УДК 519.21

І. К. Мацак (Держ. академія легк. пром-сті України, Київ)

СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ З БЕЗУМОВНИМ БАЗИСОМ

The well known results of weak convergence for the maximum of real independent random variables is generalized for the case of random variables with values in Banach spaces with an unconditional basis.

Відомі результати про слабку збіжність максимумів дійсних незалежних випадкових величин узагальнюються на випадкові величини із значеннями у банахових просторах з безумовним базисом.

1. Вступ. Нехай $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин (н. о. р. в. в.) з функцією розподілу $F(x) = P(\eta < x)$, $z_n = \max\limits_{1 \le k \le n} \eta_k$. Припустимо, що для деяких констант $b_n > 0$, a_n

$$\lim_{n \to \infty} P(b_n(z_n - a_n) < x) = G(x) \tag{1}$$

і $G(x)$ — невироджена функція розподілу. Відомо [1–3], що тоді $G(x)$ буде належати до одного з трьох типів екстремальних значень:

$$G_1(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$G_2(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \exp(-x^{-\alpha}), & \alpha > 0, \ x > 0, \end{cases}$$

$$G_3(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & \alpha > 0, \ x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Тому можна вважати, що в рівності (1) $G(x) = G_i(x)$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Надалі через E позначатимемо банахів простір з безумовним базисом (e_n), $\| \ \|$ — норма в E.

Кажуть, що система $(e_n) \subset E$ є безумовним базисом в E, якщо довільний елемент $x \in E$ однозначно представляється у вигляді суми ряду $x = \sum x_n e_n$, який збігається при будь-якій перестановці доданків.

Всі основні означення й результати з теорії банахових просторів, які ми використовуємо, можна знайти в [4, 5].

Так, для безумовного базису (e_n) існує таке число K_e (безумовна константа), що коли $x = \sum x_n e_n$ та для всіх n $|c_n| \le |x_n|$, то $\sum c_n e_n \in E$ і

$$\left\| \sum c_n e_n \right\| \le K_e \|x\|. \tag{2}$$

Якщо безумовна константа $K_e = 1$, то простір E буде банаховою граткою, в якій порядок визначається таким чином:

$$\sum x_n e_n \ge 0 \Leftrightarrow x_n \ge 0 \quad \text{для всіх} \quad n \ge 1.$$

Якщо безумовна константа $K_e \ne 1$, то E буде банаховою граткою в еквівалентній нормі $\|x\|_0 = \sup\{\|y\| : |y| \le |x|, \ y \in E\}$. Тому в просторі E *для довільних* елементів $x, y \in E$, $x = \sum x_n e_n$, $y = \sum y_n e_n$, існує верхня межа $\max(x, y) = \sum \max(x_n, y_n) e_n$. Аналогічно вводиться верхня межа у випадку, коли Y_1 та Y_2 — випадкові елементи (в. е.) із значеннями в E, $Y_1 = \sum \xi_{n1} e_n$, $Y_2 = \sum \xi_{n2} e_n$: $\max(Y_1, Y_2) = \sum \max(\xi_{n1}, \xi_{n2}) e_n$. Звичайно, $\max(Y_1, Y_2)$ буде борелівським в. е. в E [6].

Таким чином, приходимо до задачі: узагальнити рівність (1) на нескінченновимірний випадок.

Розглянемо послідовність н. о. р. в. в. ζ, ζ_1, ζ_2, для яких функція розподілу $P(\zeta < x) = G(x)$ задовольняє рівність (1), (σ_i) — послідовність дійсних чисел, $\sigma_i \geq 0$, $i \geq 1$. Припустимо, що в нормі E збігаються ряди

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i e_i, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \sigma_i e_i \quad \text{м. н.}, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \sigma_i e_i \quad \text{м. н.}, \tag{5}$$

де м. н. — означає збіжність майже напевно.

