УДК 517.958; 532.595

И. А. Луковский, А. Н. Тимоха (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

A linearization principle is considered. It is used to obtain linear boundary-value problems for nonlinear theory of motions of a bounded volume of liquid, which experiences non-stationary vibrating loadings, with free surface. We formulate and study the problem of vibrocapilary equilibrium mode, spectral problems of linear wave theory, stability problems for forms of balance, including the problem of bifurcation of balance positions.

Розглядаються принцип лінеаризації та отримані на його основі лінійні крайові задачі нелінійної теорії руху обмеженого об'єму рідини з вільною поверхнею, що знаходиться під впливом нестаціонарних вібраційних навантажень. Сформульовано та досліджено задачу про віброкапілярну форму рівноваги, спектральні проблеми теорії лінійних хвиль, проблеми стійкості форм рівноваги, включаючи й задачу про біфуркації форм рівноваги.

Постановка задачи о капиллярно-гравитационных волнах в ограниченных объемах в случае произвольного переменного нагружения на систему, связанного с движением сосуда, содержащего несжимаемую жидкость, приведена в работах [1, 2]. Она заключается в определении потенциала скоростей $\varphi(x, y, z, t)$ в изменяющемся во времени объеме $Q(t)$ со свободной поверхностью $\Sigma(t) \subset \subset \partial Q(t)$. Развитие вариационных подходов в комбинации с методами теории возмущений позволило построить эффективные проекционные методы решения такой эволюционной нелинейной задачи [2], что дало возможность описать большинство нелинейных волновых явлений на свободной поверхности. Эти проекционные методы базируются на использовании собственных форм колебания, полученных из линеаризованной задачи, в качестве базовых форм движения при предположении, что эти формы взаимодействуют между собой нелинейным образом. При этом общее решение задачи о нелинейных колебаниях свободной поверхности $\Sigma(t)$ чаще всего представляется в виде

$$x = H(y, z, t) = H_0(y, z) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t)\, H_i(y, z), \tag{1}$$

где $x = H_0(y, z)$ — уравнение капиллярной поверхности, $H_i(y, z)$ — собственные формы колебания свободной поверхности, найденные из линеаризованной относительно капиллярной формы равновесия задачи, $A_i(t)$ — подлежащие определению обобщенные координаты времени.

Принципиальная зависимость методов решения нелинейных задач от структуры решения соответствующей линеаризованной задачи обусловила противоречие и невозможность перенесения существующих подходов для решения основных нелинейных краевых задач теории вибрационного взаимодействия волн на поверхности сжимаемой жидкости. Формулировка таких задач близка или совпадает (в частном случае) с формулировкой задач теории капиллярно-гравитационных волн. Однако, как показали исследования [3], всегда содержит ряд малых и больших параметров. Авторы полагают, что именно этот факт предопределяет ряд парадоксальных нелинейных эффектов, зафиксированных физиками [4–7], и плохую сходимость численных методов, использующих представление (1). Цель настоящей работы — показать, что исследуемая задача может быть линеаризована относительно некоторого условного положения равновесия, отличного от капиллярного, а также построить математически строгую теорию линейных волн (собственных колебаний) объема относительно этих положений равновесия. Тем самым будет обосновано представление решения исходной задачи (1).

1. Постановка задачи. Исследуемая нелинейная эволюционная краевая задача со свободной поверхностью в общем случае имеет вид

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\nabla\varphi) = 0, \quad \rho = \rho^0\left(\frac{p}{p^0}\right)^{1/\gamma},$$

$$\rho\nabla\left(\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + gx + \nu^2(a_1x + a_2y + a_3z)\sin(\nu t)\right) = -\nabla p \quad \text{в} \quad Q(t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\xi_t}{|\nabla\xi|}, \quad p + \sigma(K_1 + K_2) = \rho^0 = \mathrm{const} \quad \text{на} \quad \Sigma(t),$$

$$-\frac{(\nabla W, \nabla\xi)}{|\nabla W||\nabla\xi|} = \cos\alpha \quad \text{на} \quad \partial\Sigma(t),$$

где определению подлежат функции $\varphi(x, y, z, t)$, $\xi(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$, причем уравнение $\xi(x, y, z, t) = 0$ неявно задает неизвестную поверхность $\Sigma(t)$, K_i — главные кривизны поверхности $\Sigma(t)$ (физический смысл постоянных в задаче (2) приведен в работе [3]). В частном случае ($\rho = \mathrm{const}$, несжимаемая жидкость) задача (2) совпадает с классической задачей теории капиллярно-гравитационных волн [2]. К задаче (2), вообще говоря, необходимо присоединить начальные условия вида

$$\begin{gathered}\xi(x, y, z, 0) = \tilde{\xi}_0(x, y, z), \quad \xi(x, y, z, 0) = \tilde{\xi}_1(x, y, z), \\ \varphi(x, y, z, 0) = \vartheta(x, y, z), \quad \varphi_t(x, y, z, 0) = \vartheta_1(x, y, z).\end{gathered} \tag{3}$$

Задача (2) относится к числу сложных нелинейных эволюционных краевых задач со свободной границей, для которых до сих пор не доказаны [8] теоремы о разрешимости.

Применим к задаче (2) методы теории подобия, для чего выберем l — характерный размер объема Q, $1/\nu$ — характерное время и перейдем от задачи (2) к задаче в безразмерном виде по формулам

$$\begin{gathered}x_* = x/l, \quad y_* = y/l, \quad z_* = z/l, \quad H_* = H/l, \quad \varphi_* = \varphi/(l^2\nu), \\ k^2 = \nu l/c, \quad \rho_* = p/(\rho^0 l^2\nu^2), \quad \nu_* = \nu\sqrt{l^3\rho^0/\sigma}, \\ B = gl^2p^0/\sigma, \quad p_*^0 = p/(\rho^0 l^2\nu^2), \quad a_i^* \overset{\mathrm{def}}{=} a_i/\sup|a_i|.\end{gathered} \tag{4}$$

Безразмерная задача примет вид (при этом $*$ опустим)

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\nabla\varphi) = 0, \quad \rho = \left(\frac{p}{p^0}\right)^{1/\gamma},$$

$$\rho\nabla\left(\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \nu^{-2}Bx + \varepsilon(a_1x + a_2y + a_3z)\sin(t)\right) = -\nabla p \quad \text{в} \quad Q(t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\xi_t}{|\nabla\xi|}, \quad p + \nu^{-2}(K_1 + K_2) = \rho^0 = \mathrm{const} \quad \text{на} \quad \Sigma(t),$$

$$-\frac{(\nabla W, \nabla\xi)}{|\nabla W||\nabla\xi|} = \cos\alpha \quad \text{на} \quad \partial\Sigma(t).$$

