УДК 517.956

А. Ф. Тедеев (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ПРИ $t \to \infty$ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

We establish exact upper and lower bounds as $t \to \infty$ for the norm $\| u(\cdot, t)\|_{L_\infty(\Omega)}$ of a solution of the Neumann problem for a second-order quasilinear parabolic equation in the region $D = \Omega \times \{t > 0\}$, where Ω is a region with noncompact boundary.

Одержані точні оцінки зверху та знизу при $t \to \infty$ норми $\| u(\cdot, t)\|_{L_\infty(\Omega)}$ розв'язку задачі Неймана для квазілінійного параболічного рівняння другого порядку, яка розглядається в області $D = \Omega \times \{t > 0\}$, де Ω — область з некомпактною межею.

1. Введение. Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, — неограниченная область с достаточно гладкой некомпактной границей.

Рассмотрим в области $D = \Omega \times \{t > 0\}$ начально-краевую задачу Неймана

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla u|^{m-1} u_{x_i}), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\nabla u|^{m-1} u_{x_i} \nu_i |_{\partial\Omega \times \{t>0\}} = 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

где ν_i — косинусы внешней к $\partial\Omega$ единичной нормами, $m > (n-1)/(n+1)$, $|\nabla u| = (u_{x_1}^2 + \ldots + u_{x_n}^2)^{1/2}$, $u_{x_i} \equiv \partial u / \partial x_i$, $u_t = \partial u / \partial t$.

Настоящая работа является продолжением [1], где изучался случай $m > 1$. В случае, когда $m = 1$ задача (1)–(3) рассмотрена в работах [2, 3] (см. также библиографию в [3]). Для задачи Коши $(\Omega = R^n)$ (1), (3) при $(n-1)/(n+1) < m < 1$ локальные оценки в классе растущих начальных данных, а также другие качественные свойства решений получены в [4]. Обзор результатов по качественным свойствам вырождающихся параболических уравнений можно найти в [5].

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Аналогично [2] введем следующий класс областей.

Рассмотрим функцию объема $v > 0$, $l(v) = \inf \operatorname{mes}_{n-1}(\partial Q \cap \Omega)$, где Q — произвольное открытое множество Ω, а точная нижняя грань берется по всем Q, для которых $\operatorname{mes}_n Q = v$. Пусть $g(v)$, $v > 0$, — неотрицательная непрерывная функция, имеющая свойство: для всех $v > 0$, $v^{(n-1)/n} / g(v)$ монотонно не убывает.. Будем говорить, что $\Omega \in \mathcal{B}_1(g)$, если $l(v) \geq g(v)$ для всех $v > 0$. Обозначим

$$G_{p,q}(z) = \frac{z^{p/q+p-1}}{(g(z))^p}, \quad E_\lambda \equiv \int_\Omega |u(x)|^\lambda dx, \quad J_p \equiv \int_\Omega |\nabla u|^p dx.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\Omega \in \mathcal{B}_1(g)$ *и* $u \in W_p^1(\Omega) \cap L_\beta(\Omega)$, *где* $0 < \beta \leq 1$, $1 < p < n$, $1 < q \leq np/(n-p)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$J_p \geq c \frac{E_q^{p/q}}{G_{p,q}(cE_\beta^{q/(q-\beta)}/E_q^{\beta/(q-\beta)})}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $\mu(\tau) = \operatorname{mes}_n\{|u| > \tau\}$, $u^*(s)$ — невозрастающая перестановка $u(x)$: $u^*(s) = \inf\{\tau: \mu(\tau) < s\}$.

Ограничимся случаем $q > p$. Случай $q \leq p$ доказывается без использования пространств Лоренца.

