УДК 517. 983

Я. І. Грушка (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ПОРЯДОК ПРЯМУВАННЯ ПІВГРУПИ ДО ОДИНИЧНОГО ОПЕРАТОРА

We describe classes of vectors f in a Hilbert space $\mathbf{H}$ for which the value of $\|T(t)f-f\|$ has a certain order of convergence to zero as $t \to +0$, where $T(t) = e^{-tA}$, $t \geq 0$ and A is a self-adjoint nonnegative operator in $\mathbf{H}$.

Описуються класи векторів f з гільбертового простору $\mathbf{H}$, для яких величина $\|T(t)f-f\|$ при $t \to +0$ має певний порядок прямування до нуля, де $T(t) = e^{-tA}$, $t \geq 0$ і A — самоспряжений, невід'ємний оператор в $\mathbf{H}$.

1. Нехай $\{T(t)\colon t \geq 0\}$ — півгрупа класу C_0 з самоспряженим, недодатним генератором $(-A)$ в (комплексному) гільбертовому просторі $(\mathbf{H}, \|\,\|, (\,,\,))$. Тоді, як відомо, сім'я операторів $\{T(t)\}$ збігається до одиничного оператора при $t \to +0$ в сильній операторній топології. Тому порядок прямування півгрупи до одиничного оператора характеризується порядком прямування до нуля при $t \to +0$ величини $\delta_f(t) = \|T(t)f - f\|$, $t \geq 0$; $f \in \mathbf{H}$.

Відомо, що коли $\delta_f(t) = O(\gamma(t))$ для всіх $f \in \mathbf{H}$, де $\gamma(t) > 0$, $t > 0$ і $\gamma(t) \to 0$, $t \to +0$, то оператор A — обмежений (див. [1, с. 341]).

Отже, коли A — необмежений оператор, серед векторів простору $\mathbf{H}$ існують вектори з як завгодно повільним порядком прямування до нуля величини $\delta_f(t)$ при $t \to +0$. Тому у цьому випадку природно виникає задача характеристики класу векторів простору $\mathbf{H}$ з певним порядком прямування до нуля величини $\delta_f(t)$ при $t \to +0$.

Так, у роботах [1, с. 340; 2, с. 88] доводиться, що для $f \in \mathbf{H}$ умова $\|T(t)f - f\| = O(t)$, $t \to +0$, має місце тоді і тільки тоді, коли $f \in D(A)$, де $D(A)$ — область визначення оператора A. В [3, с. 65] доводиться, що для $f \in \mathbf{H}$ і $\alpha \in (0, 1)$ інтеграл

$$\int_0^1 \left(t^{-\alpha}\|T(t)f - f\|\right)^2 dt/t \tag{1}$$

скінченний тоді і тільки тоді, коли $f \in D(A^\alpha)$.

В даній роботі узагальнюються наведені вище два результати.

2. Позначимо через $\mathbf{S}(0, 1)$ множину вимірних за Лебегом, майже скрізь скінченних функцій на $[0, 1]$, а через $\mathbf{Q}$ клас функцій $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$, що мають наступні властивості: 1) $\gamma \in C([0, 1])$, $\gamma(0) = 0$; 2) існує таке число $k > 0$, що $\gamma(t) \geq kt$ для довільного $t \in [0, 1]$.

Нехай $\gamma \in \mathbf{Q}$. Покладемо

$$\mathbf{K}(\gamma) := \left\{ \nu \in \mathbf{S}(0,1)\colon \nu(t) > 0,\ t \in (0,1];\ \int_0^1 \left(\frac{\gamma(t)}{\nu(t)}\right)^2 \frac{dt}{t} < +\infty \right\}$$

і $\mathbf{K}_1 := \mathbf{K}(t)$. Очевидно, що для довільної функції $\gamma \in \mathbf{Q}$, $\mathbf{K}(\gamma) \subseteq \mathbf{K}_1$. Нехай $\nu \in \mathbf{K}_1$. Покладемо

$$F_\nu(t) := \left(\int_0^1 \left(\frac{1 - e^{-ts}}{\nu(s)}\right)^2 \frac{ds}{s} \right)^2, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Очевидно, що функція $F_\nu(\cdot)$ визначена при всіх $\nu \in \mathbf{K}_1$ і при цьому для довільних $\nu \in \mathbf{K}_1$ і $t \geq 0$ справедлива нерівність

$$F_\nu^2(t) \leq C(\nu)t^2, \tag{3}$$

де константа $C(\nu) > 0$ не залежить від змінної t.

