}\left\{(x,z) \in D_1 : u(x,z) < \mu_- + \omega/\beta^{s_1}\right\} \le \lambda_1 \operatorname{meas} D_1, \tag{51}$$

то либо

$$R^{N\kappa_0/m} \geq \left(\frac{\omega}{\beta^{s_1+1}}\right)^{1+\left[\frac{1+\kappa}{q}-\frac{1}{m}\right]_+(m-2)},$$

либо $u(x,z) \geq \mu_- + \omega/\beta^{s_1+1}$ для всех $(x,t) \in B_{\rho/\beta} \times (-\tau(R/\beta), 0)$. Возвращаясь к переменной t и выбирая $\alpha_1 = \lambda_1$ в лемме 2, мы можем выбрать $s_1 = s_1(\lambda_1, s^*)$ так, чтобы неравенство (51) выполнялось. Это и доказывает лемму 3.

Замечание 7. В случае, когда неравенство (13) не выполнено, вместо (50) получаем оценку

$$\left\| [u(x,t)-k_n]_- \right\|^m_{V_m(\overline{D}_n, v)} \leq$$

$$\leq C\frac{\beta^{mn}}{\rho^m}\iint_{D_n} \left|[u(x,t)-k_n]_-\right|^m v(x)\,dx\,dt \; +$$

$$+ \; C[v(A_n)]^{m(1+\kappa)/q}\left(\frac{\beta^{s_1}}{\omega}\right)^{m\left[\frac{1+\kappa}{q}-\frac{1}{m}\right]_+(m-2)}. \tag{52}$$

Далее рассуждаем так же, как и при окончании доказательства леммы 3, используя замечания 5, 6.

Следующая теорема доказывается аналогично утверждению 3.1 из [5, с. 512].

Теорема 1. *Существует* $\alpha_0 \in (0,1)$ *и положительное число* s, *не зависящее от* ω, R, *такое, что если для некоторого цилиндра* $\overline{Q}{}_R^\eta$ *выполнено неравенство*

$$\operatorname{meas}\{(x,t) \in \overline{Q}{}_R^\eta : u(x,t) < \mu_- + \omega/\beta^{s_0}\} < \alpha_0 \operatorname{meas} \overline{Q}{}_R^\eta, \tag{53}$$

то справедлива одна из оценок

$$\omega \leq \beta^s R^{N\kappa_0\xi/m}, \quad \xi = \left[1+\left[\frac{1+\kappa}{q}-\frac{1}{m}\right]_+(m-2)\right]^{-1}, \tag{54}$$

$$\operatorname{ess\,osc}\{u(x,t) : (x,t) \in Q^\eta_{R/\beta^s}\} \leq \omega\left(1-1/\beta^s\right). \tag{55}$$

Далее будем предполагать, что условие леммы 1 не выполнено, т. е. для любого цилиндра $\overline{Q}{}_R^\eta$ имеем

$$\operatorname{meas}\{(x,t) \in \overline{Q}{}_R^\eta : u(x,t) < \mu_- + \omega/\beta^{s_0}\} > \alpha_0 \operatorname{meas} \overline{Q}{}_R^\eta. \tag{56}$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$\operatorname{meas}\{(x,t) \in \overline{Q}{}_R^\eta : u(x,t) > \mu_+ - \omega/\beta^{s_0}\} \leq (1-\alpha_0) \operatorname{meas} \overline{Q}{}_R^\eta. \tag{57}$$

Лемма 4. *Пусть* $\overline{Q}{}_R^\eta \subset Q_R^\theta$ *и неравенство* (57) *выполнено. Тогда существует* $t^* \in [\bar{t} - \eta\tau(R), \bar{t} - \alpha_0\eta\tau(R)/2]$, *такое, что*

$$\operatorname{meas} A_{\mu_+ - \omega/\beta^{s_0};\, R}(t^*) \leq \frac{2(1-\alpha_0)}{2-\alpha_0} \operatorname{meas} B_R.$$

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 4.1 из [5].