В задаче имеется малый параметр

$$\varepsilon = \sup|a_i|/c \ll 1, \tag{6}$$

который стоит перед неоднородностью и означает, что амплитуда вибрации меньше характерного линейного размера объема. При достаточно больших частотах воздействия малостью характеризуется также величина $1/\nu^2$. В дальнейшем будем предполагать (как и в классических задачах маятниковой вибромеханики), что потенциальные силы имеют порядок ε^2. Математически это условие записывается следующим образом:

$$1/\nu^2 = \mu\varepsilon^2, \quad \mu \sim 1 \quad \text{при} \quad B \lesssim 1; \quad B/\nu^2 = \mu\varepsilon^2, \quad \mu \sim 1 \quad \text{при} \quad B \gtrsim 1. \tag{7}$$

Условия малости (6), (7) позволяют применить к задаче (5) математические методы теории возмущения.

2. Задача о виброкапиллярной равновесной форме. Предположим, что динамическими положениями равновесия будут (2π)-периодические решения задачи (5). Представим такое (2π)-периодическое решение задачи в виде набора функций $\varphi(x, y, z, t, \varepsilon)$, $p(x, y, z, t, \varepsilon)$, $\rho(x, y, z, t, \varepsilon)$, $\xi(x, y, z, t, \varepsilon) = x - H(y, z, t, \varepsilon)$ и разложим решение в степенной ряд по ε.

Теорема 1. *Если функции* φ, p, $\rho \in C^{3+\beta}(Q \times [0, \mathrm{T}] \times (-\delta, \delta))$, $\delta, \beta > 0$, *а функция* $H \in C^{3+\beta}$ *в области определения, то* (2π)*-периодическое решение задачи* (5) *имеет вид*

$$\varphi(x, y, z, t, \varepsilon) = \varepsilon\Phi(x, y, z)\cos(t) + O(\varepsilon^2), \tag{8}$$

$$p(x, y, z, t, \varepsilon) = p_0 + \varepsilon\{\Phi(x, y, z) - (a_1x + a_2y + a_3z)\}\sin(t) + O(\varepsilon^2), \tag{9}$$

$$H(y, z, t, \varepsilon) = H_0(y, z) + \varepsilon H_*(y, z)\sin(t), \tag{10}$$

где $H_0(y, z)$, $\Phi(x, y, z)$ *и поверхность* Σ_0 $(x = H_0(y, z))$ *подлежат определению из задачи*

$$-\mu\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla H_0}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}}\right) + \mu Bx - \frac{1}{4}[k^2(\Phi - (a_1x + a_2y + a_3z))^2 -$$

$$- (\Delta\Phi_1)^2] - \frac{1}{2}[\Phi_x - a_1]H_* = \text{const} \quad \text{на} \quad \Sigma_0, \tag{11}$$

$\Phi(x, y, z)$ *находится из задачи Робина*

$$\begin{gathered} \Delta\Phi + k^2\Phi = k^2(a_1x + a_2y + a_3z) \quad \text{в} \quad Q_0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S, \quad \Phi = a_1x + a_2y + a_3z \quad \text{на} \quad \Sigma_0, \end{gathered} \tag{12}$$

а $H_*(x, y, z)$ — *из условия*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{H_*}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}} \quad \text{на} \quad \Sigma_0. \tag{13}$$

Доказательство. Условия гладкости для решений позволяют представить решение в виде разложения в ряд Маклорена по ε. Подставляя эти разложения в исходную задачу и собирая члены одного порядка, получаем последовательность краевых задач, из которых можно найти периодические решения.

Задача *нулевого приближения*:

$$\rho_{0t} + \mathrm{div}(\rho_0\nabla\varphi_0) = 0, \quad \rho_0 = \left(\frac{p_0}{p^0}\right)^{1/\gamma},$$

$$\rho_0 \nabla \left(\varphi_{0t} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 \right) = -\nabla p_0 \text{ в } Q_0,$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = -\frac{\xi_{0t}}{|\nabla\xi_0|}, \quad p_0 = p^0 \text{ на } \Sigma_0,$$

$$-\frac{(\nabla W, \nabla\xi_0)}{|\nabla W||\nabla\xi|} = \cos\alpha \quad \text{на } \partial\Sigma_0.$$

Точное ее решение имеет вид

$$\xi_0(x, y, z) = x - H_0(y, z), \quad H_0(y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \langle H(z, y, t, \varepsilon) \rangle;$$

$$\varphi_0 = 0; \quad p_0 = p^0, \quad p_0 = 1.$$

Задача *первого приближения*:

$$\rho_{1t} + \Delta\varphi_1 = 0, \; p_1 = k^2 p_1, \; p_1 = -\varphi_{1t} - (a_1 x + a_2 y + a_3 z)\sin(t) \text{ в } Q_0,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \quad p_1 = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -\frac{\xi_{1t}}{|\nabla\xi_0|} \text{ на } \Sigma_0.$$

Ее решение имеет вид

$$\varphi_1(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z)\cos(t);$$

$$p_1(x, y, z, t) = \{\Phi - (a_1 x + a_2 y + a_3 z)\}\sin(t),$$

$$H_1(y, z, t) = H_*(y, z)\sin(t),$$

откуда получаем (8) и (9). Функция Φ определяется из задачи (12), причем выполнено (13).

Из второго приближения после усреднения условий на Σ_0 получаем

$$\mu \operatorname{div}\left(\frac{\nabla H_0}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}} \right) + \langle p_2 \rangle + \langle p_{1x} H_1 \rangle = \text{const} \quad \text{на } \Sigma_0,$$

откуда после подсчета выражений

$$\langle p_2 \rangle = \frac{1}{4}[k^2(\Phi - (a_1 x + a_2 y + a_3 z))^2 - (\nabla\Phi)^2] - \mu B x,$$

$$\langle p_{1x} H_1 \rangle = \frac{1}{2}[\Phi_x - a_1] H_*$$

следует утверждение теоремы.

Замкнутая задача (11)–(13) является аналогом задачи о капилляре в случае вибровоздействия и поэтому названа авторами задачей о виброкапиллярной равновесной форме. Численные примеры, приведенные в [9], показывают, что наличие дополнительных слагаемых, связанных с решением задачи Робина для Φ, существенно меняет свойства решения задачи (11)–(13) по сравнению с задачей о капилляре [10].

