УДК 517. 987

В. Н. Радченко (Киев. ун-т)

РАВНОМЕРНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И ТЕОРЕМА ЛЕБЕГА ДЛЯ СХОДИМОСТИ ПО L_0-ЗНАЧНЫМ МЕРАМ

Integrals $\int f d\mu$, with respect to L_0-valued measures, of real-valued functions are considered. A definition of convergence of real-valued functions f_n with respect to a quassi-meassure and, in particular, with respect to an L_0-valued measure is given. For these kinds of convergence, we find conditions for convergence in measure of integrals with respect to L_0-valued measures. These conditions are analogous to the conditions for uniform integrability and the Lebesgue theorem.

Розглядаються інтеграли $\int f d\mu$ від дійсних функцій за L_0-значними мірами. Дається означення збіжності дійсних функцій за квазімірою та, як частинний випадок, за L_0-значною мірою. Для таких видів збіжності одержані умови збіжності за ймовірністю для інтегралів за L_0-значними мірами, аналогічні умовам рівномірної інтегровності та теоремі Лебега.

Пусть X — некоторое множество, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра подмножеств X, а (Ω, F, P) — вероятностное пространство. Будем рассматривать пространство $L_0(\Omega, F, P)$ (далее будем писать просто L_0), состоящее из измеримых функций $\xi\colon \Omega \to R$ с топологией сходимости по мере P. Будем называть L_0-значной мерой функцию $\mu\colon \mathfrak{B} \to L_0$ такую, что $\mu(A_n) \xrightarrow{P} 0$ для $A_n \downarrow \varnothing$, и для $A \cap B = \varnothing$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

P-п.в. Множество $A \in \mathfrak{B}$ называем μ-нулевым, если для каждого $B \subset A$, $B \in \mathfrak{B}$ $\mu(B) = 0$ P-п.в. Сходимость μ-п.в. — это сходимость всюду, кроме μ-нулевого множества.

Для ξ из L_0 будем рассматривать квазинорму $\|\xi\| = \sup\{\delta\colon P\{|\xi| > \delta\} > \delta\}$. Очевидно, что $\|\xi + \eta\| \le \|\xi\| + \|\eta\|$ и $\|\xi_n\| \to 0 \Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{P} 0$ (здесь и далее имеется в виду сходимость при $n \to \infty$, если не указано другое).

Квазимерой будем называть функцию $v\colon \mathfrak{B} \to R_+$ такую, что для любых $A, B \in \mathfrak{B}$ $v(A \cup B) \le v(A) + v(B)$, $v(A) \le v(B)$ для $A \subset B$ и $v(A_n) \to 0$ для $A_n \downarrow \varnothing$. Легко проверить, что v σ-полуаддитивна и непрерывна на монотонных последовательностях множеств (такие рассуждения проведены в разделе 5 [1]). Сходимость по квазимере v и сходимость v-п.в. для измеримых $f, f_n\colon X \to R$ определяем стандартно:

$$f_n \xrightarrow{v} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad v\{x\colon |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \to 0$$

и

$$f_n \to f \quad v\text{-п.в.} \Leftrightarrow v\left\{x\colon f(x) \ne \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\} = 0.$$

Лемма 1 (теорема Егорова). *Если $f_n \to f$ v-п.в., то*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{B}\ (v(A) < \varepsilon)\colon \sup_{x \in X \setminus A} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Доказательство почти дословно повторяет доказательство для случая действительных мер (см., например, теорему 2.3.7 из [2]).

Лемма 2. *Если* $f_n \to f$ v*-п.в., то* $f_n \xrightarrow{v} f$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 1.

Лемма 3. *Если* $f_n \xrightarrow{v} f$, *то* $\exists \{n_k\} : f_{n_k} \to f$ v*-п.в.,* $k \to \infty$.

Доказательство. Выделяем

$$n_k\colon v\{x\colon |f_{n_k}(x) - f(x)| > 2^{-k}\} < 2^{-k}$$

и рассуждаем аналогично случаю действительных мер.

Для измеримых функций $f\colon X \to R$ и L_0-значных мер μ стандартным образом через простые функции определяется интеграл $\int f d\mu$. Теорема 1 [3] позволяет применить здесь построенную в гл. 7 [4] теорию интеграла по векторной мере, и это подтверждает корректность нашего определения.

