УДК 517.938

С. Б. Боднарук, В. Л. Кулик (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД ПАРАМЕТРІВ ОБМЕЖЕНИХ ІНВАРІАНТНИХ МНОГОВИДІВ АВТОНОМНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ*

Continuity and continuous differentiability, with respect to a parameter, of bounded invariant manifolds of autonomous systems of differential equations are studied.

Досліджується питання неперервності та неперервної диференційовності за параметром обмежених інваріантних многовидів автономних систем диференціальних рівнянь.

1. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\psi, p), \quad \frac{dx}{dt} = A(\psi, p)x + f(\psi, p), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, параметр $p \in [0, 1]$, функція $\omega(\psi, p)$ неперервна відносно сукупності змінних (ψ, p) і $\omega(\psi, p) \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^m)$, тобто при довільному фіксованому $p \in [0, 1]$ в кожній фіксованій області $D \subset \mathbb{R}^m$ виконується

$$\|\omega(\psi, p) - \omega(\overline{\psi}, p)\| = L\,\|\psi - \overline{\psi}\|,$$

де L — константа, залежна від вибору D. Крім того, будемо вважати, що виконується така нерівність:

$$\|\omega(\psi, p)\| \le \alpha_1 \|\psi\| + \alpha_2 \quad \forall\, \psi \in \mathbb{R}^m, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0 \text{ — const.} \tag{2}$$

Позначимо через $C^0(\mathbb{R}^m \times [0, 1])$ простір функцій $F(\psi, p)$ (векторних чи матричних), неперервних відносно сукупності змінних (ψ, p) і таких, що

$$\|F(\psi, p)\| \le \sup_{\substack{\psi \in \mathbb{R}^m,\\ p \in [0,1]}} \|F(\psi, p)\| \equiv \|F\|_0 < \infty,$$

а через $C'(\mathbb{R}^m, \omega)$ простір, утворений тими функціями $F(\psi, p)$, для яких функція $F(\psi_t^p(\psi), p)$ неперервно диференційовна по t при всіх $t \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, фіксованих $p \in [0, 1]$. Тут $\psi_t^p(\psi)$ — розв'язок системи рівнянь $d\psi/dt = \omega(\psi, p)$ з початковою умовою $\psi_t^p(\psi)|_{t=0} = \psi$.

Нехай функції $A(\psi, p)$ та $f(\psi, p)$ належать $C^0(\mathbb{R}^m \times [0, 1])$. Припустимо, що при деяких $f(\psi, p)$ система (1) має обмежений інваріантний многовид $x = u(\psi, p)$, тобто $u(\psi, p) \in C'(\mathbb{R}^m, \omega)$ і для всіх $\psi \in \mathbb{R}^m$, фіксованих $p \in [0, 1]$ справедлива тотожність

$$\dot{u}(\psi, p) \equiv A(\psi, p)\,u(\psi, p) + f(\psi, p), \quad \dot{u} = \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}.$$

Виявляється, що, незважаючи на неперервну залежність правих частин системи (1) від параметра p, функція $u(\psi, p)$ не завжди неперервно залежить від параметра p. У цьому можна переконатися, розглянувши, наприклад, систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\psi}{dt} = 1, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1 - p^2\psi^2}{1 + p^2\psi^2}\,x + 1,$$

* Виконана при фінансовій підтримці Державного комітету України з питань науки і технологій.

$$p \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \psi \in \mathbb{R},$$

обмежений інваріантний многовид якої єдиний і має вигляд

$$x = u(\psi, p) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau + 2[\operatorname{arctg} p\psi - \operatorname{arctg} p(\tau+\psi)]/p} d\tau, & 0 < p \le 1; \\ -1, & p = 0. \end{cases}$$

Які додаткові умови на систему (1) треба накласти, щоб $u(\psi, p)$ неперервно залежала від p? Достатні умови вдалося отримати у вигляді такого твердження.