Обозначим через $|||u|||_\Omega^{q,p}$ пространство Лоренца, для которого конечна величина

$$|||u|||_\Omega^{q,p} = \left(\frac{p}{q}\int_0^\infty (u^*(s))^p s^{p/q-1}\,ds\right)^{1/p}.$$

Известно [6, с. 217], что

$$E_q = (|||u|||_\Omega^{q,q})^q \leq (|||u|||_\Omega^{q,p})^q, \quad p \leq q. \tag{5}$$

Ограничимся рассмотрением случая $p \geq 2$. Имеем

$$\int_0^\infty (u^*(\tau))^p \tau^{p/q-1}\,d\tau = \int_0^{\mu(k)} (u^* - k + k)^p \tau^{p/q-1}\,d\tau + \int_{\mu(k)}^\infty (u^*(\tau))^p \tau^{p/q-1}\,d\tau \leq$$

$$\leq 2^{p-1}\int_0^{\mu(k)} (u^* - k)^p \tau^{p/q-1}\,d\tau + 2^{p-1}k^p(\mu(k))^{p/q} + (\mu(k))^{p/q-1}k^{p-1}\int_{\mu(k)}^\infty u^*\,d\tau \leq$$

$$\leq 2^{p-1}\int_0^{\mu(k)} (u^* - k)^p \tau^{p/q-1}\,d\tau + 2^{p-1}k^{p-1}(\mu(k))^{p/q-1}E_1.$$

При выводе последнего неравенства мы использовали соотношения

$$k\mu(k) \leq \int_0^{\mu(k)} u^*(\tau)\,d\tau \leq E_1, \quad (|a| + |b|)^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p). \tag{6}$$

Следовательно, в силу (5)

$$E_q \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{q/p} 2^{p-1}\left(\int_0^{\mu(k)} (u^* - k)^p \tau^{p/q-1}\,d\tau + k^{p-1}(\mu(k))^{p/q-1}E_1\right)^{q/p}. \tag{7}$$

Поскольку

$$\frac{d}{d\tau}\left((u^* - k)^p \int_0^\tau s^{p/q-1}\,ds\right) = p(u^* - k)^{p-1}u_\tau^* \int_0^\tau s^{p/q-1}\,ds + (u^* - k)^p \tau^{p/q-1},$$

в силу неравенства Гельдера получаем

$$\int_0^{\mu(k)} (u^* - k)^p \tau^{p/q-1}\,d\tau = -q\int_0^{\mu(k)} (u^* - k)^{p-1}\tau^{p/q}u_\tau^*\,d\tau \leq$$

$$\leq q\left(\int_0^{\mu(k)} (u^* - k)^p \tau^{p/q-1}\,d\tau\right)^{(p-1)/p}\left(\int_0^{\mu(k)} (-u_\tau^*)^p \tau^{p/q+p-1}\,d\tau\right)^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\mu(k)} (u^* - k)^p \tau^{p/q-1}\, d\tau \le q^p \int_0^{\mu(k)} (-u_\tau^*)^p \tau^{p/q+p-1}\, d\tau. \tag{8}$$

В силу того, что функция $v^{p/q+p-1}/(q(v))^p$ монотонно не убывает при $q \le \le np/(n-p)$, $p < n$, выполняется соотношение

$$\int_0^{\mu(k)} (-u_\tau^*)^p \tau^{p/q+p-1} \left(\frac{g(\tau)}{g(\tau)}\right)^p d\tau \le G_{p,q}(\mu(k)) \int_0^{\mu(k)} (-u_\tau^*)^p q^p(\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

Справедливо следующее неравенство типа Полиа – Сеге [7]:

$$\int_0^{\infty} (-u_\tau^*)^p (g(\tau))^p\, d\tau \le \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx = J_p. \tag{10}$$

Таким образом, из неравенства (7) с учетом (6), (8)–(10) получаем

$$E_q \le c_1(p,q)\left(q^p G_{p,q}\left(\frac{1}{k}E_1\right)J_p + k^{((q-1)/q)p} E_1^{p/q}\right)^{q/p},$$
$$c_1(p,q) = \left(\frac{p}{q}\right)^{q/p} 2^{p-1}. \tag{11}$$

Минимизируя правую часть (11) по k, т. е. определяя k из условия

$$q^p G_{p,q}\left(\frac{1}{k}E_1\right)J_p = k^{((q-1)/q)p} E_1^{p/q},$$

из (11) находим

$$J_p \ge \gamma \frac{E_q^{p/q}}{G_{p,q}\left(c(E_1^q/E_q)^{1/(q-1)}\right)}. \tag{12}$$

Лемма доказана для $\beta = 1$. Пусть $0 < \beta < 1$, тогда по неравенству Гельдера

$$E_1 \le E_q^{(1-\beta)/(q-\beta)} E_\beta^{(q-1)/(q-\beta)},$$

и значит, из (12) имеем

$$J_p \ge \gamma \frac{E_q^{p/q}}{G_{p,q}\left(cE_\beta^{q/(q-\beta)}/E_q^{\beta/(q-\beta)}\right)}.$$

Лемма 1 доказана.