Как и ранее, предполагаем, что

$$H^{+} = \operatorname{ess\,sup}\{\, [\,u(x,t) - (\mu_{+} - \omega/\beta^{s_0})\,]_{+} : (x,t) \in Q_R^{\theta}\} \le \omega/\beta^{s_0}.$$

Лемма 5. *Пусть* $\overline{Q}_R^{\eta} \subset Q_R^{\theta}$ *и предположим, что* $H^{+} > \omega/\beta^{s_0+1}$. *Тогда существует положительное число* l, *не зависящее от* ω *и* R, *такое, что либо*

$$R^{\frac{N\kappa_0}{m}} \ge \left(\frac{\omega}{\beta^{s_0+l}}\right)^{1+\left[\frac{1+\kappa}{q}-\frac{1}{m}\right]_{+}(m-2)}, \tag{58}$$

либо

$$\operatorname{meas} A_{\mu_{+}-\omega/\beta^{s_0+l},\,R}(t) \le \left[1 - \left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2\right] \operatorname{meas} B_R \tag{59}$$

для всех $t \in [\,\bar t - \alpha_0 \eta \tau(R)/2, \bar t\,]$.

Будем применять неравенство (21) для цилиндров $Q_R^{*} = B_R \times [t^{*}, t\,]$, $Q_{R-\sigma R}^{*} = B_{R-\sigma R} \times [t^{*}, t]$, где t^{*} — число, определенное в лемме 4, σ — любое число из интервала $(0,1)$. Рассмотрим также $k = \omega/\beta^{s_0}$, $\nu = \omega/\beta^{s_0+l}$, срезающую функцию $\zeta(x)$ с носителем в B_R такую, что $\zeta(x) \equiv 1$ в $B_{R-\sigma R}$, $|\partial\zeta(x)/\partial x| \le 2(\sigma R)^{-1}$. Получаем неравенство

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{B_{R-\sigma R}} \psi^2\!\left(H_{+}, \left[u(x,t) - \left(\mu_{+} - \frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)\right]_{+}, \frac{\omega}{\beta^{s_0+l}}\right) dx \le \\
&\le \int\limits_{B_R} \psi^2\!\left(H_{+}, \left[u(x,t^{*}) - \left(\mu_{+} - \frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)\right]_{+}, \frac{\omega}{\beta^{s_0+l}}\right) dx \; + \\
&+ \frac{C}{\sigma^m \tau(R)} \int\limits_{t^{*}}^{\bar t} \int\limits_{B_R} \psi^2\!\left(H_{+}, \left[u(x,t) - \left(\mu_{+} - \frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)\right]_{+}, \frac{\omega}{\beta^{s_0+l}}\right) \times \\
&\times \left|\psi^{(1)}\!\left(H_{+}, \left[u(x,t) - \left(\mu_{+} - \frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)\right]_{+}, \frac{\omega}{\beta^{s_0+l}}\right)\right|^{2-m} dx\,dt \; + \\
&+ C\left(\frac{\beta^{s_0+l}}{\omega}\right)^{m} \ln\frac{H_{+}\beta^{s_0+m}}{\omega} \left[\frac{\nu(B_R)}{\operatorname{meas} B_R} \int\limits_{t^{*}}^{\bar t} \operatorname{meas} A^{+}_{\mu_{-}-\omega/\beta^{s_0},\,R}(t)\,dt\right]^{m(1+\kappa)/q}.
\end{aligned} \tag{60}$$

Отметим, что

$$\psi\!\left(H_{+}, \left[u(x,t) - \left(\mu_{+} - \frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)\right]_{+}, \frac{\omega}{\beta^{s_0+l}}\right) \le l \ln\beta,$$

$$\left|\psi^{(1)}\!\left(H_{+}, \left[u(x,t) - \left(\mu_{+} - \frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)\right]_{+}, \frac{\omega}{\beta^{s_0+l}}\right)\right|^{2-m} \le \left(\frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)^{m-2},$$

$$\ln\frac{H_{+}\beta^{s_0+l}}{\omega} \le l \ln\beta.$$

Оценим первый интеграл в правой части (60), используя лемму 4 и выражение $l^2 \ln^2\beta\,(2(1-\alpha_0)/(2-\alpha_0))\operatorname{meas} B_R$. Так как $\bar t - t^{*} \le \eta\tau(R) = \left(\beta^{s_0}/\omega\right)^{m-2}\tau(R)$, то второй интеграл в правой части (60) оценится через $(C/\sigma^m)\operatorname{meas} B_R$. Последний интеграл в правой части (60) не превышает

$$C l \operatorname{meas} B_R \left(\frac{\beta^{s_0+l}}{\omega}\right)^{m\left(1+\left[\frac{1+\kappa}{q}-\frac{1}{m}\right]_+(m-2)\right)} R^{N\kappa_0}.$$

Если (58) не выполнено, то это слагаемое оценится через $C l \operatorname{meas} B_R$. Окончательно получаем

$$\int\limits_{B_{R-\sigma R}} \psi^2\left(H_+, \left[u(x,t)-\left(\mu_+-\frac{\omega}{\beta^{s_0}}\right)\right]_+, \frac{\omega}{\beta^{s_0+l}}\right)dx \le$$

$$\le C l^2 \ln^2\beta \, \frac{2(1-\alpha_0)}{2\alpha_0-1} \operatorname{meas} B_R + \frac{C}{\sigma^m}\operatorname{meas} B_R. \tag{61}$$

Дальнейшее доказательство леммы 5 проводится аналогично [5].