Лемма 4. *Для функции* $f\colon X \to R$, *интегрируемой по* L_0*-значной мере* η *и измеримой*

$$h\colon X \to R,\ |h(x)| \le \alpha,\ \forall A \in \mathfrak{B} \quad \left\| \int_A fh\, d\eta \right\| \le 16 \sup_{B \subset A} \left\| \alpha \int_B f\, d\eta \right\|.$$

Доказательство. Для $\nu(B) = \int_B f\, d\eta$ имеем

$$\int_B h\, d\nu = \int_B fh\, d\nu$$

(это легко проверить для простых h, т.е. линейных комбинаций индикаторов, а затем использовать предельный переход и следствие 7.3.7 из [4]). Используя неравенство из доказательства теоремы 1 [3], для простых функций h', $|h'(x)| \le 1$, получаем

$$\left\| \int_A h'\, d\nu \right\| \le 16 \sup_{B \subset A} \|\nu(B)\|$$

(заметим, что в [3] наложены некоторые требования на X и $\mathfrak{B}$, которые в теореме 1 [3] не используются). Остается рассмотреть предельный переход по простым функциям $h' \to h$, $|h'(x)| \le |h(x)| \le \alpha$.

L_0-Значную меру μ называем абсолютно непрерывной относительно квазимеры v, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : v(A) < \delta \Rightarrow \|\mu(A)\| < \varepsilon$. Следующий факт является обобщением теоремы [5] на случай сходимости по квазимере.

Теорема 1. *Пусть функции* $f_n\colon X \to R$, $n \ge 1$, *интегрируемы по* L_0*-значной мере* μ, μ *абсолютно непрерывна относительно квазимеры* v *и* $f_n \xrightarrow{v} f$. *Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1) f *интегрируема по* μ *и*

$$\forall A \in \mathfrak{B} \quad \int_A f_n\, d\mu \xrightarrow{P} \int_A f\, d\mu;$$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{c \to \infty} \sup_{n, A} P\left\{ \left| \int_{A \cap \{|f_n| > c\}} f_n\, d\mu \right| > \varepsilon \right\} = 0.$

Доказательство. Докажем сначала 1) $\Rightarrow$ 2). Из теоремы 7.3.5 [4] следует, что

$$\eta_n(A) = \int\limits_A f_n \, d\mu$$

являются L_0-значными мерами. Зафиксируем n, и для каждого α будем иметь

$$\left\| \int\limits_A f_n \, d\mu \right\| \le \left\| \int\limits_{A \cap \{|f_n| > \alpha\}} f_n \, d\mu \right\| + \left\| \int\limits_{A \cap \{|f_n| \le \alpha\}} f_n \, d\mu \right\|.$$

Выбором большого α можно сделать сколь угодно малым первое слагаемое равномерно по A (используя аналог теоремы Лебега 7.3.7 [4]). Второе слагаемое не превышает $16 \sup\limits_{B \subset A} \| \alpha \mu(B) \|$ (используем лемму 4 для $h = f_n$). Выбором малого $\upsilon(A)$ можно сделать малым для данного α и это слагаемое, поэтому каждая η_n абсолютно непрерывна относительно υ. Из условия 1 и обобщения теоремы Витали – Хана – Сакса 3.2 [6] следует, что η_n равномерно абсолютно непрерывны относительно υ. Множества $\{x : |f_n(x)| = \infty\}$, $\{x : |f(x)| = \infty\}$ являются μ-нулевыми, и мы можем считать их пустыми. Из того, что $f_n \xrightarrow{\upsilon} f$, следует, что выбором c можно сделать сколь угодно малым $\sup\limits_{n, A} \upsilon(A \cap \{|f_n| > c\})$, и из равномерной абсолютной непрерывности η_n получим утверждение 2.

Для доказательства 2) $\Rightarrow$ 1) дословно повторяем доказательство 1) $\Rightarrow$ 2) теоремы [5]. Необходимо лишь вместо меры m из [5] использовать квазимеру υ и при выборе подпоследовательности f_{n_i}, сходящейся почти всюду, воспользоваться леммой 2.

При выполнении условия 2 мы говорим, что множество $\{f_n, n \ge 1\}$ равномерно интегрируемо по μ.

Теорема 2. *Пусть множество функций* $g_n : X \to R$, $n \ge 1$, *равномерно интегрируемо по* L_0*-значной мере* μ *и измеримые функции* $f_n : X \to R$, $n \ge 1$, *таковы, что* $\forall\ n, x \quad |f_n(x)| \le |g_n(x)|$. *Тогда* $\{f_n, n \ge 1\}$ *также равномерно интегрируемо по* μ.