Покладемо

$$\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i e_i, \quad X = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \sigma_i e_i, \quad Z = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \sigma_i e_i.$$

(X_n) — незалежні копії в. е. X,

$$X_n = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{ni} \sigma_i e_i,$$

$$Z_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k = \sum_{i=1}^{\infty} z_{ni} \sigma_i e_i,$$

$$z_{ni} = \max_{1 \leq k \leq n} \eta_{ki}.$$

Для в. е. Y із значеннями в E через P_Y будемо позначати розподіл імовірностей в. е. Y в E. Кажуть, що послідовність (Y_n) в. е. в E збігається за розподілом до в. е. Y (і позначають $Y_n \overset{\mathcal{D}}{\Rightarrow} Y$), якщо послідовність розподілів (P_{Y_n}) слабко збігається до розподілу P_Y, тобто якщо для будь-якої обмеженої, неперервної функції $f\colon E \to R^1$

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f(x) P_{Y_n}(dx) = \int_E f(x) P_Y(dx).$$

Природним узагальненням рівності (1) у просторі E є співвідношення

$$b_n(Z_n - \sigma a_n) \overset{\mathcal{D}}{\Rightarrow} Z. \tag{6}$$

У роботі [7] таке узагальнення одержано для гауссівських в. е. із значеннями у просторі l_q, $1 \leq q < \infty$. Дана стаття присвячена дослідженню слабкої збіжності екстремальних значень у загальному випадку банахового простору з безумовним базисом.

2. Слабка збіжність екстремальних значень. Загальний розподіл. Нагадаємо, що банахова гратка B називається q-вгнутою, $1 \le q < \infty$, якщо існує така константа $D_q(B)$, що для будь-яких елемента $x_i \in B$, $i = 1, n$, та n

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^q \right)^{1/q} \le D_q(B) \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^q \right)^{1/q} \right\|.$$

Теорема 1. *Нехай простір E буде q-вгнутою банаховою граткою для деякого $1 \le q < \infty$, ряд* (3) *збігається і виконуються умова* (1) *та*

$$\left(M |\eta|^q \right)^{1/q} < \infty. \tag{7}$$

Тоді збігається ряд (4) *і вірне твердження* A_1: *якщо $G(x) = G_i(x)$, $i \in \{1, 3\}$, або $G(x) = G_2(x)$ та $\alpha > q + 1$, то ряд* (5) *збігається і справедливе асимптотичне співвідношення* (6).

Доведення. Істотне значення далі буде мати наступна лема.

Лема 1. *Якщо E — q-вгнута банахова гратка для деякого $1 \le q < \infty$, ряд* (3) *збігається, Y — в. е. в E, $Y = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \sigma_i e_i$ і ряд збігається м. н. в нормі E, $\sup\limits_{i \ge 1} \left(M |\xi_i|^q \right)^{1/q} = C_q < \infty$, то*

$$\left(M \|Y\|^q \right)^{1/q} \le D_q(E) C_q \|\sigma\|, \tag{8}$$

де $D_q(E)$ — константа в означенні q-вгнутості.

Оцінка (8) випливає із результатів роботи [6].

Застосуємо лему 1 для перевірки збіжності ряду (4). В умовах теореми 1 для $m > k$ маємо

$$\left(M \left\| \sum_{i=k}^{m} \eta_i \sigma_i e_i \right\|^q \right)^{1/q} \le C \left\| \sum_{i=k}^{m} \sigma_i e_i \right\| \underset{k \Rightarrow \infty}{\Rightarrow} 0,$$

тобто ряд $\sum_{i=k}^{\infty} \eta_i \sigma_i e_i$ збігається в просторі $L_q(\Omega, E)$. Оскільки η_i — назалежні в. в., то він буде збігатися і в нормі E м. н. (див. [8, с. 212]).

