УДК 517. 2

**М. Л. Свердан** (Черновиц. ун-т)

# ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ И МАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Stability of solution of differential equations with impulsive effects and Markov's coefficients are investigated by using the second Lyapunov's method.

Досліджуються на стійкість розв'язки диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями і марковськими коефіцієнтами за допомогою другого методу Ляпунова.

**1. Определения и обозначения.** Пусть $(\Omega, F, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $\{\xi(t), t \geq 0\}$ — феллеровский марковский процесс со значениями в метрическом пространстве $\mathbb{Y}$ с переходной вероятностью $P(s, y, t, \Gamma)$, $\{\eta_k, k \geq 0\}$ — феллеровская цепь Маркова со значениями в метрическом пространстве $\mathbb{H}$ с переходной вероятностью на $k$-м шаге $P_k(h, G)$. Предположим, что заданы:

1) измеримые по совокупности переменных отображения $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Y} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $g\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Y} \times \mathbb{H} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие по последнему аргументу условию Липшица равномерно по всем остальным аргументам

$$|f(t, y, x_1) - f(t, y, x_2)| + |g(t, y, h, x_1) - g(t, y, h, x_2)| \leq \Lambda |x_1 - x_2| \tag{1}$$

и условию

$$\sup_{\substack{t \geq 0,\, y \in \mathbb{Y} \\ h \in \mathbb{H}}} (|f(t, y, 0) + g(t, y, h, 0)|) = \alpha < \infty; \tag{2}$$

2) монотонно возрастающая, стремящаяся к бесконечности последовательность моментов времени $S = \{t_n, n \geq \mathbb{N}\}$;

3) число $t_0 \geq 0$ и вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Вектор-функция $\{x(t), t \geq t_0\}$ называется решением задачи Коши

$$x(t_0) = x_0 \tag{3}$$

для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, \xi(t), x) \tag{4}$$

с импульсным воздействием

$$\Delta x|_{t_k} = g(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x), \quad t_k \in S, \tag{5}$$

если для нее выполнено (3) и для любых реализаций марковского процесса $\xi(t)$ и цепи Маркова $\eta_k$ выполняются равенства

$$x(t) = x(s) + \int_s^t f(\tau, \xi(\tau), x(\tau))\, d\tau \tag{6}$$

при всех $s \in (t_k, t_{k+1})$, $t \in (s, t_{k+1})$, $t_k \geq t_0$;

$$x(t_k + 0) = x(t_k) + g(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \tag{7}$$

при всех $t_k \ge t_0$ и $k \ge \inf\{m:\ t_m \ge t_0\}$. В этом определении по аналогии с [1] функция $x(t)$ считается непрерывной слева. Если из каких-либо соображений предпочтительно считать ее непрерывной справа, то (7) следует переписать в виде

$$x(t_k) = x(t_k - 0) + g(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x(t_k - 0)). \tag{8}$$

Из результатов [1] следует, что наложенные выше ограничения на $S$, $g$ и $f$ гарантируют существование единственного решения (3)–(5) при любых $t_0 \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ и заданных реализациях марковского процесса $\{\xi(t), t \ge t_0\}$ и цепи Маркова $\{\eta_k, k \ge t_0\}$. Поскольку распределения реализаций однозначно определяются начальными значениями $\xi(t_0) = y$ и $\eta_{k_0} = h$, то вероятностные характеристики упомянутого выше решения можно однозначно определить с помощью начальных данных $\xi(t_0) = y$, $\eta_k = h, x(t_0) = x$ и записать его в виде $x(t, t_0, y, h, x_0)$.

Обозначим через $P_k((y, h), \Gamma \times G)$ переходную вероятность цепи Маркова $(\xi(t_k), \eta_k)$ на $k$-м шаге. В соответствии с принятыми в теории марковских процессов обозначениями [2] вероятности событий, связанных с этой цепью Маркова, снабдим индексами так, чтобы выполнялись равенства

$$\mathbb{P}^{t_k}_{y,h}(\xi(t_{k+1}) \in \Gamma, \eta_{k+1} \in G) = P_k((y, h), \Gamma \times G)$$

при всех $t_k \ge t_0$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ и борелевых $\Gamma \in \mathbb{Y}$ и $G \subset \mathbb{H}$.