3. Спектральные проблемы теории линейных волн. Для того чтобы построить теорию линейных колебаний жидкости относительно виброкапиллярной равновесной формы, необходимо, следуя работам [10, 11], рассмотреть задачу в вариациях относительно точного (2π)-периодического решения задачи (5). Такая задача будет описывать малые относительные колебания свободной поверхности и примет вид $(\tilde\varphi(x, y, z, t), \; \tilde p(x, y, z, t), \; \tilde H(y, z, t), \; \tilde\rho(x, y, z, t)$

описывают малые относительные колебания, а функции $\varphi(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$, $H(y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$ — точные (2π)-периодические решения задачи (5)):

$$
\begin{gathered}
\tilde{p}_t + \operatorname{div}(\tilde{\rho}\nabla\varphi) + \operatorname{div}(\rho\nabla\tilde{\varphi}) = 0, \quad \tilde{p} = \left(\frac{p+\tilde{p}}{p^0}\right)^{1/\gamma} - \left(\frac{p}{p^0}\right)^{1/\gamma}, \\
-\tilde{\rho}\frac{\nabla p}{p} + \rho\nabla\left(\tilde{\varphi}_t + (\nabla\varphi, \nabla\tilde{\varphi})\right) = -\nabla\tilde{p} \;\text{ в }\; \tilde{Q}(t), \quad \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n} = 0 \;\text{ на }\; \tilde{S}(t), \\
\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}H_y - \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z}H_z + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\tilde{H} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\tilde{H}_y - \right. \\
\left. - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\tilde{H}_z - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}H_y + \frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial z\partial x}H_z\right)\tilde{H} = \tilde{H}_t, \\
\tilde{\rho} + \frac{\partial p}{\partial x}\tilde{H} + \mu\varepsilon^2\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\tilde{H}}{(1+(\nabla H)^2)^{1/2}} - \frac{(\nabla\tilde{H}, \nabla H)\nabla H}{(1+(\nabla H))^{3/2}}\right) = 0 \;\text{ на }\; \tilde{\Sigma}(t), \\
\frac{\partial\tilde{H}}{\partial e} = \frac{\partial H}{\partial e}\frac{(\nabla H, \nabla\tilde{H})}{(1+(\nabla H)^2)^{1/2}} \;\text{ на }\; \partial\tilde{\Sigma}(t),
\end{gathered}
\tag{14}
$$

где $\tilde{\Sigma}(t)$ — поверхность, определяемая уравнением $x = H(y, z, t)$, $\tilde{Q}(t) = \{(x, y, z) : W(x, y, z) < 0,\ x < H(y, z, t)\}$, $\tilde{S}(t) = \{(x, y, z) : W(x, y, z) = 0,\ x < H(y, z, t)\}$.

Воспользуемся видом периодических решений (φ, p, H, ρ) (8)–(10) и преобразуем задачу (14) к виду

$$
\begin{gathered}
\tilde{p}_t + \nabla\tilde{\varphi} + \varepsilon\left\{\sin(t)\,k^2\operatorname{div}\left((\Phi - (a_1x + a_2y + a_3z))\nabla\tilde{\varphi}\right) + \cos(t)\operatorname{div}(\tilde{\rho}\nabla\varphi)\right\} = \\
= 0, \quad \tilde{\rho} = k^2(1+O(\varepsilon))\tilde{\rho}, \\
-\tilde{\rho}\left\{\varepsilon\sin(t)\nabla(\Phi - (a_1x + a_2y + a_3z)) + O(\varepsilon^2)\right\} + \nabla\tilde{\varphi}_t + \\
+ \varepsilon\cos(t)(\nabla\Phi, \nabla\tilde{\varphi}) + \varepsilon k^2(\Phi - (a_1x + a_2y + a_3z))\sin(t)\nabla\tilde{\varphi}_t + O(\varepsilon^2) = \\
= -\nabla\tilde{p} \;\text{ в }\; Q_0, \\
\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n} = 0 \;\text{ на }\; \langle S\rangle, \quad \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}H_y - \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial z}H_z + \varepsilon\cos(t)\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\tilde{H} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\tilde{H}_y - \right. \\
\left. - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\tilde{H}_z - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}H_y + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}H_z\right)\tilde{H}\Big\} + O(\varepsilon^2) = \tilde{H}_t \;\text{ на }\; \Sigma_0, \\
\tilde{\rho} + \varepsilon\sin(t)\frac{\partial}{\partial x}(\Phi - (a_1x + a_2y + a_3z))\tilde{H} + O(\varepsilon^2) + \\
+ \mu\varepsilon^2\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\tilde{H}}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}} - \frac{(\nabla\tilde{H}, \nabla H_0)\nabla H_0}{(1+(\nabla H_0))^{3/2}}\right) = 0 \;\text{ на }\; \Sigma_0, \\
\frac{\partial\tilde{H}}{\partial e} = \frac{\partial H_0}{\partial e}\frac{(\nabla\tilde{H}, \nabla H_0)}{1+(\nabla H_0)^2} + O(\varepsilon) \;\text{ на }\; \partial\Sigma_0,
\end{gathered}
\tag{15}
$$

где Σ_0 — виброкапиллярная равновесная форма, $Q_0 = \{(x, y, z) : W(x, y, z) < 0,\ x < H_0(y, z)\}$, $\langle S\rangle = \{(x, y, z) : W(x, y, z) = 0,\ x < H_0(y, z)\}$.