Неважко установити, що при $x > 0$

$$P(|\zeta| > x) \le \begin{cases} \exp(-x+1), & i = 1; \\ (e-1)\, x^{-\alpha}, & i = 2; \\ \exp(-x^{\alpha}), & i = 3, \end{cases} \tag{9}$$

(див. [7], леми 2, 3). Тому в умовах теореми 1

$$M |\zeta|^q < \infty. \tag{10}$$

Звідси, повторюючи наведені вище аргументи збіжності ряду (4), одержуємо збіжність ряду (5).

Далі скористаємось наступними умовами слабкої збіжності.

Якщо Y, Y_n, $n \ge 1$, — в. е. в E такі, що

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i, \quad Y_n = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{ni} e_i,$$

J_1) для будь-яких цілих m, $i_1, i_2, \ldots, i_m$, послідовність векторів $\overline{\xi}_n = (\xi_{ni_1}, \xi_{ni_2}, \ldots, \xi_{ni_m})$ збігається за розподілом до вектора $\overline{\xi} = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots \ldots, \xi_{i_m})$ у просторі $\mathbb{R}^m$;

J_2) для будь-якого $\delta > 0$

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{n \geq 1} P\left(\left\|\sum_{i=m}^{\infty} \xi_{ni} e_i\right\| > \delta\right) = 0,$$

то $Y_n \overset{\mathcal{D}}{\Rightarrow} Y$ (див. [8, с. 182–185]).

Для доведення співвідношення (6) теореми 1 перевіримо виконання умов J_1) та J_2). Для будь-яких $i_1, i_2, \ldots, i_m$, $m \geq 1$, компоненти вектора

$$\overline{\xi}_n = (b_n \sigma_{i_1}(z_{ni_1} - a_n), \ldots, b_n \sigma_{i_m}(z_{ni_m} - a_n))$$

незалежні і на підставі рівності (1) збігаються за розподілом до вектора $\overline{\xi} = (\sigma_{i_1}\zeta_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_m}\zeta_{i_m})$ у просторі $\mathbb{R}^m$.

Таким чином, для доведення теореми залишається перевірити умову J_2): для будь-якого $\delta > 0$

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{n \geq 1} P\left(\left\|\sum_{i=m}^{\infty} b_n (z_{ni} - a_n)\sigma_i e_i\right\| > \delta\right) = 0. \tag{11}$$

Застосовуючи нерівність Маркова та оцінку (8) леми 1, одержуємо

$$P\left(\left\|\sum_{i=m}^{\infty} b_n (z_{ni} - a_n)\sigma_i e_i\right\| > \delta\right) \leq \delta^{-q} M \left\|\sum_{i=m}^{\infty} b_n (z_{ni} - a_n)\sigma_i e_i\right\|^q \leq$$

$$\leq \delta^{-q} D_q(E)^q M |b_n(z_n - a_n)|^q \left\|\sum_{i=m}^{\infty} \sigma_i e_i\right\|^q. \tag{12}$$

Відомо [9], що при виконанні умов (1), (7)

$$\lim_{n \Rightarrow \infty} M |b_n(z_n - a_n)|^q = M|\zeta|^q. \tag{13}$$

Рівність (11) одержуємо тепер із оцінок (10), (12), (13) та збіжності ряду (3). Теорема 1 доведена.

Кажуть, що банахів простір B має котип r, $2 \leq r < \infty$, коли із збіжності м. н. ряду $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$ випливає $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^r < \infty$, де ε_i — симетричні н. в. в. Бернуллі, $P(\varepsilon_i = +1) = P(\varepsilon_i = -1) = 1/2$.

***Наслідок* 1.** *Нехай E має котип r для деякого $2 < r < \infty$ ($r = 2$), ряд* (3) *збігається, виконуються умови* (1) *та* (7) *для $q > r$ ($q = 2$). Тоді збігається ряд* (4) *і вірне твердження A_1 теореми* 1.

***Наслідок* 2.** *Нехай $E = l_q$, $1 \leq q < \infty$, — простір абсолютно сумовних у степені q послідовностей і виконуються співвідношення* (1) *та* (7). *Тоді еквівалентні умови*:

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^q < \infty,$

ii) *ряд* (4) *збігається і справедливе твердження* A_1 *теореми* 1.