Введем понятие решения задачи (1)–(3) в D. Будем предполагать в дальнейшем, что $u_0(x) \ge 0$ п. в. в Ω, $u_0 \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Пусть $D_T = \Omega \times (0,T)$.

Неотрицательную функцию $u(x,t)$ из класса $L_1(D_T) \cap L_\infty(D_T) \cap \tilde{W}_T$, $u_t \in \in L_2(D_T)$, где $\tilde{W}_T = L_{m+1}(0,T;\, W_{m+1}^1(\Omega))$ будем называть решением задачи (1)–(3) в D_T, если для любой функции $\eta \in L_2(D_T) \cap L_{m+1}(0,T;\, W_{m+1}^1(\Omega))$ справедливо интегральное тождество

$$\int_0^T \int_\Omega \left(u_t\eta + |\nabla u|^{m-1}\nabla u \nabla\eta\right) dx\,dt = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{13}$$

Функция $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(3) в D, если для всех $T>0$ она является решением той же задачи в D_T. Существование и единственность не представляют особых затруднений и решаются положительно.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $u(x,t)$ — *решение задачи* (1)–(3), $(n-1)/(n+1)<m<1$, *в* D. *Тогда для произвольных* $t>0$

$$\int_\Omega u(x,t)\,dx \le \gamma \int_\Omega u_0(x)\,dx. \tag{14}$$

Доказательство. Воспользуемся схемой рассуждений работы [4]. Пусть $\Omega_R=\Omega\cap\{|x|<R\}$, $v(R)=\operatorname{mes}_n\Omega_R$. Покажем прежде всего, что для всех t, r, ε: $0<t\le T$, $0<r<R$, $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\int_0^t\int_{\Omega_r}(t-\tau)^{1/(m+1)}|\nabla u|^{m+1}(u+\varepsilon)^{-2/(m+1)}\,dx\,d\tau \le$$

$$\le c\left(1+\frac{t}{\varepsilon^{1-m}(R-r)^{m+1}}\right)\int_0^t\int_{\Omega_R}(t-\tau)^{1/(m+1)-1}(u+\varepsilon)^{2m/(m+1)}\,dx\,d\tau. \tag{15}$$

Действительно, положим в интегральном тождестве (13)

$$T=t,\quad \eta=(t-\tau)^{1/(m+1)}(u+\varepsilon)^{1-2/(m+1)}\zeta^{m+1}(x),$$

где неотрицательная гладкая срезающая функция $\zeta(x)=1$ при $x\in\Omega_r$, $\zeta=0$, $x\in\Omega\setminus\Omega_R$, $|\nabla\zeta|\le c/(R-r)$ для произвольных $\varepsilon>0$. Имеем

$$\int_0^t\int_{\Omega_R}(t-\tau)^{1/(m+1)}\frac{\partial}{\partial\tau}(u+\varepsilon)(u+\varepsilon)^{1-2/(m+1)}\zeta^{m+1}\,dx\,d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{2m}\int_0^t\int_{\Omega_R}(t-\tau)^{1/(m+1)-1}(u+\varepsilon)^{2m/(m+1)}\zeta^{m+1}\,dx\,d\tau \equiv \frac{1}{2m}I_1; \tag{16}$$

$$\int_0^t\int_{\Omega_R}(t-\tau)^{1/(m+1)}|\nabla u|^m\nabla u\,\nabla\big((u+\varepsilon)^{1-2/(m+1)}\zeta^{m+1}\big)\,dx\,d\tau \le$$