Задача (15) есть линейная эволюционная однородная краевая задача с периодическими коэффициентами. Применим для решения задачи (15) принцип разделения быстрых (время t) и медленных (время $\tau = \varepsilon t$) движений. Применение принципа разделения движений приведет нас к задаче о малых медленных колебаниях свободной поверхности относительно виброкапиллярной равновесной формы:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } Q_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \langle S\rangle,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{h_\tau}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}}, \quad \varphi_\tau + \mathcal{A}h = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_0. \tag{16}$$

Здесь оператор $\mathcal{A}$ определяется выражением

$$\mathcal{A}h = [\mathcal{A}_1 h] + [\mathcal{A}_2 h] = -\mu\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla h}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}} - \frac{\nabla H_0(\nabla h, \nabla H_0)}{(1+(\nabla H_0)^2)^{3/2}}\right) +$$
$$+ \mu B h + \frac{1}{2}\{(\nabla\Phi, \nabla\Psi) - k^2(\Phi - a_1 x - a_2 y - a_3 z)\Psi - \Psi_x H_* +$$
$$+ (\nabla\Phi_x, \nabla\Phi)h - k^2(\Phi - a_1 x - a_2 y - a_3 z)(\Phi_x - a_1)h -$$
$$- (\Phi_{xx}H_*)h - (\Phi_x - a_1)h_*\} \quad \text{на} \quad \Sigma_0,$$
$$\frac{\partial h}{\partial e} = \frac{\partial H}{\partial e}\frac{(\nabla h, \nabla H_0)}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}} \quad \text{на} \quad \partial\Sigma_0, \tag{17}$$

где

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0 \text{ в } Q_0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0 \text{ на } \langle S\rangle, \quad \Psi + \Phi_x h = a_1 h,$$
$$h_* = \frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial y}H_{0y} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}H_{0z} + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}H_{0y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}H_{0z}\right)h -$$
$$- \frac{\partial\Phi}{\partial y}h_y - \frac{\partial\Phi}{\partial z}h_z \quad \text{на} \quad \Sigma_0. \tag{18}$$

При этом относительные движения могут быть найдены по формулам

$$\tilde\varphi = \varepsilon(\cos(t)\varphi(x,y,z,\tau) + \Psi(x,y,z,\tau)) + o(\varepsilon),$$
$$\tilde H = h(y,z,\tau) + o(\varepsilon), \quad \tilde\rho = \varepsilon\sin(t)\varphi(x,y,z,\tau) + o(\varepsilon). \tag{19}$$

Задача (16) по структуре аналогична известной задаче о линейных волнах на поверхности ограниченного объема несжимаемой жидкости [10]. Ее отличие заключается в существенно более сложном виде оператора $\mathcal{A}$ (17), (18).

Рассмотрим совокупность решений задачи (16) вида $\varphi(x,y,z,\tau) = i\omega\exp(i\omega\tau)\psi(x,y,z)$, $h(y,z,\tau) = \exp(i\omega\tau)f(y,z)$, которые определяют так называемые *нормальные* (*собственные*) колебания системы относительно виброкапиллярной равновесной формы. Для определения ω, f, ψ получим задачу на собственные значения с параметром в краевом условии:

$$\nabla\psi = 0 \quad \text{в} \quad Q_0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \text{ на } \langle S\rangle,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{f}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}}, \quad -\omega^2\psi + \mathcal{A}f = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_0. \tag{20}$$

Здесь ω — собственная частота, $f(y, z)$ — мода колебания свободной поверхности, ψ — мода колебания объема.

Свойства спектра задачи (20) полностью зависят от свойства спектра оператора $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}f = \lambda f$.

Лемма. *Пусть* (H_0, Φ) *— решение задачи о виброкапиллярной равновесной форме* (11)–(13), *причем* $H_0 \in C^1(P\Sigma_0)$, $\Phi \in C^2(Q_0 \cup \Sigma_0)$, *а тройка* $(\Phi^{(i)}, f^{(i)}, f_*^{(i)})$ *определяется из решения задачи* (18) *относительно* (Ψ, f, f_*) *соответственно,* $i = 1, 2$, *причем* $f^{(i)} \in C^1(P\Sigma_0)$, $\|f^{(i)}\|_{C^1} = 1$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Sigma_0} \Big(k^2 \Psi^{(1)} (\Phi - a_1 x - a_2 y - a_3 z) - (\nabla\Psi^{(1)}, \nabla\Phi) +$$

$$+ H_* \Psi_x^{(1)} \Big) \frac{f^{(2)}}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{1/2}} \, ds =$$

$$= - \int\limits_{Q_0} \Big(k^2 \Psi^{(1)} \Psi^{(2)} - (\nabla\Psi^{(1)}, \nabla\Psi^{(2)}) \Big) \, dQ + \frac{f_*^{(2)} (\Phi_x - a_1) f^{(1)}}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{1/2}} \, ds. \qquad (21)$$

Доказательство. Пусть $\zeta_\alpha(x, y, z) = 0$ определяет совокупность поверхностей Σ_α и объемов Q_α: $\zeta_\alpha \to \zeta_0$ при $\alpha \to 0$ и $Q_\alpha \to Q_0$ при $\alpha \to 0$ (т. е. существует гладкая взаимно однозначная биекция $\mathcal{F}_\alpha$: $Q_0 \to Q_\alpha$ и $\mathcal{F}_\alpha^{-1}$: $Q_\alpha \to Q_0$: $\|\mathcal{F}_\alpha - \mathcal{F}_0\|_{C^1(Q_0 \cup \Sigma_0)} + \left\|\mathcal{F}_\alpha^{-1} - \mathcal{F}_0^{-1}\right\|_{C^1(Q_\alpha \cup \Sigma_\alpha)} \to 0$, $\alpha \to 0$). Здесь ζ_0 определяет Σ_0, а $Q_\alpha \subset Q_0$ $\forall\, \alpha > 0$. Введем в рассмотрение

$$u\colon \nabla u + k^2 u = k^2 (a_1 x + a_2 y + a_3 z) \quad \text{в} \quad Q_\alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \langle S \rangle,$$

$$u_i\colon \Delta u_i + k^2 u_i = 0 \quad \text{в} \quad Q_\alpha, \quad \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \langle S \rangle.$$

Выберем достаточно малое $\beta > 0$ и рассмотрим функцию

$$J(\alpha, \beta) =$$

$$= \int\limits_{Q_\alpha} \Big(k^2 u_1 (u + \beta u_2 - a_1 x - a_2 y - a_3 z) - (\nabla u_1, \nabla(u + \beta u_2)) \Big) \, dQ \equiv$$

$$\equiv - \int\limits_{\Sigma_0} \frac{\partial(u + \beta u_2)}{\partial n} u_1 \, ds,$$

которая является непрерывно дифференцируемой по α и β. Тогда

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} + \frac{\partial J}{\partial \beta} \right) \Big|_{\alpha = \beta = 0} =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_0} \big(k^2 u_1 (u - a_1 x - a_2 y - a_3 z) - (\nabla u_1, \nabla u) \big) \left(- \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = 0} \Big/ |\nabla \zeta_0| \right) ds +$$

$$+ \int\limits_{Q_0} \Big(k^2 u_1 u_2 - (\nabla u_1, \nabla u_2) \Big) \, dQ \equiv$$

$$\equiv -\int\limits_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial n}|\nabla\zeta_\alpha|\right)\Big|_{\alpha=0}\left(-\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}\Big/|\nabla\zeta_0|\right)u_1\,ds\ -$$

$$-\int\limits_{\Sigma_0}\frac{\partial u}{\partial n}|\nabla\zeta_0|\frac{\partial}{\partial\zeta_\alpha}(u_1)\Big|_{\alpha=0}\left(-\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}\Big/|\nabla\zeta_0|\right)u_1\,ds\ -\int\limits_{\Sigma_0}\frac{\partial u_2}{\partial n}u_1\,ds.$$