Якщо банахова гратка має котип r для деякого $2 < r < \infty$ $(r = 2)$, то вона буде q-вгнутою при $q > r$ $(q = 2)$ [5, с. 100]. Звідси і з теореми 1 випливає наслідок 1. Дійсно, досить перейти до нової еквівалентної норми $\|x\|_0 = \sup\{\|y\| : |y| \le |x|,\ y \in E\}$, в якій простір E буде q-вгнутою банаховою граткою при $q > r$ $(q = 2)$.

Оскільки кожний простір l_q, $1 \le q < \infty$, буде q-вгнутою банаховою граткою, то наслідок 2 одержуємо із теореми 1 та наступного допоміжного твердження.

Лема 2. *Нехай* $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ *— послідовність н. о. р. в. в.* $\xi \ge 0$, $M\xi < \infty$, d_i, $i \ge 1$, *— дійсні числа такі, що* $d_i \ge 0$, $d_i \Rightarrow 0$ *при* $i \Rightarrow \infty$. *Тоді збіжність м. н. ряду* $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i d_i$ *еквівалентна збіжності ряду* $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$.

Дійсно, для збіжності ряду $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i d_i$ м. н. необхідно і достатньо, щоб [10, с. 53]

$$\sum_{i=1}^{\infty} M \min(1, \xi_i d_i) < \infty. \tag{14}$$

Очевидно, що $\sum_{i=1}^{\infty} d_i < \infty \Rightarrow (14)$.

Припустимо, що умова (14) виконується. Це еквівалентно нерівності

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(P(\xi_i d_i > 1) + d_i M\xi_i'\right) < \infty, \tag{15}$$

$$\xi_i' = \begin{cases} \xi, & \xi < d_i^{-1}; \\ 0, & \xi \ge d_i^{-1}. \end{cases}$$

За умовой $d_i \Rightarrow 0$ при $i \Rightarrow \infty$. Тому м. н. $\xi_i' \le \xi$ і $\xi_i' \Rightarrow \xi$, $i \Rightarrow \infty$. Звідси за теоремою Лебега маємо

$$M\xi_i' \Rightarrow M\xi, \quad i \Rightarrow \infty, \tag{16}$$

(15), (16) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} d_i < \infty$. Лема 2 доведена.

3. Слабка збіжність екстремальних значень. Гауссівський випадок. Для гауссівських в. е. слабку збіжність екстремальних значень можна одержати у загальному банаховому просторі з безумовним базисом. Далі будуть розглядатися лише гауссівські в. в.: η — стандартна гауссівська в. в. з функцією розподілу

$$F(x) = \Phi(x), \tag{17}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\, dy, \quad \varphi(y) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2).$$

Покладемо

$$\begin{aligned} a_n &= (2\ln(n))^{1/2} - (2\ln(n))^{-1/2}(\ln\ln(n) + \ln(4\pi))/2, \\ b_n &= (2\ln(n))^{1/2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Теорема 2. *Нехай* E *— довільний банахів простір з безумовним базисом,* *ряди* (4), (5) *збігаються і виконується умова* (17). *Тоді справедливе асимптотичне співвідношення* (6) *з* $G(x) = G_1(x)$ *та* a_n, b_n, *які задаються рівностями* (18).

Доведення. В R^1 для гауссівської в. в. η співвідношення (1) з a_n, b_n, які задаються рівностями (18), та $G(x) = G_1(x)$ — це класичний результат [2, 3]. Тому, як і в теоремі 1 для доведення співвідношення (6), досить установити рівність (11) у гауссівському випадку.

При умові (17) існують абсолютні константи $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ такі, що для довільних $n \geq 2$, $x > 0$

$$P(b_n|z_n - a_n| > x) \leq C_1 \exp(-C_2 x). \tag{19}$$

Оцінка (19) міститься в роботі [7].