Доказательство. Используя лемму 4 для $h = f_n / g_n$, $|h(x)| \le 1$, и то, что $\{x : |f_n(x)| > c\} \subset \{x : |g_n(x)| > c\}$, имеем

$$\sup_{A, n} \left\| \int\limits_{A \cap \{|f_n| > c\}} f_n \, d\mu \right\| \le 16 \sup_{A, n} \left\| \int\limits_{A \cap \{|g_n| > c\}} g_n \, d\mu \right\|.$$

Нетрудно видеть, что сходимость записанных супремумов к нулю при $c \to \infty$ эквивалентна равномерной интегрируемости соответствующих множеств функций. Поэтому из равномерной интегрируемости g_n по μ следует такое же свойство для f_n.

Следующее утверждение является обобщением теоремы Лебега и для сходимости $f_n \to f$ μ-п.в. содержится в следствии 7.3.7 из [4].

Теорема 3. *Пусть* L_0*-значная мера* μ *абсолютно непрерывна относительно квазимеры* υ, *действительные функции* g *и* f_n, $n \ge 1$, *на* X *интегрируемы по* μ, $|f_n(x)| \le |g(x)|$, $f_n \xrightarrow{\upsilon} f$. *Тогда* f *интегрируема по* μ *и*

$$\int\limits_X f_n \, d\mu \xrightarrow{P} \int\limits_X f \, d\mu.$$

Доказательство. Из теорем 1 и 2 следует, что достаточно проверить равномерную интегрируемость по μ множества, состоящего из одной функции g. Однако для последовательности одинаковых функций g и предельной g будет, очевидно, выполняться условие 1 теоремы 1. Значит, будет выполняться и условие 2.

Теперь для $f, f_n \colon X \to R$, по аналогии со сходимостью по действительной мере, определим сходимость по L_0-значной мере μ, для которой будем использовать обозначение $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Определение. *Последовательность функций f_n сходится к функции f по L_0-значной мере $\mu (f_n \xrightarrow{\mu} f)$, если для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A \subset \{|f_n - f| > \varepsilon\}} \|\mu(A)\| = 0.$$

Для действительной μ данное определение совпадает с общепринятым.

Теорема 4. $v_\mu(A) = \sup\limits_{B \subset A} \|\mu(B)\|$ *является квазимерой и сходимость по v_μ эквивалентна сходимости по* μ.

Доказательство. Условия полуаддитивности и монотонности v_μ очевидны. Если есть $A_n \downarrow \varnothing$ такие, что $v_\mu(A_n) \nrightarrow 0$, то найдутся n_k, $B_k \subset A_{n_k}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что все $\|\mu(B_k)\| > \varepsilon$. Функции $f_k = I_{B_k}$ таковы, что $f_k \to 0$ μ-п.в., $k \to \infty$, и $|f_k(x)| \le 1$. Из утверждения 7.3.7 [7] следует, что

$$\mu(B_k) = \int_X f_k \, d\mu \xrightarrow{P} 0, \quad k \to \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что v_μ — квазимера. Эквивалентность сходимостей по v_μ и μ видна непосредственно из определений.

Отметим, что сходимость v_μ-п.в. есть сходимость μ-п.в. Из лемм 2 и 3 следует, что сходимости по μ и μ-п.в. связаны так же, как и соответствующие сходимости для действительных мер. Теоремы 1 и 3 для нашей v_μ показывают, что для сходимости функций по μ справедливы аналоги теоремы о равномерной интегрируемости и теоремы Лебега.

1. *Drewnowski L.* Topological rings of sets, continuous set functions, integration. II // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys. – 1972. – **20**, № 4. – P. 277–286.
2. *Федерер Г* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.
3. *Радченко В. М.* Про интеграли по випадкових мірах, σ-адитивних з ймовірністю 1 // Віcн. Київ. ун-ту. Математика і механіка. – 1989. – Вип. 31. – С. 111–114.
4. *Turpin P.* Convexites dans les espaces vectoriels topologiques generaux // Diss. Math. – 1976. – **131**. – 220 p.
5. *Радченко В. Н.* Равномерная интегрируемость для интегралов по L_0-значным мерам // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 9. – С. 1264–1267.
6. *Drewnowski L.* Topological rings of sets, continuous set functions, integration. I // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys. – 1972. – **20**, № 4. – P. 269–276.

Получено 01.06.95