$$\le \frac{m-1}{m+1}\int_0^t\int_{\Omega_R}(t-\tau)^{1/(m+1)}|\nabla u|^{m+1}(u+\varepsilon)^{-2/(m+1)}\zeta^{m+1}\,dx\,d\tau+$$

$$+(m+1)\int_0^t\int_{\Omega_R}(t-\tau)^{1/(m+1)}|\nabla u|^m\zeta^m(u+\varepsilon)^{1-2/(m+1)}|\nabla\zeta|\,dx\,d\tau \le$$

$$\le \frac{m-1}{2(m+1)}\int_0^t\int_{\Omega_R}(t-\tau)^{1/(m+1)}|\nabla u|^{m+1}(u+\varepsilon)^{-2/(m+1)}\zeta^{m+1}\,dx\,d\tau+$$

$$+\left(\frac{2(m+1)}{1-m}\right)^m(m+1)^{m+1}\int_0^t\int_{\Omega_R}(t-\tau)^{1/(m+1)}\times$$

$$\times(u+\varepsilon)^{m+1-2/(m+1)}|\nabla\zeta|^{m+1}\,dx\,d\tau. \tag{17}$$

При выводе (17) использовалось неравенство Юнга

$$|ab| \le \delta^{p/(p-1)} \frac{(p-1)}{p} |b|^{p/(p-1)} + \frac{\delta^{-p}}{p} |a|^p \tag{18}$$

при $\delta = [(1-m)/2m]^{m/(m+1)}$, $p = m+1$.

Последнее слагаемое в (17) оценим через

$$c \frac{t}{\varepsilon^{1-m}(R-r)^{m+1}} \int_0^t \int_{\Omega_R} (t-\tau)^{1/(m+1)-1} (u+\varepsilon)^{2m/(m+1)} dx d\tau.$$

Таким образом, объединяя (16) и (17), получаем

$$I_2 \equiv \int_0^t \int_{\Omega_R} (t-\tau)^{1/(m+1)} |\nabla u|^{m+1} \zeta^{m+1} (u+\varepsilon)^{-2/(m+1)} dx d\tau \le$$

$$\le c\left(1 + \frac{t}{\varepsilon^{1-m}(R-r)^{m+1}}\right) \int_0^t \int_{\Omega_R} (t-\tau)^{1/(m+1)-1} (u+\varepsilon)^{2m/(m+1)} dx d\tau.$$

Неравенство (15) доказано. В силу неравенства Гельдера

$$\int_0^t \int_{\Omega_R} |\nabla u|^m \zeta^m dx d\tau \le I_1^{1/(m+1)} I_2^{m/(m+1)}.$$

Следовательно,

$$\int_0^t \int_{\Omega_r} |\nabla u|^m dx d\tau \le$$

$$\le c\left(1 + \frac{t}{\varepsilon^{1-m}(R-r)^{m+1}}\right) \int_0^t \int_{\Omega_R} (t-\tau)^{1/(m+1)-1} (u+\varepsilon)^{2m/(m+1)} dx d\tau. \tag{19}$$

Рассмотрим последовательности

$$R_j = R \sum_{i=0}^{j} 2^{-i}, \qquad \overline{R}_j = \frac{R_j + R_{j+1}}{2}, \qquad Q_j \equiv \Omega_{R_j} \times (0, t),$$

$j = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть $\zeta_j(x)$ — гладкая срезающая функция, равная 1 в Ω_{R_j} и $\zeta_j(x) = 0$; $|x| > \overline{R}_j$, $|\nabla \zeta_j| \le 2^{j+2}/R$. Положим в интегральном тождестве (13) $\eta = \zeta_j(x)$. Имеем

$$\sup_{0 \le \tau \le t} \int_{\Omega_{R_j}} u(x, \tau) dx \le \int_{\Omega_{2R}} u_0 dx + \frac{2^{j+4}}{R} \int_0^t \int_{\Omega_{\overline{R}_j}} |\nabla u|^m dx d\tau. \tag{20}$$