Теорема 1. *Нехай система* (1) *при кожному фіксованому значенні* $p \in [0, 1]$ *має обмежений інваріантний многовид*

$$x = u(\psi, p) \tag{3}$$

та існує симетрична n*-мірна матриця* $S_p(\psi) \in C'(\mathbb{R}^m, \omega)$ *така, що*

$$\langle [\dot{S}_p(\psi) + S_p(\psi) A(\psi, p) + A^*(\psi, p) S_p(\psi)] x, x \rangle \ge \|x\|^2 \tag{4}$$

$$\forall p \in [0, 1], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \psi \in \mathbb{R}^m;$$

при цьому

$$\sup_{\substack{\psi \in \mathbb{R}^m, \\ p \in [0, 1]}} \|S_p(\psi)\| = \|S\|_0 < \infty. \tag{5}$$

Тоді функція (3) *є неперервною по параметру* p.

Доведення. Розглянемо розширену систему диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered} \frac{d\psi}{dt} = \omega(\psi, p), \quad \frac{dx}{dt} = A(\psi, p)x + y + f(\psi, p), \\ \frac{dy}{dt} = -A^*(\psi, p) y, \end{gathered} \tag{6}$$

де $x, y \in \mathbb{R}^n$, $A^*(\psi, p)$ — транспонована матриця. Умови (4), (5) дають змогу стверджувати, що відповідна системі (6) однорідна система має єдину функцію Гріна $\overline{G}_0(\tau, \psi; p)$ з оцінкою

$$\|\overline{G}_0(\tau, \psi; p)\| = K e^{-\gamma|\tau|},$$

K і γ — додатні константи, незалежні від p, ψ та p. Тоді обмежений інваріантний многовид системи (6) має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\psi, p) \\ 0 \end{pmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_0(\tau, \psi; p) \begin{pmatrix} f(\psi_t^p(\psi), p) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau.$$

Скориставшись цією рівністю, для будь-яких p, $\overline{p} \in [0, 1]$ запишемо різницю

$$\begin{pmatrix} u(\psi, p) - u(\psi, \overline{p}) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\overline{G}_0(\tau, \psi; p) f(\psi_\tau^p(\psi), p) - \overline{G}_0(\tau, \psi; \overline{p}) f(\psi_\tau^{\overline{p}}(\psi), \overline{p}) \right] d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\overline{G}_0(\tau, \psi; p) - \overline{G}_0(\tau, \psi; \overline{p})] f(\psi_\tau^p(\psi), p) \, d\tau \; +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_0(\tau, \psi; \overline{p})\left[f(\psi_\tau^p(\psi), p) - f(\psi_\tau^{\overline{p}}(\psi), \overline{p})\right] d\tau \equiv J_1 + J_2. \qquad (7)$$

Враховуючи те, що для функції $f(\psi, p)$ справедлива оцінка $\|f(\psi, p)\| \le \le \|f\|_0 < \infty$, маємо

$$\|J_1\| \le \|f\|_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \|\overline{G}_0(\tau, \psi; p) - \overline{G}_0(\tau, \psi; \overline{p})\| d\tau. \qquad (8)$$

Відомо [1, с. 180], що

$$\overline{G}_0(\tau, \psi; p) - \overline{G}_0(\tau, \psi; \overline{p}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_0(\sigma, \psi; p)\left[P(\psi_\sigma^p(\psi), p) - P(\psi_\sigma^{\overline{p}}(\psi), \overline{p})\right] \overline{G}_\sigma(\tau, \psi; \overline{p})\, d\sigma, \qquad (9)$$

де

$$P = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}.$$

Беручи до уваги формулу (9) та оцінку для норми функції Гріна $\overline{G}_0(\tau, \psi; p)$, одержуємо

$$\|\overline{G}_0(\tau, \psi; p) - \overline{G}_0(\tau, \psi; \overline{p})\| \le$$

$$\le K^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|P(\psi_\sigma^p(\psi), p) - P(\psi_\sigma^{\overline{p}}(\psi), \overline{p})\| \exp\{-\gamma(|\sigma| + |\sigma - \tau|)\}\, d\sigma. \qquad (10)$$