Нехай $\{T(t)\colon t \geq 0\}$ — півгрупа, визначена на початку статті.

Теорема 1. *Нехай* $\nu \in \mathbf{K}_1$. *Тоді для* $f \in \mathbf{H}$ *інтеграл*

$$\int_0^1 \left((\nu(t))^{-1} \| T(t)f - f \|\right)^2 dt/t \tag{4}$$

скінченний тоді і тільки тоді, коли $f \in D(F_\nu(A))$.

Доведення. Нехай $f \in \mathbf{H}$. Тоді, використовуючи спектральне зображення півгрупи з самоспряженим недодатним генератором [1, с. 602], одержуємо

$$\| T(t)f - f \|^2 = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda t})^2 d(E(\lambda)f, f)$$

($E(\cdot)$ — розклад одиниці оператора A). Звідси, використовуючи теорему Тонеллі і визначення функції F_ν (див. формулу (2)), для довільного вектора $f \in \mathbf{H}$ і функції $\nu \in \mathbf{K}_1$ маємо

$$\int_0^1 \left(\frac{\| T(t)f - f \|}{\nu(t)} \right)^2 \frac{dt}{t} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\nu(t)} \right)^2 \frac{dt}{t} d(E(\lambda)f, f) = \int_0^{+\infty} F_\nu^2(\lambda) d(E(\lambda)f, f). \tag{5}$$

З рівності (5) випливає, що інтеграл (4) скінченний тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^{+\infty} F_\nu^2(\lambda) d(E(\lambda)f, f) < +\infty,$$

тобто тоді і тільки тоді, коли $f \in D(F_\nu(A))$. Теорему доведено.

Для зручності запишемо теорему 1 в іншій формі.

Нехай $\nu \in \mathbf{K}_1$. Для $t \geq 1$ покладемо

$$G_\nu(t) := \left(t^2 \int_0^{1/t} \frac{s\,ds}{(\nu(s))^2} + \int_{1/t}^1 \frac{ds}{s(\nu(s))^2} \right)^{1/2}$$

і при $0 \leq t < 1$ $G_\nu(t) := 0$.

Лема 1. *Для довільних* $\nu \in \mathbf{K}_1$ *і* $t \geq 0$ *справедлива нерівність*

$$e^{-1} G_\nu^2(t) \leq F_\nu^2(t) \leq G_\nu^2(t) + C(\nu) \tag{6}$$

де константа $C(\nu) > 0$ *та ж сама, що і в нерівності* (3).

Доведення. Нехай $\nu \in \mathbf{K}_1$. Розглянемо два випадки.

1. Нехай $0 \leq t < 1$. Тоді, за означенням, $G_\nu(t) = 0$. Тому нерівність (6) випливає безпосередньо з нерівності (3).

2. Нехай $t \geq 1$. Згідно з визначенням функції F_ν (див. формулу (2)) маємо

$$F_\nu^2(t) = I_1(t) + I_2(t), \tag{7}$$

де

$$I_1(t) = \int_0^{1/t} \left(\frac{1-e^{-ts}}{\nu(s)} \right)^2 \frac{ds}{s}, \ I_2(t) = \int_{1/t}^1 \left(\frac{1-e^{-ts}}{\nu(s)} \right)^2 \frac{ds}{s}.$$

Оскільки при $z \in [0, 1]$, $e^{-1}z \le 1 - e^{-z} \le z$, то

$$e^{-1}t^2 \int_0^{1/t} \frac{s\,ds}{(\nu(s))^2} \le I_1(t) \le t^2 \int_0^{1/t} \frac{s\,ds}{(\nu(s))^2}. \tag{8}$$

Враховуючи, що при $z > 1$ $e^{-1} \le 1 - e^{-1} \le 1 - e^{-z} \le 1$, отримуємо

$$e^{-1} \int_{1/t}^1 \frac{ds}{s(\nu(s))^2} \le I_2(t) \le \int_{1/t}^1 \frac{ds}{s(\nu(s))^2}. \tag{9}$$

Підставляючи нерівності (8) і (9) в рівність (7), одержуємо нерівність (6) при $t \ge 1$. Лему доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $\nu \in \mathbf{K}_1$. *Тоді для* $f \in \mathbf{H}$ *інтеграл* (4) *скінченний тоді і тільки тоді, коли* $f \in D(G_\nu(A))$.