Пусть

$$I_j = \sup_{0 < \tau < t} \int_{\Omega_{R_j}} u(x, \tau) dx.$$

Положим в оценке (19) $r = \overline{R}_j$, $R = R_{j+1}$ и $\varepsilon = (t/R^{m+1})^{1/(1-m)}$. С учетом (20) отсюда получаем

$$I_j \le \int_{\Omega_{2R}} u_0 dx + c \frac{2^{j(m+1)}}{R} \left\{ \int_0^t \int_{\Omega_{R_{j+1}}} (t-\tau)^{1/(m+1)-1} \left(\frac{t}{R^{m+1}}\right)^{2m/(m+1)(1-m)} dx d\tau + \right.$$

$$+ \int_0^t \int_{\Omega_{R_{j+1}}} (t-\tau)^{1/(m+1)-1} u^{2m/(m+1)}\, dx\, d\tau \Big\} \le$$

$$\le \int_{\Omega_{2R}} u_0\, dx + c 2^{j(m+1)} \Big\{ v(2R) \left(\frac{t}{R^{m+1}}\right)^{1/(1-m)} +$$

$$+ v(2R)^{(1-m)(1+m)} R^{-1} t^{1/(m+1)} I_{j+1}^{2m/(m+1)} \Big\}.$$

Применяя неравенство Юнга (18) с $p = (m+1)/(1-m)$ и достаточно малом $\delta < \delta_0$, получаем

$$I_j \le \delta I_{j+1} + c(n, m, \delta_0) 2^{(m+1)^2 j/(1-m)} \left[\int_{\Omega_{2R}} u_0\, dx + v(2R) \left(\frac{t}{R^{m+1}}\right)^{1/(1-m)} \right]. \quad (21)$$

Пользуясь итеративной техникой [4], из (21) имеем следующую оценку:

$$\sup_{0 \le \tau \le t} \int_{\Omega_R} u(x, \tau)\, dx \le \gamma \left(\int_{\Omega_{2R}} u_0\, dx + v(2R) \left(\frac{t}{R^{m+1}}\right)^{1/(1-m)} \right). \quad (22)$$

С учетом того, что $v(2R) \le \omega_n (2R)^n$, из (22) при $R \to \infty$ получаем искомую оценку (14). Лемма 2 доказана.

Следствие. В условиях леммы 2 для произвольных $t > 0$ и $R > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{R} \int_0^t \int_{\Omega_R} |\nabla u|^m\, dx\, d\tau \le$$

$$\le c \left(\frac{t}{R^{m+1}} v(2R)^{1-m} \right)^{1/(m+1)} \left\{ \int_{\Omega_{2R}} u_0\, dx + v(2R) \left(\frac{t}{R^{m+1}}\right)^{1/(1-m)} \right\}^{2m/(m+1)}. \quad (23)$$

Оценка (23) следует из комбинации оценок (19) и (22).

3. Равномерные оценки сверху. Обозначим $I(v) = v^{2m} / (g(v))^{m+1}$, $I^{-1}(t)$ — обратная к $I(v)$ функция. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \in \mathcal{B}_1(g)$ и $u(x, t)$ — решение задачи* (1)–(3) *в D. Тогда для всех $t > 0$ справедлива следующая оценка*:

$$\| u(\cdot, t) \|_{\infty, \Omega} \le C \frac{\| u_0 \|_{1, \Omega}}{I^{-1}\left(\gamma t \| u_0 \|_{1, \Omega}^{m-1}\right)}, \quad (24)$$

где

$$\| u(\cdot, t) \|_{\infty, \Omega} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} u(x, t), \qquad \| u_0 \|_{1, \Omega} = \| u_0 \|_{L_1(\Omega)}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для произвольных $p \ge 1$, $t > 0$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u^{p+1}(x, t)\, dx = -c(p, m) \int_\Omega | \nabla u^{(p+m)/(m+1)} |^{m+1}\, dx, \quad (25)$$

где

$$c(p, m) = \frac{p(p+1)(m+1)^{m+1}}{(p+m)^{m+1}}.$$

Равенство (25) следует из интегрального тождества (13), если в нем положить $\eta = u^p(x, t)$, $T = t$.