Нехай (ε_i) — послідовність симетричних н. в. в. Бернуллі, яка не залежить від послідовностей (η_i) та (ζ_i),

$$\zeta_i' = \varepsilon_i \zeta_i, \quad z_{ni}' = \varepsilon_i b_n (z_{ni} - a_n).$$

Елементарно перевіряється нерівність

$$1 - e^{-y} \geq \frac{y}{e} \quad \text{при} \quad 0 \leq y < 1.$$

Поклавши $y = e^{-x}$, при $x \geq 0$ маємо

$$1 - \exp(-e^{-x}) \geq \exp(-x-1).$$

Звідси, враховуючи рівність $G(x) = G_1(x)$, при $x \geq 0$ одержуємо

$$P(|\zeta_i'| > x) = 1 - \exp(-e^{-x}) + \exp(-e^{x}) \geq \exp(-x-1). \tag{20}$$

Із (19), (20) випливає оцінка

$$P(|z_{ni}'| > x) \leq e\, C_1 P(|\zeta_i'| > C_2 x). \tag{21}$$

Величини ζ_i', z_{ni}', $i \geq 1$, незалежні та симетричні. Тому (див. [8, с. 243], теорема 4.4) для будь-яких натуральних $m_2 > m_1$

$$P\left(\left\|\sum_{i=m_1}^{m_2} z_{ni}' \sigma_i e_i\right\| > x\right) \leq 6\, C_1\, P\left(3C_1\left\|\sum_{i=m_1}^{m_2} \zeta_i' \sigma_i e_i\right\| > C_2 x\right). \tag{22}$$

Збіжність ряду (5) та оцінка (2) забезпечують збіжність ряду $\sum_i \zeta_i' \sigma_i e_i$ м. н. в нормі E. Отже, для будь-якого $\delta > 0$

$$\lim_{m\to\infty} P\left(\left\|\sum_{i=m}^{\infty} \zeta_i' \sigma_i e_i\right\| > \delta\right) = 0. \tag{23}$$

Знову скориставшись властивістю (2) безумовного базису, маємо

$$P\left(\left\|\sum_{i=m}^{\infty} b_n (z_{ni} - a_n) \sigma_i e_i\right\| > x\right) \leq P\left(\left\|\sum_{i=m}^{\infty} z_{ni}' \sigma_i e_i\right\| > K_e^{-1} x\right). \tag{24}$$

Щоб отримати рівність (11), нам залишається застосувати оцінки (22)–(24). Теорема 2 доведена.

В наступних твердженнях незалежність гауссівських в. в. η_i замінюється на більш слабку умову: для будь-яких $i \neq j$

$$|M\eta_i\eta_j| < 1. \tag{25}$$

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* (17), (25) *і в нормі* E *ряд* $\sum_i \ln(i)\sigma_i e_i$ *збігається, то справедливе твердження* A_3: *збігаються ряди* (4), (5) *і виконується асимптотичне співвідношення* (6) *з* $G(x) = G_1(x)$ *та* a_n, b_n, *які задаються рівністю* (18).

Доведення. Для $G(x) = G_1(x)$ із оцінки (9) випливає, що при $C > 1$ збігається ряд $\sum_i P(|\zeta_i| > C\ln(i))$. Це означає, що м. н. $\sup\limits_{i>1} |\zeta_i|/\ln(i) < \infty$.

Далі, застосовуючи нерівність (2), маємо

$$\left\|\sum_{i=m}^{\infty} \zeta_i\sigma_i e_i\right\| \le K_e \sup_{i>1}\frac{|\zeta_i|}{\ln(i)}\left\|\sum_{i\ge m} \ln(i)\sigma_i e_i\right\|. \tag{26}$$

Звідси в умовах теореми одержуємо збіжність м. н. ряду (5) в E. Збіжність гауссівського ряду (4) встановлюється аналогічно.