Доведення. З леми 1 випливає, що для $\nu \in \mathbf{K}_1$

$$D(F_\nu(A)) = D(G_\nu(A)). \tag{10}$$

Використовуючи теорему 1, одержуємо те, що й треба було довести. Наслідок доведено.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $\alpha \in (0, 1)$. *Тоді для довільного* $f \in \mathbf{H}$ *інтеграл* (1) *скінченний тоді і тільки тоді, коли* $f \in D(A^\alpha)$.

Наслідок 2 випливає з наслідку 1 при $\nu(t) = t^\alpha$, $t \in [0, 1]$.

Отже, теорема 1 є узагальненням результату, наведеного у п.1.

3. Нехай $\gamma \in \mathbf{Q}$. Покладемо

$$\mathbf{H}(\gamma) := \left\{ f \in \mathbf{H}\colon \sup_{0<t<1} \left((\gamma(t)^{-1} \| T(t)f - f \| \right) < +\infty \right\}.$$

Таким чином, за означенням $\mathbf{H}(\gamma)$ — множина всіх векторів простору $\mathbf{H}$, для яких $\| T(t)f - f \| = O(\gamma(t))$, $t \to +0$.

Теорема 2. *Нехай* $\gamma \in \mathbf{Q}$. *Тоді*

$$\mathbf{H}(\gamma) = \bigcap_{\nu \in \mathbf{K}(\gamma)} D(F_\nu(A)) = \bigcap_{\nu \in \mathbf{K}(\gamma)} D(G_\nu(A)).$$

Для доведення теореми 2 необхідна наступна лема.

Лема 2. *Нехай* g *і* h *— невід'ємні функції з* $\mathbf{S}(0, 1)$, *причому* $g(t) \ne 0$ *для майже всіх* $t \in [0, 1]$. *Крім того, нехай для довільної невід'ємної функції* $\varphi \in \mathbf{S}(0, 1)$ *з умови*

$$\int_0^1 g(t)\varphi(t)\,dt < +\infty$$

випливає, що

$$\int_0^1 h(t)\varphi(t)\,dt < +\infty.$$

Тоді знайдеться таке число $C > 0$, *що нерівність* $h(t) \le Cg(t)$ *виконується для майже всіх* $t \in [0, 1]$.

Для доведення леми 2 досить розглянути функцію

$$\rho(t) = \frac{h(t)}{g(t)},\ t \in [0,1],$$

і скористатися наступним результатом А. Лебега:

якщо для довільної інтегровної за Лебегом на $[0,1]$ функції ψ існує інтеграл $\int_0^1 \rho(t)\psi(t)\,dt$ (в сенсі Лебега), то функція ρ — істотно обмежена (див. [4, с. 152], вправа 4).

***Доведення теореми* 2.** Враховуючи рівність (10), достатньо, наприклад, довести, що

$$\mathbf{H}(\gamma) = \bigcap_{\nu \in \mathbf{K}(\gamma)} D(F_\nu(A)).$$

1. Покажемо, що

$$\mathbf{H}(\gamma) \subseteq \bigcap_{\nu \in \mathbf{K}(\gamma)} D(F_\nu(A)). \tag{11}$$

Нехай $f \in \mathbf{H}(\gamma)$. Тоді для довільної функції $\nu \in \mathbf{K}(\gamma)$ маємо

$$\int_0^1 \left(\frac{\| T(t)f - f \|}{\nu(t)} \right)^2 \frac{dt}{t} \le \int_0^1 \left(\frac{C\gamma(t)}{\nu(t)} \right)^2 \frac{dt}{t} \le C^2 \int_0^1 \left(\frac{\gamma(t)}{\nu(t)} \right)^2 \frac{dt}{t} < +\infty,$$

де

$$C = \sup_{0<t<1} \left((\gamma(t))^{-1} \| T(t)f - f \| \right) < +\infty$$

(за визначенням $\mathbf{H}(\gamma)$).