Теперь можно ввести функцию

$$P_k((y, h, x), \Gamma \times G \times C) \overset{\mathrm{df}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=} \mathbb{P}^{t_k}_{y,h}(x(t_{k+1}, t_k, y, h, x) \in C,\ \xi(t_{k+1}) \in \Gamma,\ \eta_{k+1} \in G) \tag{9}$$

при всех $t_k \in S \cup \{t_0\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ и борелевых $C \subset \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subset \mathbb{Y}$, $G \subset \mathbb{H}$. Эта функция позволяет определить на последовательности измеримых скалярных функций $v_k(y, h, x)$ оператор

$$(Lv_k)(y, h, x) \overset{\mathrm{df}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{\mathbb{Y} \times \mathbb{H} \times \mathbb{R}^n} P_k((y, h, x), du \times dz \times dw) v_{k+1}(u, z, w) - v_k(y, h, x), \tag{10}$$

который будем называть дискретным оператором Ляпунова для дифференциального уравнения (4) с импульсным воздействием (5). Если $t_k = k\beta$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и некотором $\beta > 0$, функции $f$ и $g$ не зависят от $t$, процесс Маркова $\xi(t)$ и цепь Маркова $\xi_k$ однородны, то систему (4), (5) будем называть автономной. В этом случае индекс $k$ у функций $P_k((y, h, x), \Gamma \times G \times C)$ можно опустить и дискретный оператор Ляпунова определить равенством [3]

$$(Lv)(y, h, x) \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{\mathbb{Y} \times \mathbb{H} \times \mathbb{R}^n} P((y, h, x), du \times dz \times dw) v(y, z, w) - v(y, h, x). \tag{11}$$

При развитии второго метода Ляпунова для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (4), (5) понадобятся специальные последовательности упомянутых выше функций $v_k(y, h, x)$. Назовем последовательность неотрицательных функций $v_k(y, h, x)$ функцией Ляпунова, если:

1) при всех $k \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$, $x \in \mathbb{R}^n$ определено выражение (10);

2) $$\inf_{\substack{k \in \mathbb{N},\, y \in \mathbb{Y} \\ h \in \mathbb{H},\, |x| \geq r}} v_k(y, h, x) = \overline{v}(r) \to \infty \quad \text{при } r \to \infty; \tag{12}$$

3) $$\sup_{\substack{k \in \mathbb{N},\, y \in \mathbb{Y} \\ h \in \mathbb{H},\, |x| \leq r}} v_k(y, h, x) = \underline{v}(r) \to 0 \quad \text{при } r \to 0; \tag{13}$$

Содержащиеся в этих определениях функции $\overline{v}(r)$ и $\underline{v}(r)$ предполагаются непрерывными и монотонными.

Если речь будет идти об устойчивости (4), (5), то, если не оговорено противное, в (2) будем считать $\alpha = 0$ и говорить об устойчивости тривиального решения. Назовем систему (4), (5)

устойчивой по вероятности, если для любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x| < \delta$ следует неравенство

$$\mathbb{P}\left( \sup_{t \geq t_0} |x(t, t_0, y, h, x)| > \varepsilon_1 \right) < \varepsilon_2 \tag{14}$$

при всех $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ и $t_0 \geq 0$;

асимптотически устойчивой по вероятности, если она устойчива по вероятности и можно указать такие $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, что для почти всех реализаций, удовлетворяющих неравенству $\sup\limits_{t \geq t_0} |x(t, t_0, y, h, x)| < \delta_1$, выполняется соотношение $\lim\limits_{t \to \infty} |x(t, t_0, y, h, x)| = 0$ при всех $t_0 \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ и $|x| < \delta_2$;

асимптотически стохастически устойчивой, если она устойчива по вероятности и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\lim_{T \to \infty} \mathbb{P}\left( \sup_{t \geq T} |x(t, t_0, y, h, x)| > \varepsilon \right) = 0 \tag{15}$$

при всех $|x| < \delta_1$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ и $t_0 \geq 0$;

