УДК 517. 91. 93

М. А. Сотніченко (Київ. держ. техн. ун-т будівництва і архітектури)

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З „ТОЧКАМИ ПОВОРОТУ"

We obtain an algorithm for finding the principal part of the asymptotics of a solution of system of differential equations with slowly changing time and having "turning points".

Розроблено алгоритм визначення головного члена асимптотики розв'язку для системи диференціальних рівнянь з повільним часом при наявності „точок повороту".

Розглянемо систему

$$\dot{x} = A(\tau)x, \quad A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^{\alpha}(\tau) & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

яка еквівалентна диференціальному рівнянню $\ddot{y} - \omega^{\alpha}(\tau)y = 0$. Тут $\tau = \varepsilon t$ — „повільний час", ε — малий параметр ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $0 \le \tau \le L$, $\alpha \ge 2$; ε_0, L, α — дійсні числа), $\omega(\tau)$ — повільно змінна функція, неперервно диференційовна по τ; $\omega^{\alpha}(\tau)$ задовольняє умови теореми існування.

Нулі функції $\omega(\tau)$ називають „точками повороту" [1]. При асимптотичному інтегруванні системи (1) у цьому випадку відомі методи не дають бажаного результату. Випадок, коли нуль функції $\omega(\tau)$ простий $(\alpha = 1)$, розглянуто в [1]. Оригінальні дослідження в цьому напрямку проведено в роботах [2, 3].

Покажемо, що можна одержати головний член асимптотики в тому випадку, коли кратність нуля функції $\omega^{\alpha}(\tau)$ більша або рівна 2 і навіть коли таких нулів може бути декілька на відрізку $[0, L]$. Наприклад, $\omega^{\alpha}(\tau) = \tau^5(\tau^2 - 1)^2 \sin^3\tau$. Такі задачі зустрічаються в гідродинаміці [1], в теорії оболонок та багатьох інших дослідженнях.

Дійсно, за допомогою перетворення

$$x = Qu, \; Q = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^{\alpha}(\tau)}} \begin{pmatrix} \gamma & -\omega^{\alpha/2}(\tau) \\ \gamma\omega^{\alpha/2}(\tau) & \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma > 0, \tag{2}$$

систему (1) зведемо до системи

$$\dot{u} = (T(\tau) + \varepsilon T_1(\tau))u, \tag{3}$$

де

$$T(\tau) = \begin{pmatrix} \omega^{\alpha/2}(\tau) & \dfrac{1}{\gamma}(\gamma^2 - \omega^{\alpha}(\tau)) \\ 0 & -\omega^{\alpha/2}(\tau) \end{pmatrix}, \; T_1(\tau) = \frac{\alpha\gamma\omega^{\alpha/2-1}\omega'}{2(\gamma^2 + \omega^{\alpha})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

($\gamma > 0$ — довільна стала, яка вибирається такою, щоб $\gamma^2 + \omega^{\alpha} > 0 \quad \forall \tau \in [0, L]$).

З вигляду матриці $T(\tau)$ бачимо, що систему (3) в першому наближенні легко проінтегрувати або безпосередньо, або використовуючи метод із роботи [4, с. 522 – 536]. Там аналогічна система проінтегрована і наведено асимптотичні оцінки.

Наведений алгоритм дозволяє отримати головний член асимптотики системи (3), а отже, і системи (1) при наявності „точок повороту".

В конкретних прикладах матрицю перетворення (2) можна вибрати простішу. Наприклад [5, с. 416], розглянемо систему типу (1) з матрицею

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\tau & -(2\tau+1) \end{pmatrix}.$$

Власні значення матриці $A(\tau)$: $\lambda_1 = -2\tau$, $\lambda_2 = -1$ співпадають у точці $\tau = 1/2$, що є „точкою повороту" [1 – 3]. Перетворення типу (2) з матрицею

$$Q(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\tau & 1 \end{pmatrix}$$

зведе систему (1) до системи вигляду (3), де

$$T(\tau) = \begin{pmatrix} -2\tau & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ T_1(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

і для якої легко визначається головний член асимптотики.

Якщо в системі (1) маємо матрицю

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^{-\tau}\cos\tau & e^{-\tau}+\cos\tau \end{pmatrix}, \quad 0 \le \tau = \varepsilon t < +\infty,$$

то її власні значення — це $\lambda_1 = e^{-\tau}$, $\lambda_2 = \cos\tau$. Отже, система має необмежене число „точок повороту". Застосовуючи перетворення (2) з матрицею

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-\tau} & 1 \end{pmatrix},$$

одержуємо систему (3), де

$$T(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-\tau} & 1 \\ 0 & \cos\tau \end{pmatrix}, \ T_1(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-\tau} & 0 \end{pmatrix}$$

і для якої легко визначаємо головний член асимптотики.

Слід відмітити, що звичайне перетворення подібності матриць вироджується в „точці повтору" і тому воно неефективне. Наведені тут перетворення базуються на відомому алгоритмі І. Шура [5]. Можна також застосувати перетворення [7], але при цьому потрібно ввести допоміжний малий параметр.

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
2. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений. – Киев: Выща шк., 1989. – 287 с.
3. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырождениями. – Киев: Выща шк., 1991. – 207 с.
4. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.
5. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
6. *Schur J.* Uber die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integral-gleichungen // Math. Ann. – 1909. – № 66. – S. 488–510.
7. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* К проблеме собственных значений и „точек поворота" в теории систем дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 6. – С. 775–785.

Получено 05.01.95