Підставимо (10) в (8) і змінимо порядок інтегрування:

$$\|J_1\| \le \frac{2K^2\|f\|_0}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|\sigma|} \|P(\psi_\sigma^p(\psi), p) - P(\psi_\sigma^{\overline{p}}(\psi), \overline{p})\| d\sigma \equiv$$

$$\equiv \frac{2K^2\|f\|_0}{\gamma} L_1(p, \overline{p}, \psi).$$

Очевидно, що для інтеграла J_2 маємо

$$\|J_2\| \le K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|\tau|} \|f(\psi_\tau^p(\psi), p) - f(\psi_\tau^{\overline{p}}(\psi), \overline{p})\| d\tau \equiv K L_2(p, \overline{p}, \psi).$$

Бачимо, що функції $L_i(p, \overline{p}, \psi)$, $i = 1, 2$, є неперервними по сукупності змінних $(p, \overline{p})$ і

$$L_i(p, \overline{p}, \psi)|_{p=\overline{p}} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Отже, $\|u(\psi, p) - u(\psi, \overline{p})\| \to 0$ при $\overline{p} \to p$, тобто обмежений інваріантний многовид $x = u(\psi, p)$ системи (1) неперервно залежить від параметра p. Теорему доведено.

2. Розглянемо систему диференціальних рівнянь (1) у припущенні, що функції $\omega(\psi, p)$, $A(\psi, p)$, $f(\psi, p)$ неперервно диференційовні по ψ_j, $j = \overline{1, m}$, і по параметру p, тобто належать простору $C^1(\mathbb{R}^m \times [0, 1])$. Будемо вважати, що для похідних функції $\omega(\psi, p)$ при будь-якому $\psi \in \mathbb{R}^m$ та $p \in [0, 1]$ виконуються такі оцінки:

$$\left\| \frac{\partial \omega(\psi, p)}{\partial p} \right\| \leq L_0(\| \psi \|), \tag{11}$$

$$\left\| \frac{\partial \omega(\psi, p)}{\partial \psi_j} \right\| \leq \alpha, \quad j = \overline{1, m}, \quad \alpha = \text{const}, \tag{12}$$

а для $A(\psi, p)$ і $f(\psi, p)$ маємо

$$\left\| \frac{\partial A(\psi, p)}{\partial \psi_j} \right\| \leq L_1(\| \psi \|), \quad j = \overline{1, m},$$

$$\left\| \frac{\partial f(\psi, p)}{\partial \psi_j} \right\| \leq L_2(\| \psi \|), \quad j = \overline{1, m}, \tag{13}$$

$$\left\| \frac{\partial A(\psi, p)}{\partial p} \right\| \leq L_3(\| \psi \|), \quad \left\| \frac{\partial f(\psi, p)}{\partial p} \right\| \leq L_4(\| \psi \|),$$

де $L_i(s)$, $i = \overline{0, 4}$, — деякі неперервні додатні функції скалярної змінної $\| \psi \| = s$.

Вияснимо питання: при яких умовах на функції $L_i(s)$, $i = \overline{0, 4}$, обмежений інваріантний многовид $x = u(\psi, p)$ системи (1) буде неперервно диференційовним по параметру p. Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай система* (1) *при кожному фіксованому значенні* $p \in [0, 1]$ *має обмежений інваріантний многовид* $x = u(\psi, p)$ *і при цьому виконуються умови*:

1) *існує* n*-мірна симетрична матриця* $S_p(\psi) \in C'(\mathbb{R}^m, \omega)$ *така, що*

$$\langle [\dot{S}_p(\psi) + S_p(\psi) A(\psi, p) + A^*(\psi, p) S_p(\psi)] x, x \rangle \geq \| x \|^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \psi \in \mathbb{R}^m, \quad \forall p \in [0, 1],$$

$$\sup_{\substack{\psi \in \mathbb{R}^m, \\ p \in [0, 1]}} \| S_p(\psi) \| \equiv \| S \|_0 < \infty;$$

2) *функції* $\omega(\psi, p)$, $A(\psi, p)$ *і* $f(\psi, p)$ *неперервно диференційовні по сукупності змінних* (ψ, p) *і виконуються оцінки* (11)–(13), (2).