При умовах (17), (25) компоненти вектора $b_n(Z_n - \sigma a_n)$ асимптотично незалежні [2, с. 229], тобто умова J_1), необхідна для слабкої збіжності, виконується. Таким чином, залишається перевірити рівність (11). Аналогічно (26) маємо

$$\left\|\sum_{i=m}^{\infty} b_n(z_{ni} - a_n)\sigma_i e_i\right\| \le K_e \sup_{i>1}\frac{|b_n(z_{ni} - a_n)|}{\ln(i)}\left\|\sum_{i\ge m} \ln(i)\sigma_i e_i\right\|. \tag{27}$$

Із оцінки (19) при $C > 1/C_2$ одержуємо

$$P\left(\sup_{i\ge m}\frac{|b_n(z_{ni} - a_n)|}{\ln(i)} > C\right) \le \sum_{i=m}^{\infty} P(|b_n(z_{ni} - a_n)| > C\ln(i)) \le$$

$$\le C_1\sum_{i=m}^{\infty} i^{-CC_2} < \infty. \tag{28}$$

Оскільки ряд $\sum_i \ln(i)\sigma_i e_i$ збігається в E, то (27), (28) $\Rightarrow$ (11).

Наслідок 3. *Нехай простір* E *має скінченний котип і виконуються співвідношення* (17), (25). *Тоді еквівалентні умови*:

i) *ряд* (3) *збігається*;

ii) *ряд* (4) *збігається*;

iii) *справедливе твердження* A_3 *теореми* 3.

Наслідок 4. *Нехай простір* $E = l_q$, $1 \le q < \infty$, *і виконуються співвідношення* (17), (25). *Тоді еквівалентні умови*:

i) $\sum\limits_{i\ge 1} |\sigma_i|^q < \infty$;

ii) *справедливе твердження* A_3 *теореми* 3.

Відомо [11], що у просторах скінченного котипу збіжність рядів (3), (4) у гауссівському випадку еквівалентна. Звідси і з попередніх міркувань неважко одержати наслідки 3, 4.

Наведемо без доведення наступне твердження.

Наслідок 5. *Нехай* $E = c_0$ — *простір послідовностей, які збігаються до* 0, *і виконуються співвідношення* (17), (25). *Тоді еквівалентні умови*:

$i)$ *для будь-якого* $\delta > 0 \quad \sum_{i \geq 1} \exp\left(-\frac{\delta}{\sigma_i}\right) < \infty$;

$ii)$ *ряд* (5) *збігається*;

$iii)$ *справедливе твердження* A_3 *теореми* 3.

1. *Gnedenko B. V.* Sur la distribution limit du terme maximum d'une série aléatoire // Ann. Math. – 1943. – **44**. – P. 423–453.
2. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
3. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. – М.: Мир, 1989. – 392 с.
4. *Мильман В. Д.* Геометрическая теория пространств Банаха // Успехи мат. наук. – 1970. – **25**, вып. 3. – С. 113–174.
5. *Lindenstraus J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. – Berlin etc.: Springer, 1979. – V. 2. – 243 p.
6. *Matsak I. K., Plichko A. M.* On maximums of independent random variables in a function Banach lattice (To appear).
7. *Мацак І. К.* Слабка збіжність екстремальних значень незалежних гауссівських випадкових елементів у просторах l_p, $1 \leq p < \infty$ // Теорія ймовірностей та мат. статистика (У друці).
8. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
9. *Pickand J.* Moment convergence of sample extremes // Ann. Math. Statist. – 1968. – **39**, № 3. – P. 881–889.
10. *Кахан Ж.-П.* Случайные функциональнные ряды. – М.: Мир, 1973. – 304 с.
11. *Chobanjan S. A., Tarieladze V. I.* Gaussian characterizations of certain Banach spaces // J. Multivar. Anal. – 1977. – **7**, № 1. – P. 183–203.

Одержано 23.02.95