Рассмотрим лишь такие области Q_0, что ζ_α локально разрешимо в окрестности $\alpha=0$ относительно x и имеет вид $x=H_\alpha(y,z)$. Такое возможно, поскольку ζ_0 локально разрешимо $(x=H_0(y,z))$. Тогда $H_\alpha\to H_0$ и тождество примет вид $\left(-\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}\Big/|\nabla\zeta_0| = f^{(2)}\right)$:

$$\int\limits_{P\Sigma_0}\Big(k^2u_1(u-a_1x-a_2y-a_3z)-(\nabla u_1,\nabla u)\Big)f^{(2)}dy\,dz\ +$$

$$+\int\limits_{Q_0}\Big(k^2u_1u_2-(\nabla u_1,\nabla u_2)\Big)dQ\ \equiv$$

$$\equiv -\int\limits_{P\Sigma_0}\left\{\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}H_{0y}-\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}H_{0z}\right)f^{(2)}-\frac{\partial u}{\partial y}f_y^{(2)}-\frac{\partial u}{\partial z}f_z^{(2)}\right\}u_1\,dy\,dz\ -$$

$$-\int\limits_{\Sigma_0}\frac{\partial u}{\partial n}u_{1x}f^{(2)}ds-\int\limits_{\Sigma_0}\frac{\partial u_2}{\partial n}u_1\,ds.$$

Пусть теперь выбрана такая последовательность $\{u\}$ из условия, что $u\to\to\Phi$ в $W_1^2(Q_0)$ и $u|_{\Sigma_0}\to\Phi|_{\Sigma_0}$ в $W_1^2(\Sigma_0)$ (что возможно, поскольку Φ удовлетворяет граничным условиям, которые выполняются для u и $\Phi\in C^2(Q_0\cup\Sigma_0)$). Тогда с учетом того, что $\partial\Phi/\partial n = H_*/(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}$ и

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}H_{0y}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}H_{0z}\right)f^{(2)}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}f_y^{(2)}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}f_z^{(2)}\ =$$

$$=\ f_1^{(2)}-\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial n}(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2},$$

получаем

$$\int\limits_{P\Sigma_0}\Big(k^2\Phi^{(1)}(\Phi-a_1x-a_2y-a_3z)-(\nabla\Phi^{(1)},\nabla\Phi)\Big)f^{(2)}dy\,dz\ +$$

$$+\int\limits_{Q_0}\Big(k^2\Phi^{(1)}\Phi^{(2)}-(\nabla\Phi^{(1)},\nabla\Phi^{(2)})\Big)dQ\ \equiv$$

$$\equiv -\int\limits_{P\Sigma_0}H_*\Phi_x^{(1)}f^{(2)}dy\,dz\ +\int\limits_{P\Sigma_0}f_1^{(2)}(\Phi_{1x}-a_1)f^{(1)}dy\,dz,$$

откуда следует утверждение леммы.

Теорема 2. *Пусть* (H_0,Φ_1) *— решение задачи* (11)–(13), *причем* $H\in\in C^1(P\Sigma_0)$, $\Phi\in C^2(Q_0\cup\Sigma_0)$. *Тогда оператор* $\mathcal{A}$ *— симметричный в* $L_2(P\Sigma_0)$ ($P\Sigma_0$ — проекция Σ_0 на Oyz).

Доказательство. Рассмотрим

$$[\mathcal{A}f^{(1)}, f^{(2)}] = \mu \int\limits_{P\Sigma_0} \left\{ \left[\frac{(\nabla f^{(1)}, \nabla f^{(2)})}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}} - \frac{(\nabla H_0, \nabla f^{(1)})(\nabla H_0, \nabla f^{(2)})}{(1+(\nabla H_0)^2)^{3/2}} \right] + \right.$$

$$+ \mu B + \frac{1}{2}\Big[(\nabla \Phi_x, \nabla\Phi) - k^2(\Phi - a_1 x - a_2 y - a_3 z)(\Phi_x - a_1) -$$

$$\left. - (\Phi_{xx} H_*)\Big] \right\} f^{(1)} f^{(2)} dy\, dz + \frac{1}{2} \int\limits_{P\Sigma_0} \left\{ (\nabla\Phi, \nabla\Phi^{(1)}) - \right.$$

$$\left. - k^2(\Phi - a_1 x - a_2 y - a_3 z)\,\Phi^{(1)} - \Phi_x^{(1)} H_* - (\Phi_x - a_1)\, f_*^{(1)} \right\} f^{(2)} dy\, dz .$$

Воспользовавшись леммой, последнее слагаемое преобразуем к виду

$$\int\limits_{Q_0} \left(k^2 \Phi^{(1)}\Phi^{(2)} - (\nabla\Phi^{(1)}, \nabla\Phi^{(2)}) \right) dQ \; -$$

$$- \int\limits_{P\Sigma_0} \left\{ f_*^{(2)}(\Phi_x - a_1)\, f^{(1)} + f_*^{(1)}(\Phi_x - a_1)\, f^{(2)} \right\} dy\, dz .$$

Тем самым теорема доказана.

Теорема 3 (о точечном спектре оператора $\mathcal{A}$). *Пусть* (H_0, Φ_1) — *решение задачи* (11)–(13), *причем* $H_0 \in C^1(P\Sigma_0)$, $\Phi_1 \in C^2(Q_0 \cup \Sigma_0)$. *Тогда верны следующие утверждения*:

1) *линейный оператор* $\mathcal{A}$ *имеет действительный точечный спектр, состоящий лишь из собственных значений*;

2) *набор собственных функций* $\{f^{(n)}\}$ *является базисом в* $L_2(P\Sigma_0)$;

3) *множество собственных значений оператора* $\mathcal{A}$ *имеет единственную предельную точку* $+\infty$. *Множество отрицательных собственных значений конечно.*

Доказательство. Рассмотрим спектр оператора $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + F(x,y,z) + \mathcal{A}_2$. Оператор $\mathcal{A}_1$ достаточно хорошо изучен [10] и известно, что существует оператор $\mathcal{A}_1^{-1}$, который непрерывен в смысле отображения $W_2^{-1}(\Sigma_0) \to W_2^1(\Sigma_0)$ и вполне непрерывен в смысле отображения $L_2(\Sigma_0) \to L_2(\Sigma_0)$; 2) $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_1^{-1}$ — положительно определенные самосопряженные операторы в фактор-пространстве $L_2(P\Sigma_0)$ без константы.