Положим $s_2 = s_0 + l$; так как $s^* > s_0$, для всех $m \ge 2$ имеем

$$\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right)\beta^{s_0(m-2)} < \frac{2}{2+\alpha_0}\beta^{s^*(m-2)}.$$

Лемма 6. *Пусть* $H_+ > \omega/\beta^{s_0+1}$. *Тогда либо*

$$R^{\frac{N\kappa_0}{m}} \ge \left(\frac{\omega}{\beta^{s_2}}\right)^{1+\left[\frac{1+\kappa}{q}-\frac{1}{m}\right]_+(m-2)}, \tag{62}$$

либо

$$\operatorname{meas} A^+_{\mu_+-\omega/\beta^{s_0+l},\,R}(t) \le \left[1-\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2\right]\operatorname{meas} B_R \tag{63}$$

для всех $t \in [t_0 - \alpha_0\theta\tau(R)/3, t_0]$.

Лемма 6 доказывается так же, как и утверждение 4.3 в [5].

Рассмотрим цилиндр $Q_R^\theta(\alpha_0) = B_R \times (t_0 - \alpha_0\theta\tau(R)/3, t_0)$.

Лемма 7. *Предположим, что выполнено неравенство* (63), *тогда для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *существует число* s^*, *не зависящее от* ω *и* R, *такое, что либо*

$$R^{\frac{N\kappa_0}{m}} \ge \left(\frac{\omega}{\beta^{s^*}}\right)^{1+\left[\frac{1+\kappa}{q}-\frac{1}{m}\right]_+(m-2)}, \tag{64}$$

либо

$$\operatorname{meas}\{(x,t)\in Q_R^\theta(\alpha_0) : u(x,t) > \mu_+ - \omega/\beta^{s^*}\} \le \varepsilon \operatorname{meas} Q_R^\theta(\alpha_0). \tag{65}$$

Доказательство. Используя (21), получаем неравенство

$$\iint\limits_{Q_R^\theta(\alpha_0)} v(x)\left|\frac{\partial}{\partial x}\left[u(x,t)-\left(\mu_+-\frac{\omega}{\beta^n}\right)\right]_+\right|^m dx\,dt \le$$

$$\le \frac{C}{\tau(R)}\left\{\left(\frac{\omega}{\beta^n}\right)^m + \left(\frac{\omega}{\beta^n}\right)^2\left(\frac{\omega}{\beta^{s^*}}\right)^{(m-2)} + \theta^{m\left[\frac{1+\kappa}{q}-\frac{1}{m}\right]_+} R^{N\kappa_0}\right\}\operatorname{meas} Q_R^\theta(\alpha_0). \tag{66}$$

Далее будем использовать неравенство (16) для $l = \mu_+ - \omega/\beta^n$, $k = \mu_+ - \omega/\beta^{n-1}$. Заметим, что из леммы 6 при $t \in [t_0 - \alpha_0\theta\tau(R)/3, t_0]$, имеем

$$\operatorname{meas}\left\{ B_R \setminus A^+_{\mu_+ - \omega/R^n, R}(t) \right\} \geq (\alpha_0/2)^2 \operatorname{meas} B_R.$$

Поэтому имеем

$$\frac{\omega}{\beta^n} \operatorname{meas} A^+_{\mu_+ - \omega/R^n, R}(t) \leq CR \int\limits_{A^+_{K,R}(t) \setminus A^+_{l,R}(t)} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right| dx. \tag{67}$$

Используя неравенство Гельдера, оцениваем правую часть (67) через

$$R\left[\int\limits_{B_R} v(x) \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|^m dx \right]^{1/m} \left[\int\limits_{A^+_{k,R}(t) \setminus A^+_{l,R}(t)} v^{-1/(m-1)}(x)\, dx \right]^{(m-1)/m}. \tag{68}$$