$p$-устойчивой (при некотором $p > 0$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x| < \delta$ следует неравенство

$$\mathbb{E}\,|x(t, t_0, y, h, x)|^p = \varepsilon \tag{16}$$

при всех $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$, $t_0 \geq 0$ и $t \geq t_0$;

асимптотически $p$-устойчивой при некотором $p > 0$, если она $p$-устойчива и существует такое $\delta_1$, что из неравенства $|x| < \delta_1$ следует

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{y \in \mathbb{Y},\, h \in \mathbb{H}} \mathbb{E}\,|x(t, t_0, y, h, x)|^p = 0 \tag{17}$$

при всех $t_0 \geq 0$;

экспоненциально $p$-устойчивой при некотором $p > 0$, если существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x| < \delta$ следует неравенство

$$\mathbb{E}\,|x(t, t_0, y, h, x)|^p \leq M e^{-\gamma(t - t_0)} |x|^p \tag{18}$$

при некотором $M > 0$, $\gamma > 0$ для всех $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$, $t_0 \geq 0$ и $t \geq t_0$.

Если (13), (16) либо (17) выполняются для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то к соответствующему названию устойчивости будем добавлять слова „в целом".

Приведенные выше определения устойчивости согласуются с соответствующими определениями из [1 – 3].

В дальнейшем используется обозначение

$$k_0 = \begin{cases} \sup\{k \in N;\ t_k \le t_0\} & \text{при} \quad t_0 \ge t_1; \\ 0 & \text{при} \quad t_0 \in [0, t_1). \end{cases}$$

**2. Второй метод Ляпунова.** Прежде всего получим необходимые для дальнейшего оценки решения (4), (5) на интервалах $(t_k, t_{k+1})$ через значения решения в точках $t_k$.

**Лемма 1.** *Если выполнены условия* (1), (2) *и* $t_k$ *удовлетворяет* (3) – (5), *то для всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\sup_{t_k \le t \le t_{k+1}} |x(t)| \le [(1+\Lambda)|x(t_k)| + \alpha(1 + (t_{k+1} - t_k))]\, e^{\Lambda(t_{k+1} - t_k)} \qquad (19)$$

*при любых реализациях марковского процесса* $\xi(t)$ *и цепи Маркова* $\eta_k$.

***Доказательство.*** Используя условие скачка (7), запишем (6) при $s \downarrow t_k$ и любом $(t_k, t_{k+1})$ в виде

$$x(t) = x(t_k) + [\, g(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) - g(t_k, \xi(t_k), \eta_k, 0)] +$$

$$+ g(t_k, \xi(t_k), \eta_k, 0) + \int_{t_k}^{t} [f(\tau, \xi(\tau), x(\tau)) - f(\tau, \xi(\tau), 0)]\, d\tau +$$

$$+ \int_{t_k}^{t} f(\tau, \xi(\tau), 0)\, d\tau.$$

Теперь можно использовать условия (1), (2) и перейти к неравенству

$$|x(t)| \le (1+\Lambda)|x(t_k)| + \alpha(1 + (t_{k+1} - t_k)) + \Lambda \int_{t_k}^{t} |x(\tau)|\, d\tau.$$

Остается применить неравенство Гронуолла, что и завершит доказательство леммы. Везде далее $\alpha = 0$.

**Теорема 1.** *Если длины интервалов* $(t_k, t_{k+1})$ *не превышают* $\Delta > 0$, *выполнено условие Липшица* (1) *и существуют функции Ляпунова* $v_k(y, h, x)$ *и* $a_k(y, h, x)$ *такие, что в силу системы* (4), (5)

$$(Lv_k)(y, h, x) \le -a_k(y, h, x) \qquad (20)$$

*при любых* $k \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ *и* $x \in \mathbb{R}^n$, *то импульсная система* (4), (5) *асимптотически стохастически устойчива в целом.*

***Доказательство.*** Пусть $\mathfrak{F}^{t_k}$ — минимальная $\sigma$-алгебра, относительно которой измеримы $\xi(t)$ при всех $t \in [t_0, t_k]$ и $\eta_m$ при $m \le k$. Тогда

$$\mathbb{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1})) / \mathfrak{F}^{t_k}\} =$$

$$= \int_{\mathbb{Y}\times\mathbb{H}\times\mathbb{R}^n} P_k((y, h, x), du \times dz \times dw)\, v_{k+1}(u, z, w) \Bigg|_{\substack{y=\xi(t_k) \\ h=\eta_k \\ x=x(t_k)}} \qquad (21)$$