Рассмотрим спектральную задачу для оператора $C(\lambda) = \lambda \mathcal{A}_1^{-1} - E - \mathcal{A}_1^{-1}(\mathcal{A}_2 + F(x,y,z))$. Исследуем оператор $\mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{A}_2$. Он действует из $W_2^{1/2}(P\Sigma_0)$ (функция f) $\to W_2^1(Q_0)$, (функция Ψ) $\to W_2^{-1/2}(P\Sigma_0)$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{A}_2$ предкомпактен на допустимом плотном подмножестве из $\left\{W_2^{1/2}(P\Sigma_0)\right\} \subset L_2(P\Sigma_0)$. Тогда если 0 принадлежит спектру оператора C, то это собственное значение. Таким образом, спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит лишь из действительных собственных значений. Покажем, что этот спектр точечный и имеет лишь одну предельную точку ∞. Для этого выберем некоторое $\lambda_0 : C(\lambda_0)$ является непрерывно обратимым на $W_1^{1/2}(P\Sigma_0)$. (Это может быть, например, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda_0 \notin \mathbb{R}$.) Тогда $C^{-1}(\lambda_0)$ непрерывен при отображении $W_2^{1/2}(P\Sigma_0) \to W_2^{1/2}(P\Sigma_0)$. Рассмотрим спектральную задачу для оператора $C_1 = (-C^{-1}(\lambda_0)\mathcal{A}_1^{-1})$

$$\left(C_1 - \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)} E\right) f = 0,$$

которая эквивалентна исходной. C_1 непрерывен при отображении $L_2(P\Sigma_0) \to \to W_2^{1/2}(P\Sigma_0)$ и вполне непрерывен в $L_2(P\Sigma_0)$. Следовательно, спектр оператора $\mathcal{A}$ точечный и имеет единственную предельную точку ∞, а значит, верны утверждения 1, 2.

Докажем утверждение 3, для чего рассмотрим очевидное равенство $\lambda_n = = \big((f_n, f_n) + (\mathcal{A}_1^{-1}(\mathcal{A}_2 + F(x,y,z)) f_n, f_n)\big) \big/ (\mathcal{A}_1^{-1} f_n, f_n)$, где f_n — собственные функции и $(f_n, f_n) = 1$, $(\mathcal{A}_1^{-1} f_n, f_n) > 0$. Поскольку $\mathcal{A}_1^{-1}(\mathcal{A}_2 + + F(x,y,z))$ — вполне непрерывный оператор, а $\{f_n\}$ — базис в $L_2(P\Sigma_0)$, то $(\mathcal{A}_1^{-1}(\mathcal{A}_2 + F(x,y,z)) f_n, f_n) \to 0$, $n \to \infty$.

Теорема доказана.

Теорема 4 (о свойствах спектра задачи (20)). *Пусть* (H_0, Φ) — *решение задачи* (11)–(13), *причем* $H_0 \in C^1(P\Sigma_0)$, $\Phi \in C^2(Q_0 \cup \Sigma_0)$. *Тогда верны следующие утверждения*:

1) *спектральная задача* (20) *имеет лишь собственные значения* $(\omega_n^{(2)}, f_n, \psi_n)$ *и для любого* n, $\omega_n^2 \in \mathbb{R}$, $\{f_n\}$ — *базис в* $L_2(P\Sigma_0)$;

2) *множество отрицательных* ω_n^2 *конечно.*

Доказательство. Введем в рассмотрение непрерывный оператор T, ставящий в соответствие каждому f значение ψ на Σ_0 путем решения задачи Неймана

$$\nabla \psi = 0 \quad \text{на} \quad Q_0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \langle S \rangle, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{f}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{1/2}} \quad \text{на} \quad \Sigma_0.$$

Тогда спектральная задача для (20) сведется к спектральной задаче вида $(-\omega^2 T + \mathcal{A}) f = 0$. Последняя эквивалентна спектральной задаче для $C_2(\omega^2) = -\omega^2 \mathcal{A}_1^{-1} T - E - \mathcal{A}_1^{-1}(\mathcal{A}_2 + F(x,y,z))$, откуда в связи с компактностью операторов $\mathcal{A}_1^{-1}(\mathcal{A}_2 + F(x,y,z)$ и $\mathcal{A}_1^{-1} T$ следует (см. рассуждения предыдущей теоремы), что спектр (20) состоит лишь из действительных собственных значений. Повторяя рассуждения теоремы 4 для оператора $C_3 = = C_2^{-1}(\omega_0^2)\mathcal{A}_1^{-1} T$ (вместо оператора C_1; ω_n^2 — резольвентная точка оператора $\mathcal{A}$): $\left(C_3 + \dfrac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)} E\right) f = 0$, получаем утверждение 1 теоремы.

Заметим, что все собственные значения оператора $\mathcal{A}_1^{-1} T$ положительны [10], а для любой функции f $(\mathcal{A}_1^{-1} T f, f) > 0$. Рассмотрим собственные значения и функции (ω_n^2, f_n):

$$\omega_n^2 = \big((f_n, f_n) + (\mathcal{A}_1^{-1}(\mathcal{A}_2 + F(x,y,z)) f_n, f_n)\big) \big/ (\mathcal{A}_1^{-1} T f_n, f_n).$$

Поскольку $(f_n, f_n) = 1$, $(\mathcal{A}_1^{-1} T f, f) > 0$, $(\mathcal{A}_1^{-1}(\mathcal{A}_2 + F(x,y,z)) f_n, f_n) \to 0$,

$n \to \infty$, то существует N такое, что для любого $n > N$ $\omega_n^2 > 0$. Отсюда следует утверждение 2 теоремы.

Теорема доказана.