Интегрируя (67) по $t \in [t_0 - \alpha_0\theta\tau(R)/3, t_0]$, используя (68) и равенства

$$\operatorname{meas} A_n^+ = \int\limits_{t_0 - \alpha_0\theta\tau(R)/3}^{t_0} \operatorname{meas} A^+_{\mu_+ - \omega/\beta^n, R}(t)\, dt,$$

$$\tilde{v}\left(A_n^+\right) = \int\limits_{t_0 - \alpha_0\theta\tau(R)/3}^{t_0} \int\limits_{A^+_{\mu_+ - \omega/\beta^n, R}(t)} v^{-1/(m-1)}(x)\, dx\, dt,$$

из (67) получаем

$$\frac{\omega}{\beta^n} \operatorname{meas} A_n^+ \leq CR\left[\tilde{v}\left(A^+_{n-1}\right) - \tilde{v}\left(A_n^+\right) \right]^{(m-1)/m} \times$$

$$\times \left[\iint\limits_{Q_R^\theta(\alpha_0)} v(x) \left| \frac{\partial}{\partial x}\left[u(x,t) - \left(\mu_+ - \frac{\omega}{\beta^{n-1}} \right) \right]_+ \right|^m dx\, dt \right]^{1/m}. \tag{69}$$

Возведем левую и правую часть неравенства (69) в степень $m/(m-1)$. Используя неравенство (66), из (69) имеем

$$\left[\operatorname{meas} A_n^+ \right]^{m/(m-1)} \leq$$

$$C\left[\frac{v(B_R)}{\operatorname{meas} B_R} \right]^{1/(m-1)} \left\{ 1 + \beta^{(m-2)(n-s^*)} + \right.$$

$$\left. + R^{N\kappa_0} \left(\frac{\beta^{s^*}}{\omega} \right)^{m\left[1 + \left[\frac{1+\kappa}{q} - \frac{1}{m} \right]_+ (m-2)\right]} \right\}^{\frac{1}{m-1}} \times$$

$$\times \left[\operatorname{meas} Q_R^\theta(\alpha_0) \right]^{1/(m-1)} \left[\tilde{v}\left(A^+_{n-1}\right) - \tilde{v}\left(A_n^+\right) \right]. \tag{70}$$

Предположив, что неравенство (64) не выполнено, просуммируем неравенство (70) по n от $s_2 + 1$ до s^* и получим

$$(s^* - s_2 - 1)\left[\operatorname{meas} A^+_{s^*} \right]^{m/(m-1)} \leq$$

$$\leq C\left[\frac{v(B_R)}{\operatorname{meas} B_R}\right]^{1/(m-1)}\left[\operatorname{meas} Q_R^{\theta}(\alpha_0)\right]^{1/(m-1)}\times$$

$$\times \int\limits_{t_0-\alpha_0\theta\tau(R)/3}^{t_0} dt \int\limits_{B_R} v^{-1/(m-1)}(x)\,dx. \tag{71}$$

Далее, используя определение класса A_p, получаем оценку

$$\left[\frac{v(B_R)}{\operatorname{meas} B_R}\right]^{1/(m-1)} \int\limits_{B_R} v^{-1/(m-1)}(x)\,dx \leq C \operatorname{meas} B_R. \tag{72}$$

Из неравенства (71), (72) имеем

$$(s^*-s_2-1)\left[\operatorname{meas} A_{s^*}^+\right]^{m/(m-1)} \leq C\left[\operatorname{meas} Q_R^{\theta}(\alpha_0)\right]^{m/(m-1)}.$$

Выбрав s^* настолько большим, чтобы

$$\frac{C}{(s^*-s_2-1)^{(m-1)/m}} \leq \varepsilon, \tag{73}$$

получим требуемое утверждение.

Замечание 8. Леммы 5–7 в случае, когда неравенство (13) не выполнено, доказываются аналогичным образом.

Лемма 8. *Пусть условия леммы* 6 *выполнены. Тогда* s^* *может быть выбрано таким образом, что либо*

$$R^{\frac{N\kappa_0}{m}} \geq \left(\frac{\omega}{\beta^{s^*+1}}\right)^{1+\left[\frac{1+\kappa}{q}-\frac{1}{m}\right]_+(m-2)}, \tag{74}$$

либо

$$u(x,t) \leq \mu_+ - \omega/\beta^{s_0+1} \quad \textit{для всех} \quad (x,t)\in Q_{R/\beta}^{\theta}(\alpha_0). \tag{75}$$

Лемма 8 доказывается аналогично лемме 4.5 из [5] с использованием итеративного процесса леммы 1 данной работы.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Существует положительное число* s^*, *не зависящее от* ω *и* R, *такое, что если неравенство* (57) *выполнено для любого цилиндра* $\overline{Q_R^{\eta}} \subset Q_R^{\theta}$, $\theta = \left(\beta^{s^*}/\omega\right)^{m-2}$, *то либо*

$$\omega < \beta^{s^*+1} R^{N\kappa_0\xi/m}, \quad \xi = 1 + \left[\frac{1+\kappa}{q}-\frac{1}{m}\right]_+(m-2), \tag{76}$$