и поэтому в силу условий теоремы

$$\mathbb{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1})) / \mathfrak{F}^{t_k}\} =$$

$$= v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) + (Lv_k)(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \le \overline{v}(|x(t_k)|).$$

Из леммы 1 и свойств функции $\overline{v}$ следует существование математического ожидания левой части последнего неравенства, поскольку $|x(t_k)|$ при каждом $t_k \geq t_0$ в силу (19) ограничено константой, пропорциональной $|x|$ равномерно по $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ и $t_0 \geq 0$:

$$|x(t_k)| \leq |x|(1+\Lambda)^{k-k_0} e^{\Lambda(t_k - t_0)}.$$

Теперь на основании (21) запишем равенство (10) вдоль решений (3)–(5) в виде

$$(Lv_k)(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) =$$
$$= \mathbb{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1})) / \mathfrak{F}^{t_k}\} - v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))$$

и убедимся, что случайные величины $v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))$ образуют неотрицательный супермартингал относительно $\mathfrak{F}^{t_k}$. Далее, взяв математическое ожидание обеих частей, просуммируем по $k$ от $m \geq k_0$ до $N$:

$$\mathbb{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x(t_{N+1}))\} - \mathbb{E}\{v_m(\xi(t_m), \eta_m, x(t_m))\} =$$
$$= \sum_{k=m}^{N} \mathbb{E}\{(Lv_k)(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\} \leq$$
$$\leq -\sum_{k=m}^{N} \mathbb{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\} \leq 0. \tag{22}$$

Поэтому

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \geq t_0} |x(t, t_0, y, h, x)| > \varepsilon_1\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(\sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{t_{k_0+m-1} \leq t \leq t_{k_0+m}} |x(t, t_0, y, h, x)| > \varepsilon_1\right) \leq$$
$$\leq \mathbb{P}\left(\sup_{m \in \mathbb{N}} (1+\Lambda) e^{\Lambda(t_{k_0+m-1} - t_{k_0+m})} |x(t_{k_0+m-1}, t_0, y, h_0, x)| > \varepsilon_1\right) \leq$$
$$\leq \mathbb{P}\left(\sup_{m \in \mathbb{N}} |x(t_{k_0+m-1}, t_0, y, h, x)| > \frac{\varepsilon_1}{(1+\Lambda)} e^{-\Lambda\Delta}\right) \leq$$
$$\leq \mathbb{P}\left[(\sup_{m \in \mathbb{N}} v_{k_0+m-1}(\xi(t_{k_0+m-1}), \eta_{k_0+m-1}, x(t_{k_0+m-1})) \geq \overline{v}\left(\frac{\varepsilon_1}{(1+\Lambda)} e^{-\Lambda\Delta}\right)\right]. \tag{23}$$

поскольку если $\sup_{k \geq k_0} |x(t_k)| \geq r$, то на основании (12) должно выполняться неравенство

$$\sup_{k \geq k_0} v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \geq \inf_{\substack{k \geq k_0,\, y \in \mathbb{Y} \\ h \in \mathbb{H},\, |x| \geq r}} v_k(y, h, x) = \overline{v}(r).$$

Теперь воспользуемся известным неравенством для неотрицательных супермартингалов [2] для оценки правой части (23):

$$\mathbb{P}\left[(\sup_{m \in \mathbb{N}} v_{k_0+m-1}(\xi(t_{k_0+m-1}), \eta_{k_0+m-1}, x(t_{k_0+m-1})) \geq \overline{v}\left(\frac{\varepsilon_1}{(1+\Lambda)} e^{-\Lambda\Delta}\right)\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{\overline{v}\left(\frac{\varepsilon_1}{(1+\Lambda)}e^{-\Lambda\Delta}\right)} v_{k_0}(y,h,x) \leq \frac{\overline{v}(|x|)}{\overline{v}\left(\frac{\varepsilon_1}{(1+\Lambda)}e^{-\Lambda\Delta}\right)} \tag{24}$$

и убедимся в устойчивости по вероятности в целом системы (4), (5).