4. Устойчивость форм равновесия. В классической теории волн на поверхности ограниченного объема одной из наиболее существенных проблем является анализ устойчивости плоской (в случае бесконечного объема) или капиллярной (в случае конечного объема) форм равновесия. Такой анализ решения статических задач в последнем случае сводился к определению знаков квадратов собственных частот, найденных из спектральной задачи о малых собственных колебаниях капиллярной жидкости относительно указанных положений равновесия (спектральных задач линейной теории поверхностных волн), что являлось так называемым динамическим принципом устойчивости капиллярных волн: $\omega_n^2 > 0$ для любого n. Обоснование динамического принципа устойчивости в задачах сплошной среды связано с многочисленными математическими сложностями, которые вызваны как бесконечномерностью настоящей задачи, так и проблемами разрешимости возникающих при этом нелинейных краевых задач. Однако даже в случае выполнения всех необходимых предположений для математической корректности принципа необходимо, чтобы относительные колебания имели экспоненциально затухающий характер, что может быть лишь в том случае, когда учтены потери энергии в системе и соответствующий дискретный аналог задачи имеет определенную структуру. Пример обоснования динамического принципа для устойчивости капиллярно-гравитационных волн в ограниченном объеме при выполнении указанных выше предположений приведен в [2, 10].

Теорема 5. *В предположениях теоремы* 4 *виброкапиллярная равновесная форма устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ положительны.*

Доказательство следует из динамического принципа устойчивости и того, что $\omega_n^2 = \mu\mu_1(\mathcal{A}f_n, f_n)/(Tf_n, f_n)$, где T — положительно определенный оператор (см. доказательство теоремы 3), f_n — собственные функции задачи (20).

Два следствия весьма важны для физических приложений и при построении приближенных методов решения. Первое следствие связано с понятием спектрального принципа устойчивости, который сводится к определению знаков собственных значений оператора $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}f = \lambda f$: $\lambda_n > 0$ для любого n.

***Следствие* 1.** *В предположениях теоремы* 4 *динамический и спектральный принцип устойчивости эквивалентны.*

***Следствие* 2.** *В предположениях теоремы* 4 *потеря устойчивости виброкапиллярной равновесной формы может происходить лишь конечным числом линейно независимых способов.*

В частности, из следствия 2 следует, что всегда существует число N, превышающее число неустойчивых возмущений для виброкапиллярной равновесной формы, которое определяет число используемых базисных функций для построения приближенных проекционных методов решения задачи об относительных движениях вида (1), а следовательно, исходной нелинейной задачи (2). При этом в представлении (1) $H_0(y, z)$ — решение задачи о виброкапиллярной равновесной форме (а не капиллярной задачи), $f_n(y, z)$ — собственные функции задачи (20).

5. Задача о виброкапиллярной равновесной форме: простейшие примеры неоднозначной разрешимости, потери устойчивости, бифуркации, стабилизации. Задача о виброкапиллярной равновесной форме является обобщением на исследуемый случай классической задачи о капилляре, для которой в случае канонических областей Q доказаны теоремы об однозначной разрешимости при $B > 0$ [12]. На простейших случаях цилиндрической области и $\alpha = \pi/2$, когда виброкапиллярная поверхность совпадает с капиллярной, построим ряд контрпримеров, показывающих, что задача (8), (7) при любых числах B может иметь неоднозначное решение. Укажем способы потери устойчивости и некоторые типы бифуркаций, объясним известный и не описанный ранее физический эффект стабилизации поверхности при $B < 0$.

Пусть для определенности Q — цилиндрический объем кругового сечения, кроме того, $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$ (продольные вибрации).

***Пример* 1 $(k^2 << 1)$.** В этом случае задача (11)–(13) имеет решение вида $H_0 = 0$, $\Phi_1 = 0$, $H_* = 0$ („тривиальное" положение равновесия). Воспользуемся спектральным признаком устойчивости для анализа найденной „тривиальной" виброкапиллярной равновесной формы. Точки бифуркации могут быть найдены из спектрального признака. Значениями k и $\mu = \mu(k)$, при котором происходит бифуркация Σ_0 по f_{pq}, есть такие, при которых $\lambda_{pq}(k, \mu) = 0$. Проведем соответствующие преобразования и получим задачу на собственные значения для определения $\lambda_{pq}(\mu)$:

$$-\mu \Delta f_{pq} + \mu B f_{pq} + \frac{1}{2} f_{*pq} = \lambda_{pq}(\mu) f_{pq} \quad \text{в} \quad Q_0, \quad \frac{\partial f_{pq}}{\partial e} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Sigma_0,$$

$$\Delta \Psi_{pq} = 0 \quad \text{в} \quad Q_0, \quad \frac{\partial \Psi_{pq}}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S, \quad \Psi_{pq} = f_{pq} \quad \text{на} \quad \Sigma_0,$$

$$f_{*pq} = \frac{\partial \Psi_{pq}}{\partial x} \quad \text{на} \quad \Sigma_0.$$

Легко проверить, что

$$\Psi_{pq} = f_{pq} \frac{\operatorname{ch}(\kappa_{pq}(x+h))}{\operatorname{ch}(\kappa_{pq} f)}, \quad f_{*pq} = f_{pq} \kappa_{pq} \operatorname{th}(\kappa_{pq} f_h),$$

$$\lambda_{pq}(\mu) = \mu(B + \kappa_{pq}^2) f_{pq} + \frac{1}{2} \kappa_{pq} \operatorname{th}(\kappa_{pq} f_h),$$

где $f_{pq}(r, \theta) = J_p(\kappa_{pq} r) \frac{\sin}{\cos}(p\theta)$, $J_p'(\kappa_{pq}) = 0$ и f_h — расстояние от дна цилиндра до плоской формы равновесия.

Отсюда следует вывод 1 (*о стабилизации*). Случай характеризуется отсутствием точек бифуркации при вертикальных (продольных) вибрациях, поскольку с ростом $\mu^{-1} \to \infty$, $\mu \to 0$: $\min\limits_{pq} \lambda_{pq} \underset{\mu \to 0}{\to} \frac{1}{2} \min\limits_{pq} \kappa_{pq} \operatorname{th}(\kappa_{pq} f_h) > 0$. Это подтверждает *эффект стабилизации*, который заключается в том, что при продольных вибрациях с ростом μ^{-1} $(\mu \to 0)$ всегда можно добиться стабилизации плоской формы равновесия [5, 6].