Обозначим

$$E_q(t) = \int_\Omega (u(x, t))^q \, dx.$$

Пусть $u^{(p+m)/(m+1)} = v$, т. е. $u = v^{(m+1)/(p+m)}$, $u^{p+1} = v^{(p+1)(m+1)/(p+m)}$. Тогда, применяя лемму 1 при

$$p = m+1, \quad q = (p+1)(m+1)/(p+m), \quad \beta = (m+1)/(p+m)$$

с учетом леммы 2, из (25) получаем

$$\frac{d}{dt} E_{p+1}(t) \le -c \frac{(E_{p+1}(t))^{(p+m)/(p+1)}}{G\left(c(E_1(0))^{(p+1)/p} / (E_{p+1}(t))^{1/p}\right)}, \tag{26}$$

где

$$G(s) = \left[\frac{s}{g(s)}\right]^{m+1} s^{(m-1)/(p+1)}, \qquad E_1(0) = \| u_0 \|_{1,\Omega}.$$

Неравенство (26) легко интегрируется и мы в итоге имеем

$$\int_0^w \frac{s^{2m-1}}{(g(s))^{m+1}} \ge c(p, m) \| u_0 \|_{1,\Omega}^{m-1} t, \tag{27}$$

где

$$w(t) = \frac{c \| u_0 \|_{1,\Omega}^{(p+1)/p}}{(E_{p+1}(t))^{1/p}}.$$

Учитывая, что функция $v^{(n-1)/n} g(v)$ монотонно не убывает, получаем оценку

$$\int_0^w \frac{s^{2m-1}}{g^{m+1}(s)} ds \le \left(\frac{n}{n(m-1)+m+1}\right) \frac{w^{2m-1}}{(g(w))^{m+1}}.$$

Следовательно, из (27) находим

$$w(t) \ge c I^{-1}\left(c(p, m) \| u_0 \|_{1,\Omega}^{m-1} t\right)$$

или

$$E_{p+1}^{1/(p+1)}(t) \le c \| u_0 \|_{1,\Omega} \left\{ I^{-1}\left(c(p, m) \| u_0 \|_{1,\Omega}^{m-1} t\right)\right\}^{-p/(p+1)}. \tag{28}$$

На самом деле оценка (28) справедлива и для $p = \infty$. Этот факт доказывается точно так же, как и в работе [1]. Мы на этом останавливаться не будем. Теорема 1 доказана.

4. Оценки снизу. Обозначим $\varphi(R) = (v(R))^{m-1} R^{m+1}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $u(x, t)$ — *решение задачи* (1)–(3) *в* D, $m < 1$ *и* $\varphi(R)$ *для всех* $R > 0$ — *монотонно возрастающая неограниченная функция. Тогда существует* $t_0 > 0$ *такая, что для* $t > t_0$ *справедлива следующая оценка:*

$$\| u(\cdot, t) \|_{\infty, \Omega} \geq \frac{\gamma \| u_0 \|_{1,\Omega}}{\upsilon\left(R(\gamma t \| u_0 \|_{1,\Omega}^{m-1})\right)}, \tag{29}$$

где $R(t)$ — *обратная к* $\varphi(R)$ *функция.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай

$$\operatorname{supp} u_0 \subset K_{R_0}, \qquad K_{R_0} = \{ |x| < R_0 \}.$$

Покажем прежде всего, что для всех $t > 0$

$$\| u(\cdot, t) \|_{1,\Omega} = \| u_0 \|_{1,\Omega}. \tag{30}$$

Точно так же, как неравенства (22) и (23), доказываются следующие оценки. Для любых $R > 2R_0$ и $t > 0$

$$\int\limits_{\Omega \setminus \Omega_R} u(x, t)\, dx \leq \gamma \left(\frac{t}{R^{m+1} \upsilon^{m-1}(R)} \right)^{1/(1-m)}, \tag{31}$$

$$\frac{1}{R} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_R} |\nabla u|^m \, dx\, d\tau \leq \gamma \left(\frac{t}{(\upsilon(R))^{m-1} R^{m+1}} \right)^{(2m+1)(1-m)/(m+1)}. \tag{32}$$