Из неравенства (22) следуют оценки

$$\mathbb{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x(t_{N+1}))\} \leq v_{k_0}(y,h,x),$$

$$\sum_{k=k_0}^{N} \mathbb{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\} \leq v_{k_0}(y,h,x) \tag{25}$$

при всех $N \geq k_0$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ и $x \in \mathbb{R}^n$. В силу того что последовательность $a_k$ образует функцию Ляпунова, должны существовать непрерывные монотонные функции $\underline{a}(r)$ и $\overline{a}(r)$, равные нулю в нуле и такие, что при всех $N \geq k_0$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ и $|x| \geq r$:

$$\underline{a}(r) \leq a_k(y,h,x) \leq \overline{a}(r).$$

Следовательно, из сходимости ряда в левой части неравенства (25) следует сходимость ряда

$$\sum_{k=k_0}^{N} \mathbb{E}\{\underline{a}(|x(t_k, t_0, y, h, x)|)\}$$

при всех $t_0 \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ и $x \in \mathbb{R}^n$, а тогда в силу непрерывности $\underline{a}(r)$ и равенства $\underline{a}(0) = 0$ можно записать

$$\mathbb{P}\lim_{k\to\infty} |x(t_k, t_0, y, h, x)| = 0.$$

Отсюда делаем вывод о стремлении к нулю по вероятности последовательности $\overline{v}(|x(t_k, t_0, y, h, x)|)$ при $k \to \infty$ и при всех $t_0 \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$, $x \in \mathbb{R}^n$, а тогда из свойств функции Ляпунова заключаем, что неотрицательный супермартингал $v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))$ при $k \to \infty$ стремится к нулю по вероятности при всех реализациях процесса $\xi(t)$ и последовательности $\eta_k$. Поскольку неотрицательный ограниченный сверху супермартингал имеет предел с вероятностью единица [2], то остается воспользоваться леммой 1 и теорема доказана.

Заметим, что при доказательстве стохастической устойчивости использовалось не неравенство (20), а лишь неположительность $Lv_k$ (см. вывод неравенства (24) из неравенства (23)). Поэтому из доказательства теоремы можно заключить, что справедливо такое следствие.

**Следствие 1.** *Если длина интервала* $(t_k, t_{k+1})$ *не превышает числа* $\Delta > 0$, *выполнено условие Липшица* (1) *и существует такая функция Ляпунова* $v_k$, *что в силу системы* (4), (5) *выполняется неравенство*

$$(Lv_k)(y,h,x) \leq 0 \tag{26}$$

*при всех* $k \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ *и* $x \in \mathbb{R}^n$, *то импульсивная система* (4), (5) *устойчива по вероятности в целом.*

**Теорема 2.** *Если выполнены условия теоремы* 1, *функции Ляпунова* $v_k$ *и* $a_k$ *удовлетворяют неравенствам*

$$c_1|x|^p \leq v_k(y,h,x) \leq c_2|x|^p, \tag{27}$$

$$c_3|x|^p \leq a_k(y,h,x) \leq c_4|x|^p \tag{28}$$

*при некоторых* $p > 0, c_1 > 0, c_3 > 0$ *и всех* $k \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ *и* $x \in \mathbb{R}^n$, *то импульсная система* (4), (5) *асимптотически p-устойчива в целом.*

***Доказательство.*** В силу неравенства (19) (при $\alpha = 0$) достаточно доказать, что неравенство (16) выполняется при всех $t \in S$, а предел (17) равен нулю при условии, что $t$ стремится к бесконечности, также принимая значения лишь из множества $S$. Для этого воспользуемся неравенством (22) при $m = k_0$ и на основании (27) запишем неравенство

$$\mathbb{E}\{|x(t_{N+1})|^p\} \le \frac{1}{c_1}\mathbb{E}\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x(t_{N+1}))\} \le$$

$$\le \frac{1}{c_1}\mathbb{E}\{v_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, x(t_{k_0}))\} \le \frac{c_2}{c_1}|x|^p \tag{29}$$