Тоді при умові збіжності інтегралів

$$\int_1^{+\infty} \frac{L_i(\lambda)}{\lambda^{(\gamma - \alpha + \alpha_1)/\alpha_1}} \int_1^{\lambda} \frac{L_0(r)}{r^{(\alpha + \alpha_1)/\alpha_1}} \, dr \, d\lambda, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{L_i(r)}{r^{(\gamma + \alpha_1)/\alpha_1}} \, dr, \quad i = 3, 4, \tag{15}$$

функція $x = u(\psi, p)$ *буде неперервно диференційовною по параметру* p.

Доведення. Поділимо обидві частини рівності (7) на різницю $p - \overline{p}$ і, враховуючи неперервність функції Гріна $\overline{G}_0(\tau, \psi; p)$ по параметру p, перейдемо до границі при $\overline{p} \to p$. Одержимо формальну рівність

$$\frac{\partial}{\partial p} u(\psi, p) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_0(\sigma, \psi; p) \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial \psi_{\sigma j}^{p}} \frac{\partial \psi_{\sigma j}^{p}}{\partial p} + \frac{\partial P}{\partial p} \right] \overline{G}_\sigma(\tau, \psi; p) f(\psi_\sigma^p(\psi), p) \, d\sigma \, d\tau \; +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_0(\tau, \psi; p) \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \psi^p_{\tau j}} \frac{\partial \psi^p_{\tau j}}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} \right] d\tau. \tag{16}$$

Оцінимо підінтегральні вирази $N_1(\sigma, \tau, \psi; p)$ та $N_2(\tau, \psi; p)$ відповідно першого та другого доданків:

$$\| N_1(\sigma, \tau, \psi; p) \| \le$$

$$\le (c) e^{-\gamma(|\sigma| + |\sigma - \tau|)} \left(L_1(\|\psi^p_\sigma\|) \left\| \frac{\partial \psi^p_\sigma}{\partial p} \right\| + L_3(\|\psi^p_\sigma\|) \right), \tag{17}$$

$$\| N_2(\tau, \psi; p) \| \le (c) e^{-\gamma|\tau|} \left(L_2(\|\psi^p_\tau\|) \left\| \frac{\partial \psi^p_\tau}{\partial p} \right\| + L_4(\|\psi^p_\tau\|) \right), \tag{18}$$

де символом (c) позначено константу, яка не залежить від ψ, p, σ і τ.

Записуючи розв'язок задачі Коші

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \omega(\psi, p), \quad \psi^p_\sigma(\psi)|_{\sigma=0} = \psi$$

в інтегральній формі

$$\psi^p_\sigma(\psi) = \psi + \int_0^\sigma \omega(\psi^p_t(\psi), p)\, dt,$$

переконуємось, що для $\|\psi^p_\sigma(\psi)\|$ при всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, $p \in [0, 1]$, фіксованих $\psi \in \mathbb{R}^m$ справедлива оцінка

$$\|\psi^p_\sigma(\psi)\| \le \left(\|\psi\| + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) e^{\alpha_1|\sigma|} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \le c\, e^{\alpha_1|\sigma|}, \tag{19}$$

де c — константа, залежна від $\|\psi\|$.

Оскільки

$$\frac{d}{dt}(\psi^p_t(\psi)) = \omega(\psi^p_t(\psi), p),$$

то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial p} \psi^p_t(\psi) \right) = \frac{\partial \omega(\psi^p_t(\psi), p)}{\partial \psi^p_t(\psi)} \left(\frac{\partial}{\partial p} \psi^p_t(\psi) \right) + \frac{\partial \omega(\psi^p_t(\psi), p)}{\partial p}.$$

Звідси отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial p} \psi^p_t(\psi) = \int_0^t \Omega^t_\tau(B) \frac{\partial \omega(\psi^p_t(\psi), p)}{\partial p}\, d\tau,$$