***Пример* 2 $(k^2 \sim 1)$.** В этом случае задача (12) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + k^2 \Phi = k^2 x, \quad -f_h < x < 0, \quad \Phi'(-f_h) = 0, \quad \Phi(0) = 0.$$

Ее решение — $\Phi = \left(x - \dfrac{\sin(x f_h)}{k \cos(k f_h)} \right)$, а (11)–(13) действительно определяют плоскую виброкапиллярную равновесную форму

$$H_0 = 0, \quad H_* = \left(1 - \frac{1}{k \cos(k f_h)} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{x=0}, \quad \Phi = \left(x - \frac{\sin(x f_h)}{k \cos(k f_h)} \right).$$

Как и в предыдущем примере, воспользуемся спектральным признаком устойчивости для анализа устойчивости формы равновесия и определения точек бифуркации. Спектральная задача для определения $\lambda_{pq}(k,\mu)$ имеет вид

$$-\mu\,\Delta f_{pq} + \mu B f_{pq} - \frac{1}{2}(H_* - 1) f_{1pq} = \lambda_{pq} f_{pq} \quad \text{на} \quad \Sigma_0,$$

$$\frac{\partial f_{pq}}{\partial e} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Sigma_0, \quad \Delta\Psi_{pq} + k^2\Psi_{pq} = 0 \quad \text{в} \quad Q_0,$$

$$\frac{\partial \Psi_{pq}}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \langle S\rangle, \quad \Psi_{pq} + H_1 f_{pq} = f_{pq}, \quad f_{*pq} = \frac{\partial \Psi_{pq}}{\partial x} \quad \text{на} \quad \Sigma_0.$$

Тогда $\Psi_{pq} = (1 - H_*) f_{pq} b_{pq}(x)$, где

$$b_{00}(x) = \frac{\cos(k(x + f_h))}{\cos(k f_h)},$$

$$b_{pq}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch}(\xi(x + f_h))}{\operatorname{ch}(\xi f_h)}, & k^2 < \kappa_{pq}^2; \\ \dfrac{\cos(\xi(x + f_h))}{\cos(\xi f_h)}, & k^2 > \kappa_{pq}^2, \ pq \neq 00, \ \xi = \left|k^2 - \kappa_{pq}^2\right|^{1/2}. \end{cases}$$

Собственные формы имеют вид

$$f_{00} = 1, \quad f_{pq} = (1 - H_1)\, b'_{pq}(0)\, f_{pq}(y, z),$$

а собственные значения определяются формулами

$$\lambda_{00} = \mu B - \frac{1}{2}(1 - H_*)^2 k \operatorname{tg}(k f_h),$$

$$\lambda_{pq} = \mu(B + \kappa_{pq}^2) + \frac{1}{2}(1 - H_*)^2 b'_{pq}(0) = \mu(B + \kappa_{pq}^2) +$$

$$+ \frac{1}{2}(1 - H_1)^2 \xi \begin{cases} \operatorname{th}(\xi f_h), & k^2 < \kappa_{pq}^2; \\ -\operatorname{th}(\xi f_h), & k^2 > \kappa_{pq}^2, \ pq \neq 00, \ \xi = \left|k^2 - \kappa_{pq}^2\right|^{1/2}. \end{cases}$$

Точки бифуркации определяются из уравнений $\lambda_{pq}(k, \mu(k)) = 0$.

На основании изложенного можно сделать следующие выводы.

2 (*о неединственности решения*). Легко проверить, что всегда существуют такие k^2, что одно из $\lambda_{pq} = 0$. При таких k^2 для задачи о виброкапиллярной равновесной форме будет нарушаться утверждение теоремы об однозначной разрешимости [12]. Кроме того, в окрестности таких точек может происходить бифуркация „тривиальной" (плоской поверхности Σ_0) формы равновесия.

3 (*о бифуркации*). Собственное значение λ_{01} имеет кратность 1 и ему соответствует собственная функция $J_0(\kappa_{01} r) = f_{01}(r, \theta)$. По теореме М. А. Красносельского в окрестности значения k^2: $\lambda_{01}(k) = 0$ всегда существует нетривиальное (осесимметричное) решение задачи о виброкапиллярной равновесной форме, т. е. происходит осесимметричная бифуркация „тривиальной" плоской формы равновесия.

4 (*о неустойчивости*). Поскольку для любых чисел B $\lambda_{pq}(k,\mu)$ — знакопериодическая функция, то для любого B существует k^2: $\lambda_{pq} < 0$, что в соответствии со спектральным принципом устойчивости свидетельствует о потере

устойчивости „тривиальной" виброкапиллярной равновесной формы, которая может происходить даже при положительных числах B.

Таким образом, нами построена корректная схема линеаризации усложненной дополнительными членами, связанными с решением дополнительной задачи со свободной границей, задачи теории поверхностных волн в ограниченном объеме. При этом получены обобщения классических задач теории малых волн на поверхности жидкости.

1. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 440 с.
2. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – Киев: Наук. думка, 1990. – 296 с.
3. *Луковський І. О., Тимоха О. М.* Про вплив вібрації на геометрію та стійкість вільної поверхні обмеженого об'єму рідини // Допов. АН України. – 1993. – № 3. – С. 65–68.
4. *Любимов В. Д., Черепанов А. А.* О возникновении стационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1986. – № 6. – С. 8–13.
5. *Wolf G. H.* The dynamic stabilization of the Raileigh–Taylor instability on the corresponding dynamic equilibrium // Z. Physik. – 1969. – **227**, № 3. – S. 291–300.
6. *Wolf G. H.* Dynamic stabilization of the interchange instability of a liquid-gas interface // Phys. Rev. Lett. – 1970. – **24**, № 9. – P. 444–446.
7. *Ганиев Р. Ф., Лакиза В. Д., Цапенко А. С.* О динамическом поведении свободной поверхности жидкости в условиях, близких к невесомости, при вибрационном воздействии // Прикл. механика. – 1977. – **13**, № 5. – С. 102–107.
8. *Овсянников В. Л., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. – Новосибирск: Наука, 1985. – 318 с.
9. *Тимоха А. Н.* Поведение свободной поверхности жидкости в вибрирующем сосуде. – Киев, 1992. – 46 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики, 92.22).
10. *Low-gravity* fluid mechanics. Mathematical theory of capillary phenomena / A. D. Myshkis, V. G. Babsky, N. D. Kopachevskii, L. A. Slobozhanin, A. D. Typsov. – Berlin etc.: Springer, 1987. – XIX. + 583 p.
11. *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* Об одном классе краевых задач в теории поверхностных волн // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 359–364.
12. *Уральцева Н. Н.* Разрешимость задачи о капиллярах // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1975. – № 1, вып. 1. – С. 143–149.

Получено 22.12.95