для всех $N \ge k_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$ и начальных распределений случайного вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$. Отсюда сразу следует $p$-устойчивость системы (4), (5). Далее, используя неравенства (22), (27) и (28), запишем неравенство

$$\sum_{k=k_0}^{N} \mathbb{E}\{|x(t_k)|^p\} \le \frac{1}{c_3}\sum_{k=k_0}^{N} \mathbb{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\} \le$$

$$\le \frac{1}{c_3}\mathbb{E}\{v_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, x(t_{k_0}))\} \le \frac{c_2}{c_3}|x|^p,$$

которое гарантирует сходимость ряда, составленного из $\mathbb{E}\{|x(t_k)|^p\}$ при любых начальных данных $x(t_{k_0}) = x$ и начальных распределениях случайного вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{Y},\, h\in\mathbb{H}} \mathbb{E}\{|x(t_k, t_0, y, h, x)|^p\} = 0$$

и в силу (19) теорема доказана.

Из доказательства этой теоремы, точно так же, как из теоремы 1, вытекает такое следствие.

**Следствие 2.** *Если выполнены условия следствия* 1 *и выполняется неравенство* (27), *то импульсная система* (4), (5) *p-устойчива в целом.*

**Теорема 3.** *Если выполнены условия теоремы* 2 *и, кроме того, существует такое число* $\Delta_1 > 0$, *что*

$$t_{k+1} - t_k \ge \Delta_1 \tag{30}$$

*при всех* $k \in \mathbb{N}$, *то импульсная система* (4), (5) *экспоненциально p-устойчива в целом.*

***Доказательство.*** В силу неравенства (19) (при $\alpha = 0$) достаточно доказать, что неравенство (18) выполняется для любого $x \in \mathbb{R}^n$ при всех $t \in S$, поскольку при $t \in (t_k, t_{k+1})$, $k > m$, из определения $k_0$ следует неравенство

$$e^{-\gamma(t_k - t_{k_0})} \le e^{-\gamma(t-t_0)}e^{\Delta\gamma}.$$

Воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 1 и установленным ранее равенством

$$\mathbb{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1})) / \mathfrak{F}^{t_k}\} =$$

$$= v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) + (Lv_k)(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \tag{31}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$, $t_0 \geq 0$ и начальных значений $x(t_0), \xi(t_0), \eta_{k_0}$. Поскольку из условий теоремы следует неравенство

$$(Lv_k)(y, h, x) \leq -a_k(y, h, x) \leq -c_3 |x|^p -$$

$$-\frac{c_3}{c_2} c_2 |x|^p \leq -\frac{c_3}{c_2} v_k(y, h, x),$$

то из (31) имеем

$$\mathbb{E}\{\mathbb{E}\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1})) / \mathfrak{F}^{t_k}\}\} \leq \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right) \mathbb{E}\{v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\}.$$

Если $k_0 \geq 1$, то из последней оценки для любого $k \geq k_0$ можно записать неравенство

$$\mathbb{E}\{v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\} \leq \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^{k-k_0} \mathbb{E}\{v_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, x(t_{k_0}))\}.$$

Отсюда, вновь используя условия теоремы, имеем

$$\mathbb{E}\{|x(t_k, t_{k_0}, y, h, x)|^p\} \leq \frac{1}{c_1} \mathbb{E}\{v_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k, t_{k_0}), y, h, x)\} \leq$$

$$\leq \frac{c_2}{c_1}\left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^{k-k_0} |x|^p. \tag{32}$$

Заметим, что всегда можно считать $c_2$ большим $c_3$ и тогда $\left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right) \in (0, 1)$. Остается воспользоваться (30).

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. – Киев.: Выща шк., 1987. – 288 с.
2. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 659 с.
3. *Иванив И., Царькова В.* Об устойчивости линейных и импульсных систем с марковскими процессами // Математика: Научн. тр. – Рига: Латв. ун-т, 1991. – Т. 562. – С. 65–74.
4. *Свердан М. Л., Царьков Е. Ф.* Устойчивость стохастических импульсных систем. – Рига: РТУ, 1994. – 300 с.
5. *Царьков Е. Ф., Ясинский В. К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Ориентир, 1992. – 328 с.

Получено 05.06.95