Возьмем теперь в интегральном тождестве (13) $\eta = \zeta_R(x)$, где $\zeta_R(x)$ — срезающая функция вида:

$$\zeta_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq R - 1, \\ R - |x|, & R - 1 < |x| < R, \\ 0, & |x| \geq R. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_{\Omega} u(x, t) \zeta_R \, dx = \int\limits_{\Omega} u_0 \zeta_R \, dx - \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{m-1} \nabla u \nabla \zeta_R \, dx\, d\tau.$$

Полагая в этом равенстве $R \to \infty$ и пользуясь оценкой (32), получаем (30). Из равенства (30) и оценки (31) имеем

$$\| u_0 \|_{1,\Omega} = \| u(\cdot, t) \|_{1,\Omega} = \| u(\cdot, t) \|_{1,\Omega_R} + \| u(\cdot, t) \|_{1,\Omega \setminus \Omega_R} \leq$$

$$\leq \| u(\cdot, t) \|_{\infty,\Omega} \upsilon(R) + \gamma \left(\frac{t}{\upsilon(R)^{m-1} R^{m+1}} \right)^{1/(1-m)}.$$

Находя теперь R из условия

$$\gamma \left(\frac{t}{[\upsilon(R)]^{m-1} R^{m+1}} \right)^{1/(1-m)} = \frac{1}{2} \| u_0 \|_{1,\Omega},$$

получаем требуемую оценку (29) при $R(t) \geq 2R_0$, $t \geq t_0$. Теорема 2 доказана.

Докажем теперь оценку снизу решения задачи (1)–(3) в D в случае $m > 1$. Другим способом и для более узкого класса областей такая оценка получена в [1]. Далее потребуется следующее утверждение.

Лемма 3 [8]. *Пусть* $u(x, t)$ — *решение задачи* (1)–(3) *в* D, $m > 1$, $\Omega \in \mathcal{B}_1(g)$, $\operatorname{supp} u_0 \subset K_{R_0}$, $\| u_0 \|_{1,\Omega} = 1$. *Тогда для всех* $t > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mu(x) = \int_\Omega |x| u(x,t)\,dx \le 2 \int_\Omega |x| u_0\,dx +$$

$$+ ct^{1/(m+1)} (\tilde{M}(t))^{(m-1)/(m+1)} \ln^+ \left[\frac{ct^{1/(m+1)} \tilde{M}^{(m-1)/(m+1)}(t)}{\nu^{-1}(c/\tilde{M}(t))} \right], \tag{33}$$

где $\tilde{M}(t)$ *для всех* $t > 0$ — *произвольная функция, оценивающая* $\| u(\cdot,t) \|_{\infty,\Omega}$ *и удовлетворяющая условиям:* $\tilde{M}(t)$ *абсолютно непрерывна на* $(0,\infty)$ *и существует* κ_0: $0 < \kappa_0 \le 1/(m-1)$ *такое, что для всех* $t > 0$

$$0 \le -\frac{d\tilde{M}(t)}{dt} \le \kappa_0 \frac{\tilde{M}(t)}{t}.$$

Будем говорить, что $\Omega \in \mathcal{B}_2(g)$, если $\Omega \in \mathcal{B}_1(g)$ и для произвольных $s > 0$

$$\nu^{-1}(s) \ge c\frac{s}{g(s)}. \tag{34}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $u(x,t)$ — *решение задачи* (1)–(3) *в* D, $m > 1$, $\Omega \in \mathcal{B}_2(g)$. *Тогда для достаточно больших* $t > 0$ *справедлива следующая оценка:*

$$\| u(\cdot,t) \|_{\infty,\Omega} \ge \frac{c\| u_0 \|_{1,\Omega}}{w(ct\| u_0 \|_{1,\Omega}^{m-1})}, \tag{35}$$