де $\Omega^t_\tau(B)$ — матрицант лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial \omega(\psi, p)}{\partial \psi} \bigg|_{\psi = \psi^p_t(\psi)} \right) y.$$

Безпосередньо можна переконатися у виконанні оцінки

$$\|\Omega^t_\tau(B)\| \le M e^{\alpha|t-\tau|}, \quad M = \text{const}.$$

Врахувавши (11) і (19), при $t \ge 0$ можемо записати

$$\left\| \frac{\partial}{\partial p} \psi^p_t(\psi) \right\| \le M \int_0^t e^{\alpha|t-\tau|} L_0(\|\psi^p_\tau(\psi)\|)\, d\tau \le$$

$$\leq M \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} L_0\left(c e^{\alpha_1 \tau}\right) d\tau. \tag{20}$$

Беручи до уваги оцінки (13), (17), (19) і (20), для першого інтеграла із (16) одержуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma(|\sigma|+|\sigma-\tau|)} L_3\left(\|\psi_\sigma^p\|\right) d\sigma\, d\tau = (c)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|\sigma|} L_3\left(\|\psi_\sigma^p\|\right) d\sigma \leq$$

$$\leq (c)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|\sigma|} L_3\left(c e^{\alpha_1|\sigma|}\right) d\sigma = (c)\int_0^{+\infty} e^{-\gamma\sigma} L_3\left(c e^{\alpha_1\sigma}\right) d\sigma.$$

Зробивши заміну змінних $r = c e^{\alpha_1\sigma}$, переконуємося, що для збіжності останнього інтеграла досить, щоб збігався інтеграл

$$\int_c^{+\infty} \frac{L_3(r)}{r^{(\gamma+\alpha_1)/\alpha_1}}\, dr. \tag{21}$$

Далі маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma(|\sigma|+|\sigma-\tau|)} L_1\left(\|\psi_\sigma^p\|\right)\left\|\frac{\partial\psi_\sigma^p}{\partial p}\right\| d\sigma\, d\tau =$$

$$= (c)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|\sigma|} L_1\left(\|\psi_\sigma^p\|\right)\left\|\frac{\partial\psi_\sigma^p}{\partial p}\right\| d\sigma \leq$$

$$\leq (c)\int_0^{+\infty} e^{-\gamma\sigma} L_1\left(c e^{\alpha_1\sigma}\right)\left\{\int_0^{\sigma} e^{\alpha(\sigma-\tau)} L_0\left(c e^{\alpha_1\tau}\right) d\tau\right\} d\sigma.$$

Виконаємо заміну змінних $r = c e^{\alpha_1\tau}$, $\lambda = c e^{\alpha_1\sigma}$. Бачимо, що достатньою умовою збіжності останнього інтеграла є збіжність такого:

$$\int_c^{+\infty} \frac{L_1(\lambda)}{\lambda^{(\gamma-\alpha+\alpha_1)/\alpha_1}} \int_c^{\lambda} \frac{L_0(r)}{r^{(\alpha+\alpha_1)/\alpha_1}}\, dr\, d\lambda. \tag{22}$$

Аналогічні міркування проводимо для другого доданка із (16).

Безпосередньо переконуємося, що із збіжності інтегралів (15) та (14) випливає збіжність інтегралів (21) і (22) відповідно. Теорема доведена.

Зауваження. Якщо замість умови (4) припускати існування n-мірної симетричної матриці $S_p(\psi) \in C'(\mathbb{R}^m, \omega)$ (рівномірно обмеженої) і такої, що

$$\langle [\dot{S}_p(\psi) - S_p(\psi)A^*(\psi, p) - A(\psi, p)S_p(\psi)]x, x\rangle \geq \|x\|^2$$

$$\forall\, \psi \in \mathbb{R}^m, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, p \in [0, 1],$$

то [1, с. 204] система (1) буде мати обмежений інваріантний многовид $x = u(\psi, p)$ при кожній фіксованій вектор-функції $f(\psi, p) \in C^0(\mathbb{R}^m \times [0, 1])$.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1990. – 270 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 302 с.

Одержано 27.03.95