Звідси, використовуючи теорему 1, маємо $f \in D(F_\nu(A))$.

Отже, включення (11) доведено.

2. Доведемо обернене включення. Нехай

$$f \in \bigcap_{\nu \in \mathbf{K}(\gamma)} D(F_\nu(A)).$$

Треба довести, що $f \in \mathbf{H}(\gamma)$, тобто існує таке число $C > 0$, що

$$\| T(t)f - f \| \le C\gamma(t),\ t \in [0,1].$$

Застосуємо лему 2. Для цього доведемо, що для довільної невід'ємної функції $\varphi \in \mathbf{S}(0,1)$ такої, що

$$\int_0^1 \gamma^2(t)\varphi(t)\,dt < +\infty,$$

виконується нерівність

$$\int_0^1 \| T(t)f - f \|^2 \varphi(t)\,dt < +\infty. \tag{12}$$

Нехай функція φ така, як відмічено вище. Розглянемо два випадки.

1. Нехай $\varphi(t) > 0$ для довільного $t \in [0,1]$. Покладемо

$$\nu(t) := (t\varphi(t))^{-1/2},\ t \in [0,1].$$

Легко бачити, що $\nu \in \mathbf{K}(\gamma)$. Тому за умовою $f \in D(F_\nu(A))$. Отже, за теоремою 1

$$\int_0^1 \|T(t)f-f\|^2 \varphi(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{\|T(t)f-f\|}{\nu(t)}\right)^2 \frac{dt}{t} < +\infty.$$

2. Нехай тепер φ — довільна невід'ємна функція на $[0, 1]$ така, що

$$\int_0^1 \gamma^2(t)\varphi(t)\,dt < +\infty.$$

Покладемо $\varphi_1(t) := 1 + \varphi(t)$, $t \in [0, 1]$.

Оскільки $\gamma \in C([0, 1])$, то

$$\int_0^1 \gamma^2(t)\varphi_1(t)\,dt < +\infty.$$

Звідси за доведеним вище

$$\int_0^1 \|T(t)f-f\|^2 \varphi_1(t)\,dt < +\infty.$$

Враховуючи, що $\varphi(t) < \varphi_1(t)$, при $t \in [0, 1]$ одержуємо нерівність (12).

Отже, за лемою 2 знайдеться таке число $C > 0$, що нерівність $\|T(t)f-f\|^2 \le C^2\gamma^2(t)$ виконується для майже всіх $t \in [0, 1]$.

Враховуючи неперервність функцій, що стоять у лівій і правій частинах останньої нерівності, одержуємо $\|T(t)f-f\| \le C\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$. Теорему доведено.

Зауваження. Скориставшись твердженням:

якщо G — невід'ємна борелева функція на $[0, +\infty)$, μ — скінченна міра на борелевих множинах з $[0, +\infty)$ і для довільної невід'ємної функції $p \in C^\infty[0, +\infty)$ такої, що $p'(t) < 0$, $t \in [0, +\infty)$ і $p(t) \to 0$, $t \to +\infty$, справедливе співвідношення

$$\int_0^\infty G(t)p(t)\,d\mu(t) < +\infty,$$

то

$$\int_0^\infty G(t)\,d\mu(t) < +\infty$$

(*тут* $C^\infty[0, +\infty)$ — *простір нескінченно диференційовних функцій на* $[0, +\infty)$), можна довести наступний наслідок з теореми 2.

Наслідок 3.

$$\mathbf{H}(t) = D(A).$$

1. *Хилле Э., Филлипс Р. С.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
2. *Paul L. Butzer.* Hubert Berens. Semi-groups of operators and approximation. – New York, 1967. – 318 p.
3. *Лионс Ж.-Л., Маджерес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
4. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

Одержано 10.05.95