либо

$$\operatorname{ess\,osc}\{u(x,t):\ (x,t)\in Q_{R/\beta}^{\theta}(\alpha_0)\} \leq \omega\left(1-\frac{1}{\beta^{s^*+1}}\right), \tag{77}$$

где κ_0 *определено равенством* (24), α_0 — *число из теоремы* 1 *и*

$$Q_{R/\beta}^{\theta}(\alpha_0) = B_{R/\beta}\times\left(t_0-\frac{\alpha_0}{3}\theta\tau\left(\frac{R}{\beta}\right), t_0\right).$$

Из теорем 1, 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Любая функция* $u(x,t) \in B_m(\Omega_T, M, \gamma, q, \delta, \kappa, v)$ *при* $v(x) \in \in A_{1+m/N}$ *принадлежит* $C_{\text{loc}}^{\alpha, \alpha/m}(\Omega_T)$.

4. Внутренняя гельдеровость решений квазилинейных параболических уравнений. Используя отмеченную в п. 2 принадлежность решений уравнения (1) классу $B_m(\Omega_T, M, \gamma, q, \delta, \kappa, v)$ и теорему 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнены неравенства* (2)–(4) *с функциями* $\varphi_i(x,t)$, *удовлетворяющими условию*

$$\left\{\varphi_0(x,t) + \left[\varphi_1(x,t)[v(x)]^{-1/m}\right]^{m/(m-1)} + \varphi_2(x,t)\right\}[v(x)]^{-(q_0-1)/q_0} \in L_{q_0}(\Omega_T)$$

с q_0, *определяемым равенством* (15), *пусть* $v(x) \in A_{1+m/N}$. *Тогда каждое ограниченное решение уравнения* (1) *принадлежит* $C_{\text{loc}}^{\alpha, \alpha/m}(\Omega_T)$.

Сформулируем теперь утверждения, которые, как легко видеть, следуют из [7] с использованием лемм 1, 4–6 данной работы.

Теорема 5. *Пусть* $v(x) \in A_{1+2/N}$, $u(x,t)$ — *неотрицательное решение уравнения* (5). *Тогда* $u(x,t) \in C_{\text{loc}}^{\alpha, \alpha/2}(\Omega_T)$.

Теорема 6. *Пусть* $u(x,t)$ — *решение уравнения* (1) *при*

$$a_0(x,t,u,p) = 0, \quad a_i(x,t,u,p) = v(x)|p|^{m-2}p_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Предположим, что

$$v(x) \in A_2, \qquad \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \in L_{1,\text{loc}}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N,$$

и определим функцию

$$v_1(x) = \left|\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right|^2 v^{-1}(x); \quad v_1(x) \in D_\infty$$

и для $v_1(x)$, $v(x)$ *выполнено неравенство* (8) *при* $m = 2$, $q > 2$. *Тогда* $\partial u(x,t)/\partial x \in C_{\text{loc}}^{\alpha, \alpha/2}(\Omega_T)$.

1. *Chanillo S., Wheeden R. L.* Weighted Poincare and Sobolev inequalities and estimates for weighted Peano maximal functions // Amer. J. Math. – 1985. – **107**. – P. 1191–1226.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
3. *Chiarenza F., Serapioni R.* A Harnack inequality for degenerate parabolic equations // Comm. Partial Different Equat. – 1984. – **9**. – P. 719–749.
4. *Gutierrez C. E., Wheeden R. L.* Harnack's inequality for degenerate parabolic equations // Comm. Partial Different Equat. – 1991. – **16** (4&5). – P. 745–770.
5. *Di Benedetto E.* On the local behaviour of solutions of degenerate parabolic equations with measurable coefficients // Ann. Sc. Norm. Sup. – 1986. – **13**, № 3. – P. 485–535.
6. *Di Benedetto E., Chen Ya-Zhe.* On the local behaviour of solutions of singular parabolic equations // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1988. – **103**, № 4. – 319–346.
7. *Di Benedetto E., Friedman A.* Hölder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems // J. Reine Math. – 1985. – **357**. – P. 1–22.
8. *Leonardi S., Skrypnik I. I.* Necessary condition for regularity of a boundary point for a degenerate quasilinear parabolic equations. – Catania, 1995. – (Catania Univ. / Preprint). – 27 p.

Получено 10.04.95