где $w(s)$ — *обратная к* $[\nu^{-1}(s)]^{m+1} s^{m-1}$ *функция.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\operatorname{supp} u_0 \subset K_{R_0}$. Пусть сначала $\| u_0 \|_{1,\Omega} = 1$. Тогда имеем [1]

$$1 = \| u_0 \|_{1,\Omega} = \| \tilde{u}(\cdot,t) \|_{1,\Omega} \le \| \tilde{u}(\cdot,t) \|_{\infty,\Omega} \nu(R) + \frac{1}{R}\tilde{\mu}(t) \quad \forall R > 0,$$

$$\tilde{\mu}(t) = \int_\Omega |x| \tilde{u}(x,t)\,dx, \tag{36}$$

где $\tilde{u}(x,t)$ — решение задачи (1)–(3) с $\| u_0 \|_{1,\Omega} = 1$.

Выберем в качестве оценивающей функции в лемме 3 $\tilde{M}(t) = c[w(t)]^{-1}$ (в силу [1] такой выбор возможен).

Тогда при достаточно больших $t > 0$ имеем

$$\tilde{\mu}(t) \le ct^{1/(m+1)} [w(ct)]^{-(m-1)/(m+1)} \ln^+ \left\{ \frac{ct^{1/(m+1)} [w(ct)]^{-(m-1)/(m+1)}}{\nu^{-1}(c[w(ct)]^{(m-1)/(m+1)})} \right\} =$$

$$= ct^{1/(m+1)} [w(ct)]^{-(m-1)/(m+1)}.$$

Следовательно, из (36) при достаточно больших $t > 0$ получаем

$$1 \le \| \tilde{u}(\cdot,t) \|_{1,\Omega} \le \| \tilde{u}(\cdot,t) \|_{\infty,\Omega} \nu(R) + cR^{-1} t^{1/(m+1)} (w(ct))^{-(m-1)/(m+1)}. \tag{37}$$

Выбирая R из условия

$$ct^{1/(m+1)} (w(ct))^{-(m-1)/(m+1)} R^{-1} = \frac{1}{2},$$

из (37) находим

$$\| \tilde{u}(\cdot, t)\|_{\infty,\Omega} \geq \frac{1}{2}\left[v\left(ct^{1/(m+1)}(w(ct))^{-(m-1)/(m+1)}\right)\right]^{-1} = \frac{c}{w(c,t)}. \qquad (38)$$

Пусть теперь $u_0(x)$ — произвольная неотрицательная функция из класса $L_1(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$: $\operatorname{supp} u_0 \subset K_{R_0}$.

Положим

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{\| u_0 \|_{1,\Omega}} u\left(x, \| u_0 \|_{1,\Omega}^{-(m-1)} t\right);$$

тогда $\tilde{u}$ удовлетворяет задаче (1)–(3) с $\tilde{u}_0 = u_0 / \| u_0 \|_{1,\Omega}$, значит, для нее выполняется неравенство (38). Обозначим $\| u_0 \|_{1,\Omega}^{-(m-1)} t = \tau$. Тогда из (38) получаем

$$\| u(\cdot, \tau)\|_{\infty,\Omega} \geq c\frac{\| u_0 \|_{1,\Omega}}{w\left(c\tau \| u_0 \|_{1,\Omega}^{m-1}\right)}.$$

Следовательно, теорема 3 доказана.

Работа частично поддержана Международным научным фондом, грант № 97000, а также Фондом фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий.

1. *Тедеев А. Ф.* Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 10. – С. 1795–1806.
2. *Гущин А. К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1973. – **126**. – С. 5–45.
3. *Гущин А. К.* О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Мат. сб. – 1982. – **119**, № 4. – С. 451–508.
4. *Di Benedetto E., Herrero M. A.* Nonnegative solutions of the evolution p-laplacian equation. Initial traces and Cauchy problem when $1 < p < 2$ // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1990. – **111**, № 3. – P. 225–290.
5. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**, № 2. – С. 135–176.
6. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 336 с.
7. *Тедеев А. Ф.* Качественные свойства решений задачи Неймана для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 11. – С. 1571–1579.
8. *Тедеев А. Ф.* Двусторонние оценки скорости стабилизации решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Докл. АН УССР. – 1991. – № 14. – С. 11–13.

Получено 10.04.95